

# Influência da massa na geometria do espaço-tempo

## Influence of mass on the space-time's geometry

Marco A. Garms<sup>1</sup>, Gabriel C. Grime<sup>\*1</sup>, Iberê L. Caldas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP, Brasil.

Recebido em 07 de março de 2024. Revisado em 20 de junho de 2024. Aceito em 25 de junho de 2024.

Na Relatividade Geral, em sistemas com uma massa dominante, a curvatura do espaço-tempo é descrita pela métrica de Schwarzschild. Contudo, obter seus coeficientes métricos do campo gravitacional desta massa exige, em geral, o uso de ferramentas matemáticas avançadas, como geometria diferencial e cálculo tensorial. Neste artigo, para obter tais coeficientes métricos, usamos o Teorema Egrégio de Gauss sobre curvatura espacial e a hipótese desses coeficientes coincidirem, no limite de massa nula, com os da métrica de Minkowski válida para a Relatividade Restrita. Com essa formulação, o artigo contém, de forma didática, uma primeira apresentação quantitativa da Teoria da Relatividade Geral, a partir de conhecimentos da Relatividade Restrita, usando ferramentas básicas do cálculo diferencial e integral, sem o uso de tensores. Ademais, disponibilizamos videoaulas que têm como base o material deste artigo.

**Palavras-chave:** Teorema Egrégio, Relatividade Geral, Métrica de Schwarzschild.

In General Relativity, in systems with a dominant mass, the curvature of spacetime is described by the Schwarzschild metric. However, obtaining its metric coefficients of the gravitational field due to this mass generally requires the use of advanced mathematical tools, such as differential geometry and tensor calculus. In this article, to obtain such metric coefficients, we use Gauss's Egregium Theorem on spatial curvature and the hypothesis that these coefficients coincide, in the limit of zero mass, with those of the Minkowski metric valid for Special Relativity. With this formulation, the article contains, in a didactic way, a first quantitative presentation of the Theory of General Relativity, based on knowledge of Special Relativity, using basic tools of calculus, without the use of tensors. Furthermore, we provide video lectures based on the material of this article.

**Keywords:** Theorema Egregium, General Relativity, Schwarzschild metric.

## 1. Introdução

Em 1916, ano seguinte à publicação de Einstein de sua teoria da Relatividade Geral (Relatividade Geral), Schwarzschild apresentou sua solução das equações desta teoria quando aplicada a um sistema planetário em movimento planar, por exemplo, um planeta com massa orbitando uma estrela. Esta solução é descrita pela métrica de Schwarzschild.

Mesmo sendo uma das soluções mais simples da Relatividade Geral, o emprego da métrica de Schwarzschild utilizando todo o formalismo da Relatividade Geral é, por vezes, difícil em um curso de relatividade para alunos de graduação. Logo, abordagens sintéticas, que obtêm e apresentam o conteúdo físico da solução de Schwarzschild, sem o uso do cálculo tensorial em variedades, são úteis.

Objetiva-se obter os coeficientes métricos do espaço-tempo de Schwarzschild usando diretamente o conceito de curvatura e tendo como base o Teorema Egrégio de Gauss. É uma redução na exposição da Relatividade Geral, aplicável apenas ao caso de estudo proposto, visando uma primeira apresentação quantitativa e didática

sobre a Relatividade Geral que evite a complexidade matemática necessária para uma análise mais geral desta teoria.

A nossa apresentação desta teoria baseia-se no conceito de curvatura de Gauss referente a superfícies bi-dimensionais imersas em um espaço euclidiano tridimensional. Este conceito é extrapolado para expor, na teoria de Einstein, as mudanças do espaço-tempo de Minkowski ao considerar uma massa de pequenas dimensões, nele inserida. O espaço-tempo assim modificado será descrito pela métrica de Schwarzschild.

A leitura do artigo requer apenas conhecimentos sobre o Cálculo básico, Geometria Analítica, Relatividade Restrita (e.g. [1], p. 190–203) e Mecânica Analítica, sem incluir explicitamente cálculo tensorial. Em diversas partes deste trabalho serviram de base as Refs. [2–5], que também apresentam uma preocupação semelhante quanto a simplificar a introdução à Relatividade Geral. Não obstante, este artigo é coeso no sentido de que é composto de preliminares, proposições e desenvolvimento da métrica de Schwarzschild.

Assim, na seção 2 discute-se sucintamente a parte da geometria relevante ao artigo, incluindo o Teorema Egrégio e a fórmula de Gauss aplicável ao caso de estudo. Usando esta fórmula e a conservação da energia

\*Endereço de correspondência: gabrielgrime@gmail.com

calculam-se os coeficientes métricos do espaço-tempo de Schwarzschild, respectivamente nas seção 3. Na seção 4 sintetizam-se os resultados das duas seções anteriores, apresentando e discutindo o conteúdo físico da métrica de Schwarzschild. Por fim, na seção 5 são expostas as considerações finais sobre este artigo.

No Apêndice A, de modo complementar, compara-se a generalidade da Equação de Einstein com a obtenção da métrica aqui apresentada. Além disto, explicitam-se as etapas de como tipicamente se desenvolve uma análise da Mecânica pela Relatividade Geral, isto é, a determinação da métrica sendo seguida pelo estudo da dinâmica. Finalmente, no Apêndice B desenvolve-se a fórmula para se obter a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico sobre uma esfera, utilizada no artigo.

## 2. Geometria

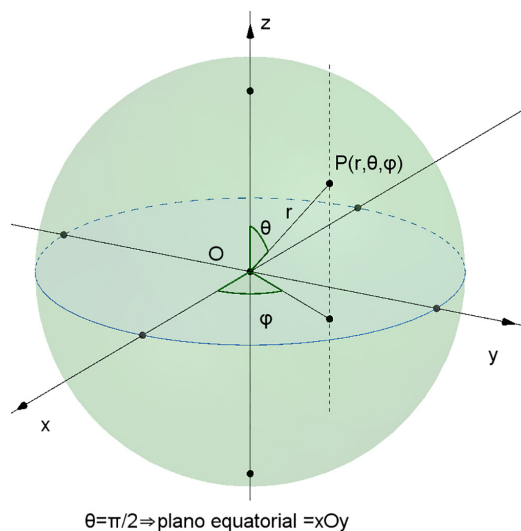
Nesta seção, serão apresentados os conceitos necessários para compreender e descrever a geometria de objetos curvos imersos no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando coordenadas esféricas, objetiva-se chegar à expressão para a métrica de Minkowski no espaço-tempo.

### 2.1. Métrica e coeficientes que a definem

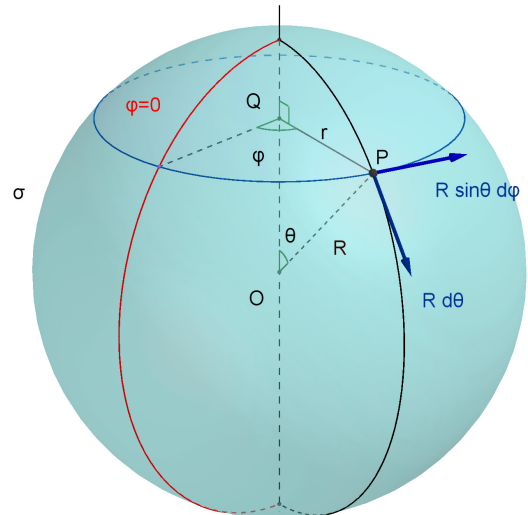
Um ponto no espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  pode ser representado por meio de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , conforme a Fig. 1.

No espaço euclidiano a distância infinitesimal é obtida, a partir do teorema de Pitágoras, pela relação  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ . Rearranjando os termos desta equação, podemos escrever

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1}$$



**Figura 1:** Espaço tridimensional euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ .



**Figura 2:** Superfície esférica  $\sigma$  de raio  $R$  com centro na origem  $O$  do sistema de coordenadas  $(\theta, \varphi)$  sobre esta esfera.

onde omitimos os parêntesis para simplificar a notação. Formalmente, o elemento de distância  $ds^2$  é chamado métrica do espaço euclidiano. Tal noção de métrica também é aplicada a espaços mais gerais, incluindo o espaço-tempo da relatividade geral. Impondo-se a coordenada radial fixa,  $r = R$  na Fig. 1, resultam pontos da superfície esférica de raio  $R$  com centro na origem  $O$  do sistema de coordenadas, Fig. 2. Esta superfície corresponde a um espaço bidimensional, localizado pelas coordenadas  $(\theta, \varphi)$ , imerso em  $\mathbb{R}^3$ . Neste espaço, a distância entre dois pontos  $(\theta, \varphi)$  e  $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ , ou seja, a métrica do espaço, é dada por

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \tag{2}$$

Os termos que multiplicam os diferenciais  $d\theta$  e  $d\varphi$  são chamados de coeficientes métricos do espaço. Em espaços mais gerais, estes coeficientes métricos são elementos de uma matriz bidimensional  $g_{ij}$ , também conhecida como tensor métrico. No presente caso, dado pela métrica da Eq. (2), os elementos do tensor métrico são nulos, com exceção de

$$g_{\theta\theta} = R^2, \quad g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta.$$

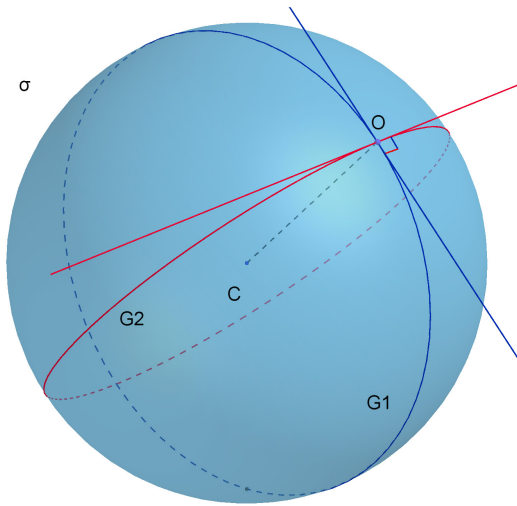
Outro exemplo de espaço bidimensional ocorre quando, em coordenadas esféricas, se impõe para a coordenada  $\theta$  o valor  $\pi/2$ , resultando pontos do plano equatorial da esfera de raio  $r$  e centro em  $O$ . Tal plano,  $xOy$  na Fig. 1, corresponde à métrica nas coordenadas polares  $(r, \theta)$ , determinada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{3}$$

com os coeficientes métricos

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2. \tag{4}$$

Concluimos que a geometria da superfície considerada interfere na forma com que medimos distâncias nesta



**Figura 3:** Geodésicas de uma superfície esférica. Neste exemplo o ângulo entre elas é de  $\pi/2$  radianos.

superfície. A estas distâncias associamos uma métrica  $ds^2$ , na qual seus coeficientes métricos contém toda a informação sobre a geometria da superfície.

**2.2. Geodésica**

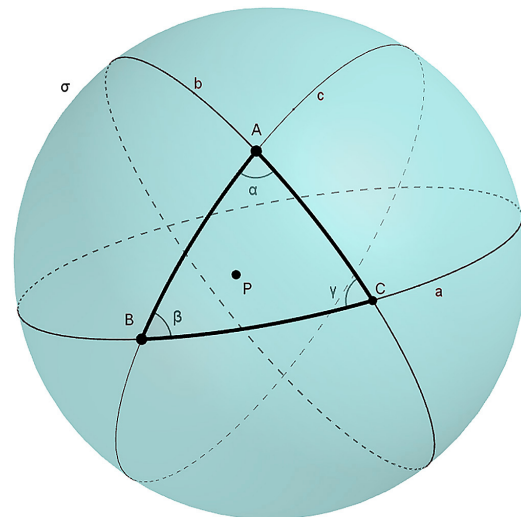
Em geral, uma geodésica é a curva sobre uma superfície que une dois pontos tal que o seu comprimento seja mínimo. Por esta definição, e pela própria geometria euclidiana, conclui-se que a geodésica em um plano é reta. Contudo, em espaços curvos, como a esfera, a geodésica é o caminho de menor comprimento sobre o espaço, ou seja, uma curva.

Na Fig. 3, tendo em comum o ponto  $O$ , são apresentadas duas geodésicas  $G_1$  e  $G_2$  da superfície esférica  $\sigma$  na Fig. 3. Tais geodésicas correspondem a círculos máximos, definidos como círculos cujos centros coincidem com o centro da esfera e cujo diâmetro é igual ao diâmetro da esfera.

**2.3. Curvatura de Gauss e espaços não euclidianos**

A curvatura gaussiana quantifica, localmente, a curvatura de uma dada superfície bidimensional e pode ser generalizada para casos de maior dimensão. Intuitivamente, pode-se utilizar medidas geométricas, como ângulos e áreas, para determinar se uma dada superfície bidimensional é curvada e se tal curvatura é positiva ou negativa.

Por exemplo, pode-se utilizar a soma de ângulos internos de um triângulo imerso em uma superfície esférica, como ilustração para a curvatura de Gauss. Seja  $\sigma$  uma superfície esférica de raio  $R$  e  $P$  um ponto pertencente a ela. Dados três pontos  $A, B$  e  $C$ , dispostos como na Fig. 4, define-se um triângulo de área  $\Delta A$  no entorno de  $P$ . A partir deste triângulo faz-se uma



**Figura 4:** Triângulo  $ABC$ , referenciado por um ponto  $P$  interno e formado por segmentos das geodésicas  $a, b$  e  $c$  na superfície esférica  $\sigma$ , tem área  $\Delta A$ . A soma dos ângulos internos é igual a  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + K\Delta A > \pi$ .

ilustração da curvatura de Gauss para superfícies nesta condição.

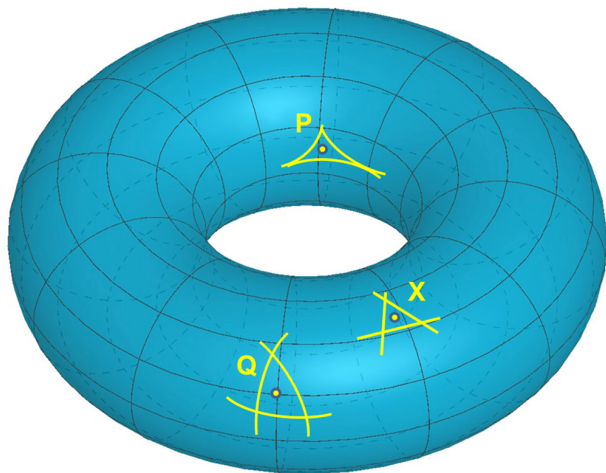
Os arcos indicados em negrito na Fig. 4 correspondem a trechos de geodésicas da superfície  $\sigma$  e formam o triângulo esférico  $ABC$ . Da geometria euclidiana, válida para espaços sem curvatura, os ângulos internos de um triângulo somam  $180^\circ$ . Contudo, para o triângulo  $ABC$  da Fig. 4, a soma dos ângulos internos,  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , é maior que  $180^\circ$  ( $\pi$  radianos). Define-se esse desvio como o produto da curvatura gaussiana no ponto  $P, K_P$ , pela área  $\Delta A$  do triângulo  $ABC$ . Matematicamente,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + K\Delta A > \pi, \tag{5}$$

onde  $K = 1/R^2$  é, no ponto  $P$ , a curvatura gaussiana da superfície esférica. Esse resultado vale para qualquer ponto  $P$  na superfície esfera da Fig. 4. Maiores detalhes podem ser encontrados na Ref. [6] p. 40-41. Ainda, no Apêndice B a Eq. (5) é obtida a partir de argumentos geométricos.

Observa-se que a expressão da soma dos ângulos pode ser generalizada para uma superfície não esférica considerando a área  $\Delta A$  infinitesimal (ver [7] p. 198) e com a curvatura  $K$  variando com o ponto desta superfície. A Fig. 5 mostra uma superfície toroidal. Nela, a curvatura varia a depender do ponto escolhido, onde o ponto  $P$  está situado numa região onde, localmente, os ângulos internos de um triângulo infinitesimal somam um valor menor que  $\pi$ , então  $K_P < 0$ . Em oposição, o triângulo infinitesimal no entorno de  $Q$  têm ângulos internos que somam um valor maior que  $\pi$ , logo  $K_Q > 0$ . Por fim, no ponto  $X$ , a curvatura é nula,  $K_X = 0$ , pois a superfície é localmente plana, ou seja, os ângulos internos do triângulo somam exatamente  $\pi$ .

Caso a geometria euclidiana não seja válida, o espaço correspondente é denominado não euclidiano. Um caso



**Figura 5:** Exemplo de superfície em que a curvatura  $K$  muda com o seu ponto de referência. Observe ainda que neste exemplo  $K_P < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$ , que  $K_Q > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$  e que  $K_X = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$ , sendo  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  os ângulos internos de cada triângulo geodésico de pequenas dimensões.

limite interessante é o de uma esfera de raio  $R \rightarrow \infty$ . Ela tem como geodésicas retas, que correspondem a círculos de raio infinito. Lembrando que a curvatura gaussiana de uma esfera de raio  $R$  é  $K = 1/R^2$ , sua curvatura é nula em todos os seus pontos, isto é, neste limite, vale a geometria euclidiana.

Em resumo, na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $\pi$  radianos, logo, a curvatura gaussiana é nula. Para espaços curvos, não euclidianos, o valor da curvatura de Gauss  $K$  indica o quanto a geometria da superfície  $\sigma$ , localmente, se afasta da geometria euclidiana.

### 2.4. Teorema Egrégio de Gauss

Até agora, o artigo discute a geometria de superfícies bidimensionais imersas no espaço euclidiano. Contudo, Gauss mostrou que a curvatura de superfícies bidimensionais pode ser completamente definida (e computada) a partir da medida de ângulos, distâncias e suas proporções na própria superfície. Ou seja, a partir de medidas da própria superfície, sem a necessidade de recorrer a um espaço externo para descrevê-la. Tal resultado foi nomeado *Teorema Egrégio de Gauss*.

Em linguagem matemática moderna, o teorema egrégio afirma que curvatura gaussiana de uma superfície é invariante sob isometrias locais, ou seja, invariante sob transformações geométricas que conservam distâncias entre pontos. Como consequência, a curvatura gaussiana de uma superfície pode ser obtida como uma função dos coeficientes métricos e as suas derivadas de primeira e segunda ordem. Portanto, a curvatura é uma medida intrínseca à superfície. A prova deste teorema pode ser encontrada na Ref. [8] capítulo I e [2] p. 160.

### 2.5. Fórmula de Gauss para a curvatura

Esta seção tem por objetivo obter, a partir do teorema egrégio, uma equação para a curvatura gaussiana para métricas do tipo Bidimensional Circularmente Simétricas em termos dos coeficientes métricos e suas derivadas. Tal resultado será utilizado posteriormente na dedução da métrica de Schwarzschild.

#### 2.5.1. Métrica Bidimensional Circularmente Simétrica

A Eq. (3) fornece a métrica, em uma superfície esférica de raio  $r$ , para pontos no plano equatorial  $\theta = \pi/2$ . Porém, considerando que distâncias na coordenada radial podem sofrer distorções devido a efeitos relativísticos, o coeficiente métrico  $g_{rr}$  pode ser diferente da unidade. Considerando que o coeficiente métrico radial dependa apenas de  $r$ , ou seja,  $g_{rr} = g_{rr}(r)$ , pontos no plano equatorial possuem a métrica

$$ds^2 = g_{rr}(r) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{6}$$

Neste caso, a métrica é chamada de Bidimensional Circularmente Simétrica pois é invariante sob rotações na coordenada  $\phi$ . Exemplos de superfície circularmente simétrica são os sólidos de revolução. Neles, cada ponto de uma curva rotaciona em torno de um eixo, formando um círculo no qual a superfície é simétrica.

A seguir consideraremos a métrica Bidimensional Circularmente Simétrica para desenvolver heurísticamente a fórmula de Gauss, obtendo  $K$  como função de  $r$ ,  $g_{rr}$  e sua derivada, nessas condições.

Para obter a expressão da curvatura  $K$  será considerada a superfície esférica  $\sigma$  de raio  $R$  (Fig. 2) cuja curvatura em todos os pontos tem um valor constante. Esta superfície pode ser definida fazendo-se pela métrica da Eq. (2). Tal métrica possui dependência em  $\theta$  e  $\varphi$ . Contudo, para encaixá-la na métrica Bidimensional Circularmente Simétrica, Eq. (6), precisamos converter a dependência em  $\theta$  para  $r$ . Neste sentido, a partir do triângulo  $POQ$  (Fig. 2), obtemos a relação

$$r(\theta) = R \sin \theta, \tag{7}$$

que fornece  $r$  em função de  $\theta$ , como desejado. Sendo a curvatura gaussiana de uma esfera  $K = 1/R^2$ ,

$$\sin \theta = \frac{r}{R} = \sqrt{K}r. \tag{8}$$

Para realizar esta mudança de variável precisa-se obter a relação entre os diferenciais  $dr$  e  $d\theta$ . Diferenciando a Eq. (7) obtém-se

$$dr = R \cos \theta d\theta. \tag{9}$$

Logo,

$$\begin{aligned} dr^2 &= R^2 \cos^2 \theta d\theta^2 = (1 - \sin^2 \theta)R^2 d\theta^2 \\ &= (1 - Kr^2)R^2 d\theta^2, \end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (8) e a identidade trigonométrica  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ . Portanto, obtemos a relação

$$R^2 d\theta^2 = \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2. \tag{10}$$

Substituindo as equações (10) e (7) na (2), obtém-se a métrica

$$ds^2 = \left( \frac{1}{1 - Kr^2} \right) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{11}$$

válida para a mesma esfera da Fig. 2 em duas metades:  $0 \leq \theta < \pi/2$  ou  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ . Tal métrica é Bidimensional Circularmente Simétrica, Eq. 6, sendo

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - Kr^2}, \quad K = \frac{1}{R^2} = \text{cte.} \tag{12}$$

### 2.5.2. Fórmula de Gauss

Pelo Teorema Egrégio de Gauss, a curvatura gaussiana é uma função dos coeficientes métricos e de suas derivadas. Considerando simetria esférica, tal métrica não pode depender dos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ , ou de suas derivadas. Como  $K$  é uma função do coeficiente métrico  $g_{rr}$  e sua derivada em relação à coordenada radial, escolhe-se como *ansatz*

$$K = \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} A, \tag{13}$$

sendo  $A$  também uma função dos coeficientes métricos e de suas derivadas. Substituindo a Eq. (12) em (13) obtém-se

$$\begin{aligned} K &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{1 - Kr^2} \right) \right] A \\ &= 2Kr \frac{1}{(1 - Kr^2)^2} A = 2AKr g_{rr}^2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a relação entre  $A$  e o coeficiente métrico

$$A = \frac{1}{2g_{rr}^2 r}. \tag{14}$$

Finalmente, inserindo a Eq. (14) em (13) chega-se relação para a curvatura

$$K = \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \frac{1}{2g_{rr}^2 r}, \tag{15}$$

válida para métricas Bidimensional Circularmente Simétrica. A partir da Eq. (11), conclui-se que  $r = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$ . Logo, pela Eq. (15) que a curvatura gaussiana nessas condições é

$$K = \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \frac{1}{2g_{rr}^2 \sqrt{g_{\varphi\varphi}}},$$

uma função apenas dos coeficientes métricos e por suas derivadas, como estabelecido no Teorema Egrégio de Gauss.

Como exemplo, a métrica da Eq. (3) é Bidimensional Circularmente Simétrica, pois ela tem a forma da Eq. (6), sendo  $g_{rr} = 1$ . Logo, usando a fórmula de Gauss, Eq. (7), para a superfície determinada pela métrica (3), resulta  $K = 0$  para todos os pontos da superfície. Tal resultado era esperado, pois esta superfície é a de um plano euclidiano.

### 2.6. Espaço-tempo de Schwarzschild

Na Relatividade Restrita, que considera o espaço sem massa, o espaço-tempo quadridimensional e descrito pela métrica de Minkowski (em coordenadas esféricas)

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 \\ &= c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned}$$

que representa intervalos de tempo próprio entre dois eventos separados por  $(cdt, dr, d\theta, d\varphi)$  no espaço-tempo, c.f. [4] p. 39.

Segundo a teoria da Relatividade Geral, com a introdução de uma massa  $M$  neste espaço-tempo, ele é distorcido. Tal distorção equivale a uma mudança dos coeficientes métricos. Considerando situações com simetria esférica, como o caso de um planeta de massa  $m$  orbitando o uma estrela de massa  $M$ , os coeficientes métricos relacionados às coordenadas angulares  $\theta$  e  $\varphi$  não são alterados pela presença. Assim, o espaço-tempo será descrito por uma nova métrica, a de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = g_{tt} c^2 dt^2 - g_{rr} dr^2 + \tag{16}$$

$$- r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \tag{17}$$

Outro argumento, de origem Física, faz supor que os coeficientes métricos  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$  dependem somente da massa  $M$  e de sua distância à massa  $m$ , a coordenada  $r$ . Logo,

$$g_{rr} = f(M, r), \quad g_{tt} = \tilde{f}(M, r).$$

No caso limite  $M \rightarrow 0$  (espaço vazio) a métrica de Schwarzschild deve tender para a métrica de Minkowski, pois, nesse limite, não há uma massa capaz de distorcer o espaço-tempo. Portanto, neste limite, os coeficientes  $g_{tt}, g_{rr} \rightarrow 1$ . Para o plano equatorial  $\theta = \pi/2$ , a parte espacial da métrica de Schwarzschild é da forma bidimensional circularmente simétrica, sendo

$$dS^2 = g_{rr}(M, r) dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{18}$$

Resta, então, obter os coeficientes  $g_{tt}$  e  $g_{rr}$ , o que será feito a seguir.

### 3. Obtenção dos Coeficientes Métricos

Na seção anterior obtivemos uma expressão para a métrica do espaço-tempo de Schwarzschild, na qual

resta ainda obter os coeficientes métricos  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$ . Na relatividade geral tais coeficientes são responsáveis pela distorção na medida de distancia e tempo, respectivamente. Portanto, nesta seção utilizaremos argumentos heurísticos para obter a forma dos coeficientes métricos  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$  da métrica de Schwarzschild em um espaço bidimensional circularmente simétrico, válida para problemas de simetria esférica. Mais detalhes sobre a interpretação física destes coeficientes são fornecidos da próxima seção.

No caso de estudo, seleciona-se o sistema de coordenadas para que o movimento da massa  $m$  (no setor espacial do espaço-tempo de Schwarzschild) ocorra no plano equatorial, dado pela métrica da Eq. (18), e com a massa  $M$  na origem deste sistema de coordenadas.

### 3.1. Curvatura e o coeficiente radial

Propõe-se, equivalentemente a Einstein, que a curvatura  $K$  em cada ponto  $P$  seja diretamente proporcional à massa  $M$ , pela qual o espaço é distorcido. Supõe-se também que esta mesma curvatura dependa inversamente da distância  $r$  entre o ponto  $P$  e o centro do sistema de coordenadas. Portanto, um *ansatz* para a curvatura, em função da massa  $M$  e da distância  $r$  é

$$K(r) = -\frac{GM}{c^2 r^3}. \quad (19)$$

Note que, dimensionalmente, a equação está correta. Mais detalhes sobre como se obtêm a esta expressão para a curvatura pode ser obtida na Ref. [2]. Observa-se que, a partir de tal dependência, quanto maior a massa  $M$ , maior a distorção do espaço, e quanto mais próxima à massa  $m$  se encontra do centro de gravidade, maior é tal distorção. Ademais, o sinal negativo para a curvatura é para que a energia potencial gravitacional, obtida adiante, seja negativa.

Agora, para encontrar o coeficiente espacial  $g_{rr}$ , utiliza-se a fórmula de Gauss, Eq. (15), à curvatura dada pela Eq. (19). Isto implica na equação

$$K = \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \frac{1}{2g_{rr}^2 r} = -\frac{GM}{c^2 r^3}, \quad (20)$$

onde a derivada parcial pode ser substituída pela derivada total, já que o coeficiente métrico só depende da coordenada  $r$ , supondo fixa a massa  $M$ . Portanto, obtemos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dg_{rr}}{g_{rr}^2} = -2\frac{GM}{c^2 r^2} dr, \quad (21)$$

que pode ser resolvida mediante fixar-se sua condição de contorno. Pretende-se que os resultados oriundos da Relatividade Geral sejam equivalentes aos da relatividade restrita na ausência de uma massa  $M$ . Portanto, no limite da massa  $m$  estar a uma distância infinita do centro de gravidade, a curvatura deve tender a zero. Logo,  $K(r) \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ . Portanto, utilizando

separação de variáveis, dadas as condições de contorno, a Eq. (21) fica

$$\int_{g_{rr}}^1 \tilde{g}_{rr}^{-2} d\tilde{g}_{rr} = -\int_r^\infty 2\frac{GM}{c^2 \tilde{r}^2} d\tilde{r}$$

Resolvendo esta integral, obtêm-se

$$g_{rr}(M, r) = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}, \quad (22)$$

a expressão desejada para o coeficiente métrico espacial. Note, no limite  $r \rightarrow \infty$  ou  $M \rightarrow 0$ ,  $g_{rr} \rightarrow 1$ , a métrica de Schwarzschild tende à métrica de Minkowski, como esperado.

### 3.2. Energia total e o coeficiente temporal

Consideremos o caso de queda livre, que em nossa métrica corresponde ao um movimento puramente movimento radial. Pela Relatividade Geral, a energia total é definida pela métrica de Schwarzschild do espaço-tempo quadrimensional, sendo o seu coeficiente métrico  $g_{rr}$  igual ao do plano equatorial calculado na seção anterior, Eq. (22). Por consistência, tal energia deve ser assintótica à obtida na Mecânica Clássica Newtoniana.

Tratando-se se um movimento puramente radial, as coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$  são fixas. Multiplicando-se a métrica de Schwarzschild por, Eq. (16), por  $(-mg_{rr}^{-1})/(2d\tau^2)$  e considerando  $d\theta = d\varphi = 0$ , obtêm-se

$$-\frac{mc^2}{2}g_{rr}^{-1} = -\frac{mc^2}{2}g_{rr}^{-1}g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{m}{2}g_{rr}^{-1}g_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2.$$

Usando a Eq. (22) no lado esquerdo da última expressão resulta

$$-\frac{mc^2}{2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = -\frac{mc^2}{2}g_{rr}^{-1}g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2.$$

A partir da expressão anterior, pode-se escrever

$$\left[g_{rr}^{-1}g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{mc^2}{2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2. \quad (23)$$

Nesta equação considera-se que o seu lado esquerdo seja a energia total estabelecida pela Relatividade Geral  $\tilde{E}$ , dada por

$$\tilde{E} = \left[g_{rr}^{-1}g_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1\right]\frac{mc^2}{2}, \quad (24)$$

como será verificado mais adiante. Impondo-se (24) em (23) obtém-se:

$$\tilde{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GMm}{r}. \quad (25)$$

No limite não relativístico o tempo próprio  $\tau$  é aproximadamente igual ao tempo num dado referencial  $t$ . Logo, valendo a aproximação  $dt \approx d\tau$ , que será confirmada na próxima seção, encontra-se que a energia dada pela Relatividade Geral é assintótica à expressão

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r},$$

válida para a Mecânica Clássica Newtoniana, como requerido.

Nota-se que a grandeza  $\tilde{E}$  das expressões (24) e (25) é a soma de energias cinética e potencial do sistema. Caso seu valor não varie ao longo do movimento, então  $\tilde{E}$  pode ser vista como a energia total deste sistema pela Relatividade Geral, o que foi previamente assumido (veja também a referência [2] p. 79-81).

Tal verificação pode ser feita dividindo por  $d\tau^2$  a métrica geral (16) de Schwarzschild, isto é, não necessariamente em movimento radial, com  $g_{tt}$  e  $g_{rr}$  indefinidos e dependentes de  $r$ . Resulta em

$$(s')^2 = c^2 = g_{tt}(r)c^2(t')^2 - g_{rr}(r)(r')^2 + -r^2(\theta')^2 - r^2 \sin^2 \theta (\varphi')^2, \quad (26)$$

sendo  $' \equiv d/d\tau$ . O intervalo entre eventos no espaço-tempo,  $\Delta s$ , pode ser então calculado pela seguinte expressão

$$\Delta s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} ds = \int_{\tau_1}^{\tau_2} s' d\tau$$

ou

$$\Delta s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{F} d\tau, \quad (27)$$

definindo a função

$$F = g_{tt}(r)c^2 t'^2 - g_{rr}(r)r'^2 + -r^2 \theta'^2 - r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2.$$

A seguir impõe-se que  $\Delta s$  assuma um valor extremo, equivalendo a exigir que as trajetórias sejam geodésicas no espaço-tempo. Sabe-se que o extremo de um funcional deste tipo é obtido a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F^{1/2}}{\partial q'_i} = \frac{\partial F^{1/2}}{\partial q_i},$$

sendo  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , as coordenada do espaço-tempo no qual a trajetória é desenvolvida. Lembrando que o tempo  $t$  é uma dessas coordenadas generalizadas  $q_i$

que definem um ponto no espaço quadridimensional da relatividade, seu momento canônico conjugado é a própria Hamiltoniana do sistema, que coincide com a energia total para o caso de estudo. Logo, a equação de Euler-Lagrange para a coordenada temporal escreve-se como

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F^{1/2}}{\partial t'} = \frac{\partial F^{1/2}}{\partial t}.$$

Sendo  $F$  dependente explicitamente de  $t'$ , não de  $t$ , vale a relação

$$\frac{\partial F^{1/2}}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1/2}{F^{1/2}} 2c^2 t' g_{tt}(r) \right] = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ F^{-1/2} c^2 t' g_{tt}(r) \right] &= F^{-1/2} c^2 \frac{d}{d\tau} [t' g_{tt}(r)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{d\tau} [t' g_{tt}(r)] = 0$$

resulta  $g_{tt} t' = D = \text{cte}$  ou

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{D}{g_{tt}}. \quad (28)$$

Finalmente substituindo a Eq. (28) na (24) obtém-se

$$\tilde{E} = \left[ g_{rr}^{-1} \frac{D^2}{g_{tt}} - 1 \right] \frac{mc^2}{2}.$$

Para que a energia total  $\tilde{E}$  seja conservada ela deve ser constante, implicando em  $g_{tt} = \text{cte} \cdot g_{rr}^{-1}$ . Tal constante é encontrada garantindo que a métrica de Schwarzschild seja equivalente à de Minkowski na região em que  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, o espaço-tempo sem a influência da massa  $M$  e, portanto. Neste limite,  $g_{tt} \rightarrow 1$  e  $g_{rr} \rightarrow 1$  para  $r \rightarrow \infty$ . Logo a constante acima definida é igual unidade e o coeficiente métrico obtido é

$$g_{tt} = g_{rr}^{-1}. \quad (29)$$

Note que na dedução acima impôs-se que as trajetórias na Relatividade Geral seguissem geodésicas do espaço-tempo de Schwarzschild. Tal premissa permitiu identificar a energia total na Relatividade Geral ( $\tilde{E}$ ). A partir dessa premissa, verificamos que a energia total da Relatividade Geral contém assintoticamente a energia total da Mecânica Clássica Newtoniana, obtida a partir do paradigma de forças e ação à distância. Isto mostra um vínculo entre os paradigmas da Relatividade Geral (geodésicas) e a conservação da energia.

### 4. Métrica Resultante

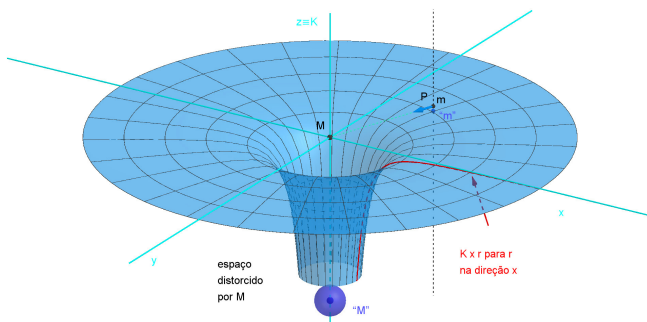
Da Eq. (16), utilizando os coeficientes métricos dados pelas Eqs. (22) e (29), pode-se escrever a métrica resultante de Schwarzschild como sendo igual a

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \frac{dr^2}{1 - r_s/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \tag{30}$$

sendo  $r_s = 2GM/c^2$ . O parâmetro  $r_s$  é denominado raio de Schwarzschild do corpo  $M$ . Uma apresentação alternativa desta métrica é encontrada na Ref. [9].

Dois coeficientes métricos destacam-se na métrica de Schwarzschild, o relacionado à coordenda radial  $r$  e ao tempo  $t$ . O coeficiente métrico temporal, está relacionado a contração e dilatação temporal causada pelo efeito gravitacional da massa  $M$ . Já o coeficiente radial está relacionando à curvatura/distorção do espaço ao redor da massa  $M$ . Da Eq. (12) visualiza-se esta deformação por meio do gráfico da curvatura  $K \times r$ , Fig. 6, que tem a forma de um funil com seu centro em  $M$ . Portanto, uma massa de teste  $m$  viajando ao redor da massa  $M$  tem sua trajetória dada por geodésicas nesta superfície, implicando em uma aceleração na direção de  $M$ .

No sistema solar as distâncias planetárias são maiores que  $10^{10}$  m do raio de Schwarzschild do Sol, aproximadamente igual a 3 km. Isto implica que o fator  $r_s/r$  é menor que  $10^{-6}$  e, portanto, as métricas de Schwarzschild e de Minkowski são muito próximas. Assim, para distâncias planetárias do sistema solar, a métrica de Schwarzschild gerada pelo Sol é praticamente igual a de Minkowski. Ademais, as velocidades planetárias do sistema solar são muito menores que a velocidade da luz,  $v \ll c \Rightarrow \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$ . Então, é possível afirmar-se que nesta região os intervalos de tempo próprio são aproximadamente iguais aos intervalos de tempo em um dado referencial,  $dt = \gamma d\tau \approx d\tau$ , de acordo ao que foi previamente assumido no artigo.



**Figura 6:** Visualização da curvatura do espaço ao redor da massa  $M$ . A superfície em destaque (azul) é formada pela revolução, em torno do eixo  $z$ , do gráfico de  $K \times r$  (curva vermelha) dado pela Eq. (15). No limite  $r \rightarrow \infty$  a parte superior desta superfície é assintótico ao plano  $xOy$ .

Destaca-se que, a métrica de Schwarzschild aplicada a um espaço bidimensional circularmente simétrico, por mais simples que seja, resulta em resultados de grande interesse Físico. Na Ref. [10], utilizando uma abordagem de simulação, a partir desta métrica, se obtém a energia total, usada como base para se obter a Lagrangiana, pela qual resultam as equações de movimento utilizadas na simulação da órbita da estrela S2 em torno do buraco negro Sagitário A\*. Mesmo partindo de suposições simples, os resultados obtidos nesta referência coincidem com simulações computacionais utilizando métricas mais robustas (e complexas) que consideram outros efeitos, como a rotação do buraco negro.

### 5. Considerações Finais

Neste artigo, a partir da métrica de Minkowski, utilizamos argumentos heurísticos para obter os coeficientes métricos do espaço-tempo de Schwarzschild. Tal abordagem, baseada no teorema egrégio de Gauss, foi realizada de maneira didática, visando sua aplicação em cursos de relatividade na graduação, sem utilizar cálculo tensores. Uma visão quantitativa, evidenciada por este trabalho, é considerada importante para compor uma formação preliminar que possa ser complementada em uma exposição posterior e mais ampla da teoria da Relatividade Geral. Assim, relacionados ao caso de estudo, destacam-se a seguir alguns tópicos apresentados no intuito de gerar esta formação.

Discutiram-se sucintamente conceitos em Geometria Diferencial essenciais para o entendimento da Relatividade Geral aplicada ao caso de uma Força Central Gravitacional. Foram, aqui desenvolvidas, abordagens originais e acessíveis sobre o Teorema Egrégio de Gauss, bem como para a obtenção da métrica de Schwarzschild baseada neste teorema. Vinculou-se a condição da Relatividade Geral ser assintótica à Mecânica Clássica Newtoniana com a percepção da trajetória de partículas seguir geodésicas. Em complemento, expõe-se (no Apêndice A) uma visão sobre as etapas que compõem uma Análise da Mecânica pela Relatividade Geral.

Sugere-se, numa disciplina sobre introdução a Relatividade fundamentada, por exemplo, na referência [11], que este artigo possa ser um adendo quantitativo ao último capítulo dessa referência. O citado capítulo tem um caráter mais qualitativo sobre a Relatividade Geral e explora aspectos conceituais e históricos, importantes na gênese desta teoria, tais como a discussão sobre o Princípio da Equivalência. Haveria assim uma complementação entre os textos para preparar o aluno para um aprofundamento posterior e abrangente sobre a Relatividade Geral em todo seu formalismo.

Complementarmente a este texto, na Ref. [12] se encontra um conjunto de videoaulas, totalizando aproximadamente uma hora e trinta minutos, sobre uma introdução quantitativa e sintética à Relatividade Geral com base neste artigo.



## Agradecimentos

Os autores agradecem o financiamento sob os processos nº 2018/03211-6 e 2022/05667-2, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Em memória de Concetta Rosas Forte Garms.

## Apêndice:

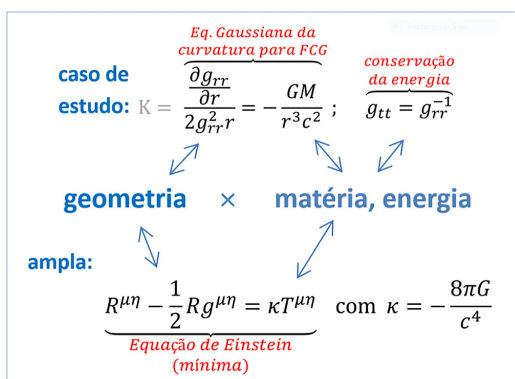
### A. Análise da Mecânica pela Relatividade Geral

Na Fig. 7 se esquematiza como na, Relatividade Geral, a geometria do espaço-tempo é influenciada pela matéria/energia – ver Eqs. (20) e (29).

Pela apresentação simplificada deste texto assumiu-se duas hipóteses. A primeira consiste na proporcionalidade entre a curvatura  $K$  e a massa  $M$  em cada ponto da superfície do movimento. Já a segunda hipótese reside na imposição que a Relatividade Geral deve ser assintótica à Mecânica Clássica Newtoniana em seu limite de validade. Juntamente com a conservação da energia, e baseada no teorema egrégio de Gauss, obtivemos os coeficientes métricos.

A generalização das ideias de Gauss por Riemann e Einstein conduz a uma abordagem mais ampla, que consiste na Equação de Einstein (mínima) [1, 4]. Nela se emprega uma combinação do tensor de Ricci  $R^{\mu\nu}$ , do tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ , do escalar  $R$  de curvatura, e do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ . O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são obtidos a partir do tensor de Riemann  $R^{\mu\nu\sigma\tau}$  [1, 4] (no  $\mathbb{R}^3$  a curvatura de Gauss para métricas ortogonais é dada por  $K = R_{2121}/g_{11}g_{22}$ , ver [8] p. 76).

Neste caso são considerados espaços-tempo mais gerais que abrangem aplicações em cosmologia, buracos negros, radiação gravitacional e outros. Resolvendo a Equação de Einstein (1ª etapa) para uma dada disposição de matéria/energia obtêm-se diretamente os coeficientes métricos do espaço-tempo que se estabelece



**Figura 7:** Relação entre geometria e matéria/energia na Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

por esta configuração, ou seja, determina-se a sua forma métrica.

Nesta etapa a equação da curvatura para a Força Central Gravitacional, Eq. (20) é parcialmente equivalente à equação de Einstein (Fig. 7) pois também permite obter a métrica embora apenas neste caso.

Com a métrica obtida e usando métodos adequados (tipicamente fundamentados no cálculo de geodésicas) pode-se então descrever a dinâmica (2ª etapa) relacionada a uma dada configuração de matéria/energia, de modo equivalente ao caso de estudo discutido na referência [10].

### B. Triângulo Esférico Geodésico

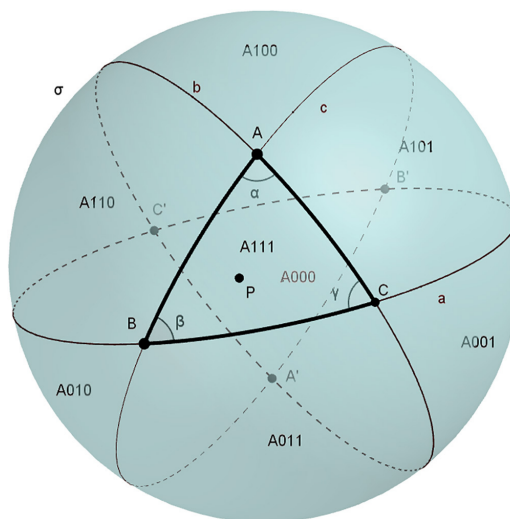
Neste Apêndice será desenvolvida a fórmula que relaciona a soma dos ângulos internos do triângulo geodésico ABC (Fig. 8), na esfera  $\sigma$ , ao produto da curvatura  $K$  da esfera pela área  $\Delta A$  deste triângulo, Eq. (5).

Ainda pela Fig. 8 a esfera  $\sigma$  fica dividida pelas geodésicas  $a, b$  e  $c$  resultando em 8 subáreas de  $A000$  a  $A111$ . Verifica-se também que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são iguais sendo que a área  $\Delta A$  deste triângulo é dada por

$$\Delta A = A111 = A000. \tag{A.1}$$

Observa-se na Fig. 8 que as superfícies  $A111$  e  $A011$  formam o fuso da esfera  $\sigma$  definido pelo ângulo  $\alpha$  entre geodésicas  $b$  e  $c$ . Equivalente em área a este fuso forma-se outro, também entre as geodésicas  $b$  e  $c$ , definido pelas superfícies  $A000$  e  $A100$ . Estes dois fusos são destacados na Fig. 9.

De modo semelhante definem-se os fusos relacionados ao ângulo  $\beta$  ( $A111 + A101$  e  $A000 + A010$ ), destacado na



**Figura 8:** A área (superfície) da esfera  $\sigma$  é dividida nas subáreas (superfícies)  $A000, A001, A010, A011, A100, A101, A110$  e  $A111$ . A área  $\Delta A$  do triângulo  $ABC$  é igual a  $A111$ . A área  $\Delta A$  do triângulo  $A'B'C'$  é igual a  $A000$  e, além disto,  $A000 = A111$ .

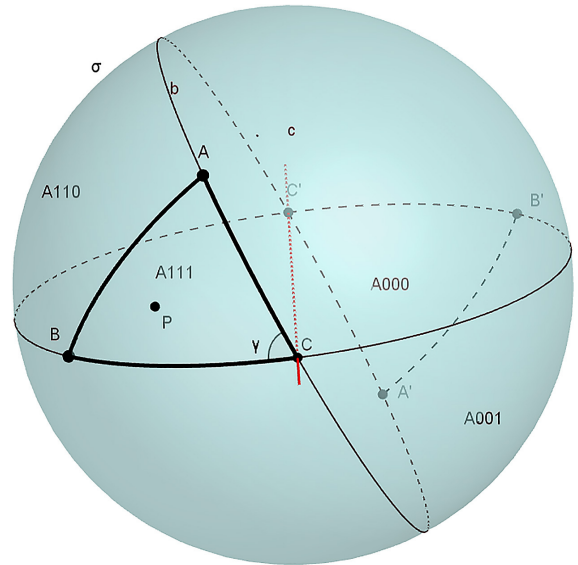
Fig. 10, bem como aos relacionados ao ângulo  $\gamma$  ( $A_{111} + A_{110}$  e  $A_{000} + A_{001}$ ), Fig. 11.

Por outro lado, a área de um fuso definido por um dado ângulo  $\theta$  entre duas geodésicas, em função deste ângulo, é dada por

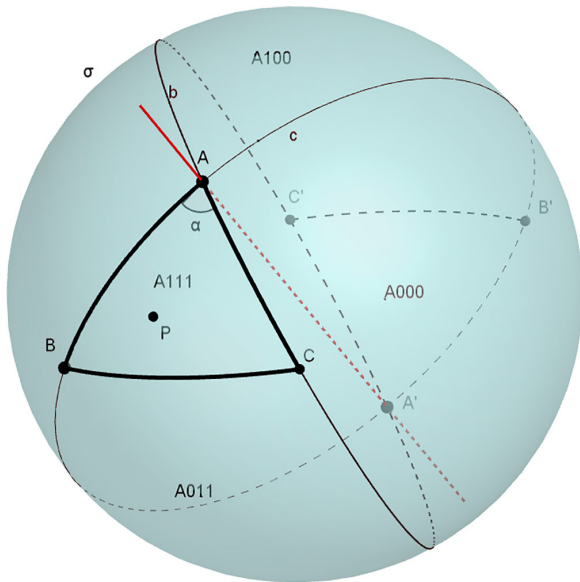
$$S(\theta) = 2\theta R^2. \tag{A.2}$$

Note que  $S(2\pi) = 4\pi R^2$ , ou seja, para um fuso que cobre toda a superfície esférica, o valor encontrado é equivalente à área da superfície esférica. Fig. 12:

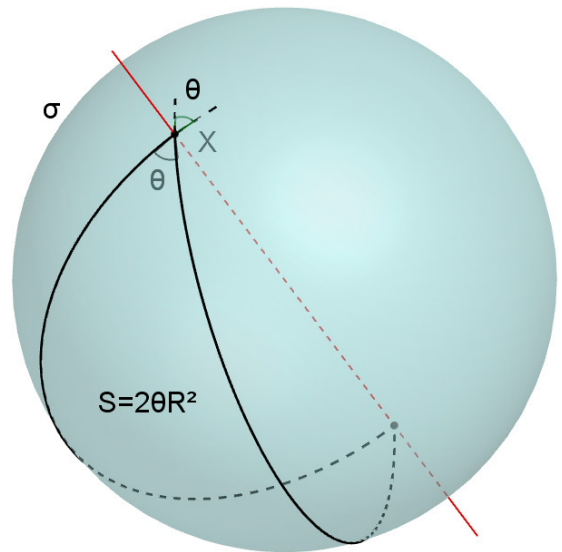
Usando a Eq. A.2 obtém-se a soma das áreas dos fusos destacados nas Figs. 9-11 e que são respectivamente



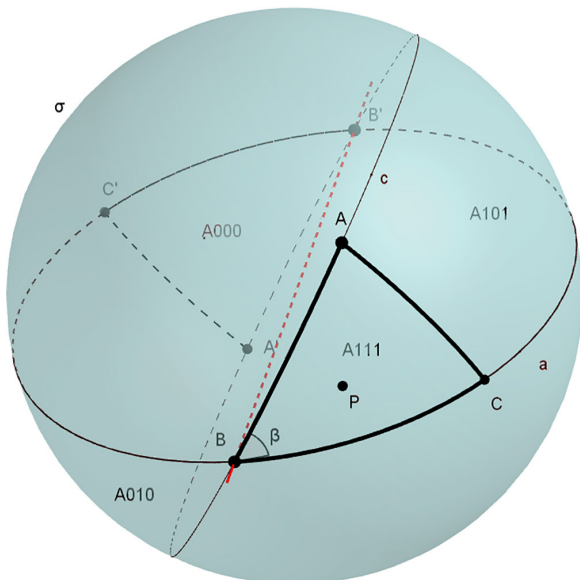
**Figura 11:** Fusos equivalentes e relacionados ao ângulo  $\gamma$ :  $A_{111} + A_{110}$  e  $A_{000} + A_{001}$ .



**Figura 9:** Fusos equivalentes e relacionados ao ângulo  $\alpha$ :  $A_{111} + A_{011}$  e  $A_{000} + A_{100}$ .



**Figura 12:** A área  $S$  do fuso, sobre a esfera  $\sigma$  (de raio  $R$ ), definido pelo ângulo  $\theta$  é dada por  $S = 2\theta R^2$ . Note que se  $\theta = 2\pi$  então  $S = 4\pi R^2$ , correspondendo a área da esfera  $\sigma$ , como esperado.



**Figura 10:** Fusos equivalentes e relacionados ao ângulo  $\beta$ :  $A_{111} + A_{101}$  e  $A_{000} + A_{010}$ .

iguais a:

$$4\alpha R^2 = A_{111} + A_{011} + A_{000} + A_{100} \tag{A.3a}$$

$$4\beta R^2 = A_{111} + A_{101} + A_{000} + A_{010} \tag{A.3b}$$

$$4\gamma R^2 = A_{111} + A_{110} + A_{000} + A_{001} \tag{A.3c}$$

Somando as áreas (A.3) e usando a expressão (A.1) obtém-se:

$$4(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 4\Delta A + A_{000} + A_{001} + A_{010} + A_{011} + A_{100} + A_{101} + A_{110} + A_{111}. \tag{A.4}$$

Por outro lado, pela Fig. 8 pode-se ainda escrever

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2 = A000 + A001 + A010 + A011 + A100 + A101 + A110 + A111 \quad (\text{A.5})$$

Aplicando (A.5) na Eq. (A.4) resulta

$$4(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 4\Delta A + 4\pi R^2. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, dividindo-se (A.6) por  $4R^2$  temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\Delta A}{R^2} = \pi + K\Delta A,$$

onde identificamos  $K = 1/R^2$  como sendo a curvatura gaussiana da esfera, que corresponde ao resultado apresentado na seção 2.3.

## Referências

- [1] J. Foster e J.D. Nightingale, *A short course in General Relativity* (Springer-Verlag, New York, 1995).
- [2] M.V. Berry, *Principles of cosmology and gravitation* (CRC Press, Boca Raton, 1989).
- [3] J.B. Hartle, *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity* (Pearson, San Francisco, 2003).
- [4] I.R. Kenyon, *General Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1990).
- [5] M.S. Longair, *Theoretical Concepts in Physics: an alternative view of theoretical reasoning in physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2020), 3 ed.
- [6] W.D. Silva, *Uma introdução à Geometria Esférica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (2015).
- [7] A.V. Pogorélov, *Geometria Diferencial* (Mir, Moscou, 1977).
- [8] R.L. Faber, *Differential geometry and relativity theory: An introduction* (Routledge, New York, 2017).
- [9] R.R. Machado, *Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2016).
- [10] M.A. Garms, G.C. Grime e I.L. Caldas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **45**, e20230182, (2023).
- [11] R. Gazzinelli, *Teoria da relatividade especial* (Blucher, São Paulo, 2019).
- [12] M.A. Garms, disponível em: <https://www.youtube.com/@marcogarms7668>, acessado em: 16/02/2024.