3. Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referência principal: Lichtenberg e Lieberman, Regular and Chaotic Motion, 1992)

IFUSP, 2020

Modêlo físico $\rightarrow$ equações de movimento

Equações de movimento $\rightarrow\leftarrow$ equações de Lagrange, equações de Hamilton, equações canônicas

Coordenadas Generalizadas

N partículas com massa m_k e coordenadas $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$

com C relações independentes

$$f_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N, t) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, C$$

Esse sistema tem 3N – C graus de liberdades e seu estado é descrito pelas coordenadas e velocidades

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N), \qquad \dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_N)$$

A evolução das variáveis é determinada pelas soluções das equações diferenciais

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = -\nabla_k V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N, t) \text{ + forças de vínculo}$$

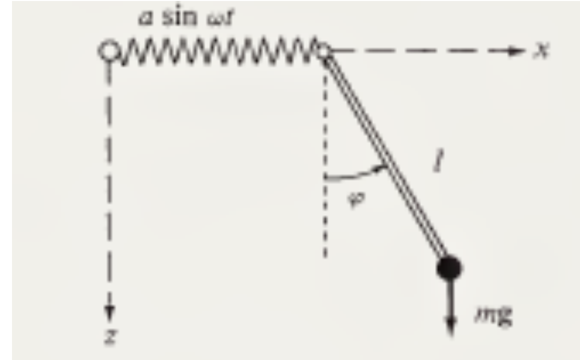
Nessa disciplina vamos considerar 3N – C coordenadas generalizadas e seus momentos associados.

Exemplo

Coordenada generalizada $q \equiv \varphi(t)$,

$$z = l \cos q,$$

$$x = l \sin q + a \sin \omega t.$$



$$T = \tfrac{1}{2} m [l^2 \dot{q}^2 + 2al\omega\dot{q} \cos q \cos \omega t + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t].$$ Energia cinética

$$V = -mgl \cos q.$$ Energia potencial

Um grau de liberdade: T, V dependem de $\dot{q}, q$

Exemplo dependente do tempo

Haste a com ω constante

$$z = a\cos\omega t + l\cos(\omega t + q),$$
$$x = a\sin\omega t + l\sin(\omega t + q).$$

$$T = \tfrac{1}{2}ml^2(\omega + \dot{q})^2 + mal\omega(\omega + \dot{q})\cos q + \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2$$

$$V = -mgz = -mg[a\cos\omega t + l\cos(\omega t + q)]$$

E(t) = T +V

Energia depende do tempo devido ao forçamente para manter haste girando uniformemente.
Um grau de liberdade.

Coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$

Sistema descrito pelas variáveis
n graus de liberdade, n < N

$$q_k, \dot{q}_k \stackrel{\text{def}}{=} dq_k/dt, \ k = 1, \ldots, n$$

Lagrangiana definida por

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i(q, \dot{q}, t)^2 - V(x_1(q,t), \ldots, x_N(q,t), t)$$

Equações de movimento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Descrição em coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Equação de movimento

$$L(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t) = T(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{q}, t)$$

Lagrangiana: diferenca entre a energia Cinética T e a energia potencial U

L pode ser obtida por um princípio variacional $\delta \int L\, dt = 0$

A Hamiltoniana é definida como $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \, dp_i - \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Momento linear introduzido como $p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Da equação anterior obtemos as equações de Hamilton

(equações de movimento com as variáveis coordenadas e momentos generalizados q, p)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Obtemos também a relação

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Lagrangiana de Uma Partícula

$$L = T - V$$

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$\partial L / \partial \dot{x}_i = m_i \dot{x}_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Equação de movimento

$$m_i \ddot{x}_i = -\partial V / \partial x_i \equiv F_{ix}$$

$$p_x \equiv \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$$

Momento

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv L(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots q_f; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f; t)$$

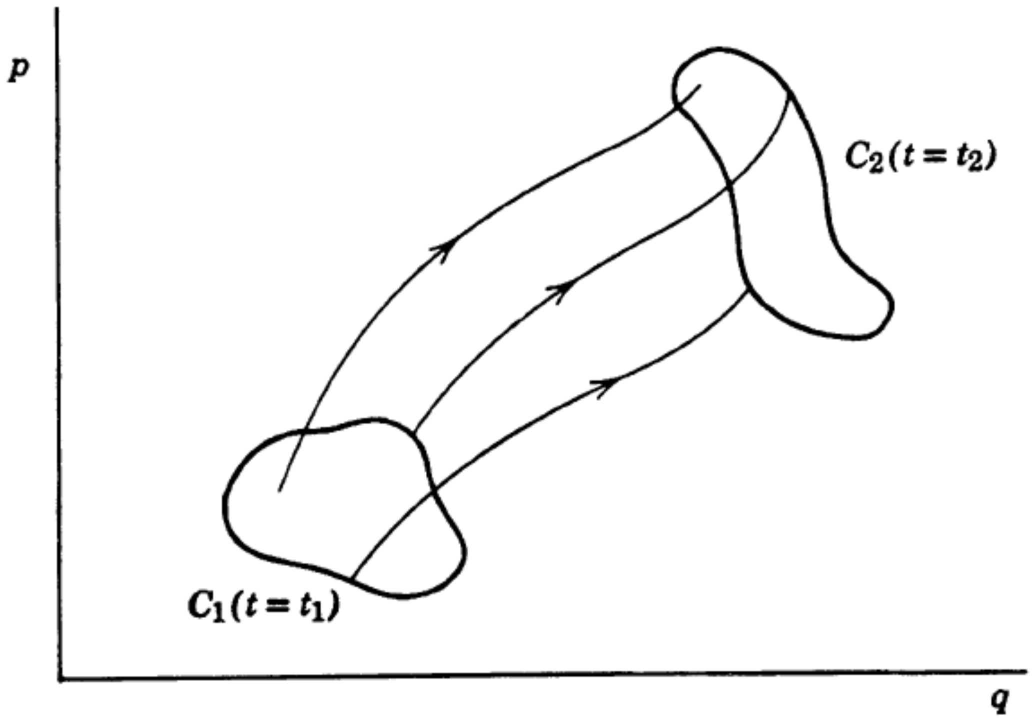
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$\partial L/\partial q_i = 0)$ $\rightarrow$ $(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_i) = 0$

$$\boxed{p_x \equiv \partial L/\partial \dot{q}_x}$$

p_x constante de movimento

Movimento no Espaço de Fase



Dados c.i. q_1, p_1 em t_1

obtemos q_2, p_2 em t_1

Teorema de Liouville

$$\tau = \tau(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$$

Densidade de condições inciais

$$\int_{\text{all space}} \tau \prod_i \mathrm{d}p_i \, dq_i = 1$$

Normalização

$$d\mathcal{N} = \tau \prod_i dp_i \, dq_i$$

Probabilidade de encontrar variáveis
no intervalo q_i + dq_i e dqi e p_i +dpi e p_i

A variação de pontos $d\mathcal{N}$ no intervalo $\prod_i dp_i\, dq_i$:

é obtida da equação de continuidade

$$\frac{\partial d\mathcal{N}}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} (d\mathcal{N} \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (d\mathcal{N} \dot{q}_i) \right) = 0$$

Dividindo N pelo volume V obtemos a densidade de pontos τ no espaço de fase

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \tau \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \tau \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0$$

Usando eqs. Hamilton, segundo e quarto termos na somatória se cancelam.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Do slide anterior obtemos

$$\sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \tau}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \tau}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0$$

Teorema de Liouville

Incompressibilidade do fluxo de trajetórias no espaço de fase !

Integrais Invariantes

$$\int \prod_i dp_i \, dq_i = \text{constante}$$

Integral Invariante, calculada em cada instante t
N graus de liberdade, Dimensão do espaço de fase 2N

$$\iint \sum_i dp_i \, dq_i = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \oint \sum_i p_i \, dq_i = \text{const.}$$

(Aplicando o teorema de Stokes)

Espaço de Fase Ampliado

Hamiltoniana dependente do tempo com N graus de liberdade
Será transformada em nova Hamiltoniana autônoma com N + 1 graus de liberdade

$$\delta \int \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{dq_i}{d\zeta} - H \frac{dt}{d\zeta} \right) d\zeta = 0$$

Mudança de variáveis

$$\bar{p}_i = p_i, \qquad \bar{q}_i = q_i, \qquad i = 1, N,$$

$$\bar{p}_{N+1} = -H, \qquad \bar{q}_{N+1} = t,$$

Novas variáveis: $(\boldsymbol{p}, -H, \boldsymbol{q}, t)$

-H e t são os novos momento e coordenada

H com um grau de liberdade e dependente do tempo é transformada em nova Hamiltomiana independente do tempo com dois graus de liberdade.

Hamiltoniana $\bar{H}$

Variáveis $(\boldsymbol{p}, -H, \boldsymbol{q}, t)$

Função geratriz $F_2 = \sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i q_i + \bar{p}_{N+1} t$

Fazendo uma Transformação Canônica

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_i},$$

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}, t) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) + \frac{\partial}{\partial t} F_2(\boldsymbol{q}, \bar{\boldsymbol{p}}, t)$$

Nova Hamiltoniana
Independente do tempo ζ
N + 1 graus de liberdade

$$\bar{\bar{H}}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{q}}) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) - H$$

$$\frac{d\bar{p}_i}{d\zeta} = -\frac{\partial \bar{\bar{H}}}{\partial \bar{q}_i}, \qquad \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta} = \frac{\partial \bar{\bar{H}}}{\partial \bar{p}_i}$$

Equações de Hamilton

$$t(\zeta) = \zeta \qquad \bar{\bar{H}} = \text{const.}$$