

5. Colchetes de Poisson

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Lichtenberg, 1992,
Lowenstein, 2012)

IFUSP

2024

Motivação

- Formulação canônica para equações de Hamilton de mesma forma.
- Constantes de movimento são destacadas nesse formalismo.
- Forma compacta de cálculo.

Sistema dinâmico descrito pela Hamiltoniana

$$H(q, p, t), \quad q = (q_1, \dots, q_n), \quad p = (p_1, \dots, p_n)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

As variáveis $q(t)$ e $p(t)$ são obtidas pelas eqs. de Hamilton

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

A derivada temporal de qualquer função $F(q, p, t)$ pode ser obtida de

$$\frac{d}{dt}F(q(t), p(t), t) = \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial t} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k}$$

Definição de **Colchete de Poisson**

Da definição do colchete de Poisson

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k}$$

obtemos as relações

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Colchetes de Poisson

$$[u, v] = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right) \quad \text{Definição}$$

u, v são funções de q_i, p_i

Como $[q_i, H] = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\dot{q}_i = [q_i, H]$$

Analogamente

$$\dot{p}_i = [p_i, H].$$

Equações de Hamilton

$$\mathbf{z} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow \dot{\mathbf{z}} = [\mathbf{z}, H]$$

Propriedades dos Cochetes

$$[u, v] = -[v, u]$$

$$[u + av, w] = [u, w] + a[v, w]$$

$$[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$$

Identidade de Jacobi

$$[[u, v], w] + [[w, u], v] + [[v, w], u] = 0$$

Para uma função $\chi = \chi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$

$$\frac{d\chi}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial t} = [\chi, H] + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Se $\partial \chi / \partial t = 0$ e $[\chi, H] = 0 \quad \rightarrow \quad \chi = \text{constante de movimento}$

Exemplo $\chi = H$

Se derivada parcial de H em relação ao tempo for nula, a derivada temporal total é nula e H é cte de movimento.

$$\dot{H} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Equações de Hamilton com Colchetes de Poisson

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \dot{q} &= \{q, H(q, p)\} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} & \dot{p} &= \{p, H(q, p)\}\end{aligned}$$

$$\{f(q, p), g(q, p)\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$$

Para qualquer função $f(q, p)$

$$\frac{d}{dt}f(q, p) = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \{f, H\}$$

Para $f(q, p, t)$
$$\frac{d}{dt}f(q, p, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Numa transformação canônica de q, p para Q, P

$$Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$$

Os colchetes de Poisson são canônicos e preservam a sua forma:

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0 = [P_i, P_j]_{q,p}, \quad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}.$$

De forma geral, qualquer colchete preserva sua forma numa transformação canônica:

$$[F(\mathfrak{E}, t), G(\mathfrak{E}, t)]_{\mathfrak{E}} = [F(\mathfrak{E}(\xi, t), t), G(\mathfrak{E}(\xi, t), t)]_{\xi}$$

Transformações Canônicas Simples

$$Q_k = q_k, \quad P_k = p_k, \quad \text{Transformação identidade}$$

$$Q_k = q_k - a_k, \quad P_k = p_k - b_k, \quad \text{Mudança da origem}$$

Exemplos de transformação canônica

$$Q_k = p_k, \quad P_k = -q_k, \quad \text{Troca de } q, p \text{ para } p, q$$

Verificamos que

$$[Q_k, Q_l] = [p_k, p_l] = 0,$$

$$[P_k, P_l] = [-q_k, -q_l] = [q_k, q_l] = 0,$$

$$[Q_k, P_l] = [p_k, -q_l] = [q_l, p_k] = \delta_{kl}.$$

Colchetes para o Momento Angular

Para um sistema com a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t). \quad \text{Força central}$$

As componentes do momento angular são constantes de movimento

$$L_z = xp_y - yp_x, \quad L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z$$

$$[H, L_x] = [H, L_y] = [H, L_z] = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L}_x = \dot{L}_y = \dot{L}_z = 0.$$

Os colchetes de componentes diferentes não são zero:

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y$$

Um exemplo de Transformação Canônica

$$Q_k = p_k, \quad P_k = -q_k$$

Pela definição do colchete podemos obter:

$$[Q_k, Q_l] = [p_k, p_l] = 0,$$

$$[P_k, P_l] = [-q_k, -q_l] = [q_k, q_l] = 0,$$

$$[Q_k, P_l] = [p_k, -q_l] = [q_l, p_k] = \delta_{kl}.$$

Teorema de Poisson

Identidade de Jacobi $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

Sendo **h a Hamiltoniana** e duas ctes de movimento $f(q, p), g(q, p)$

$$[g, h] = 0 \quad [h, f] = 0 \quad \rightarrow \quad [h, [f, g]] = 0$$

$$d/dt [f, g] = 0 \quad \rightarrow \quad [f, g] \quad \text{Cte de movimento}$$

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Sergi Escanes Domingos

Universitat Autònoma de Barcelona

Treball de Grau em Física

2017

Laplace-Runge-Lenz vector

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} \equiv \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{p} \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{Momentos linear e angular}$$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}}$$

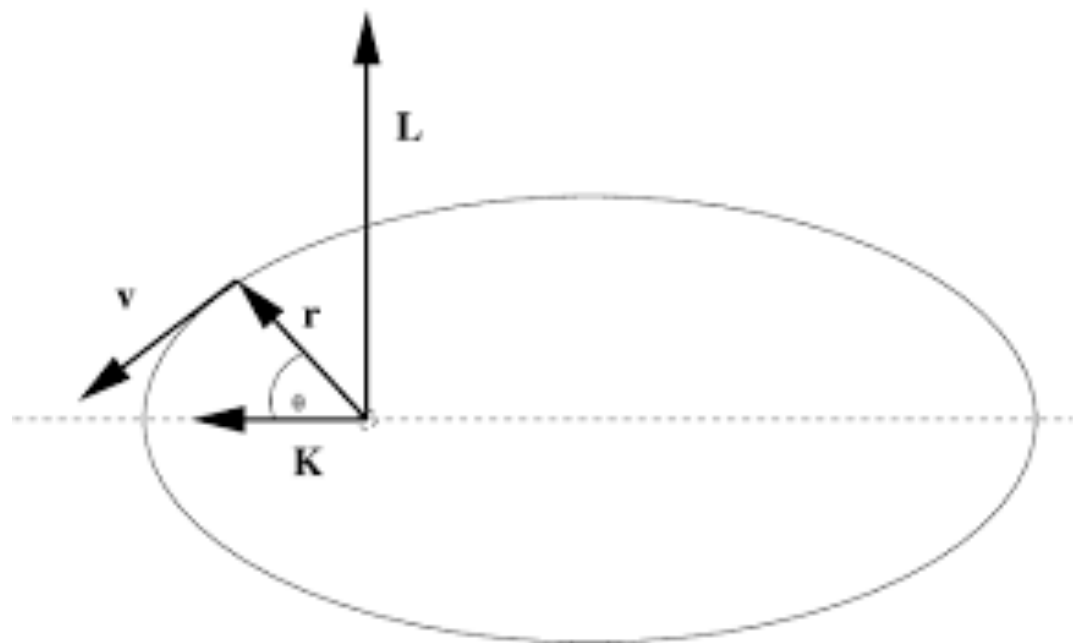
Consider the motion in the plane $x - y$ or $r - \varphi$ in polar coordinates and that $\dot{\mathbf{L}} = 0$, $L = mr^2\dot{\varphi}$. Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - mk\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \mathbf{0} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= -\frac{kL}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \frac{kL}{r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \frac{k}{r^2}mr^2\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

We can see that the Runge-Lenz vector is in the same plane as \mathbf{r} and \mathbf{p} due to the fact that

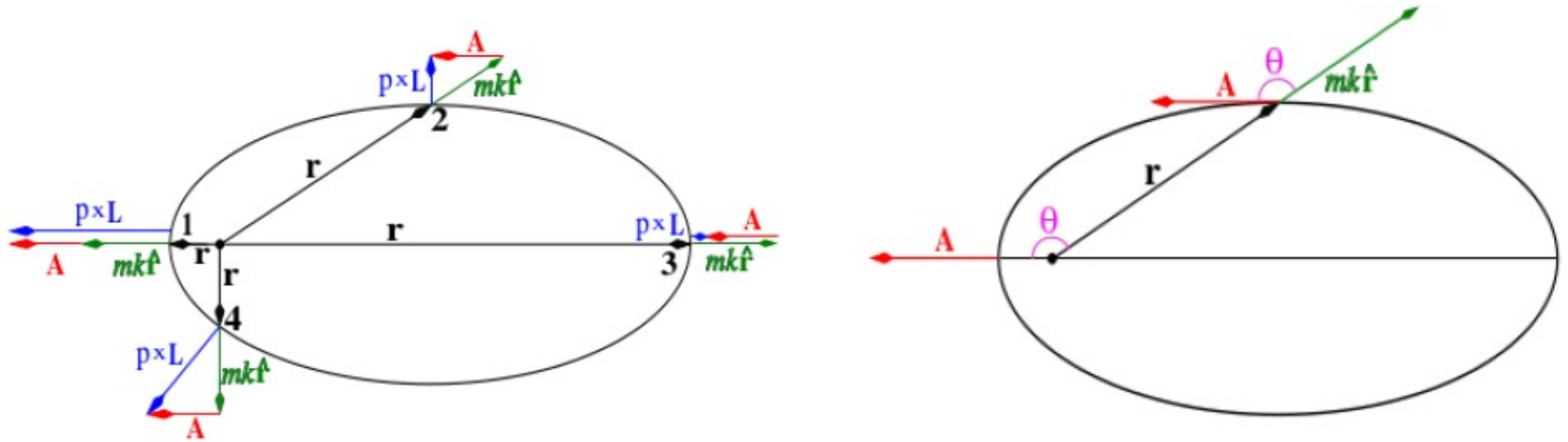
$$\begin{aligned}\mathcal{A} \cdot \mathbf{L} &= (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{L} \\ &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{L}) - \frac{mk}{r} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= 0 - \frac{mk}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} = 0\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}^2 = m^2 k^2 + 2mEL^2 \quad \text{Amplitude é constante como } E, L.$$



Órbita Elíptica no plano x, y

Vetor de LRL em vermelho



https://www.youtube.com/watch?v=a7hj_0r3_Ws

Laplace-Runge-Lenz vector You tube

Colchetes de Poisson

$$[L_i, H] = 0$$

7 ctes de movimento

$$[\mathcal{A}_i, H] = 0$$

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

$$[L_i, \mathcal{A}_j] = \epsilon_{ijk} \mathcal{A}_k$$

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = -2mH \epsilon_{ijk} L_k$$

ϵ_{ijk} Tensor de Levi-Civita

Teorema de Poisson: colchetes de duas constantes de movimento é uma constante de movimento.

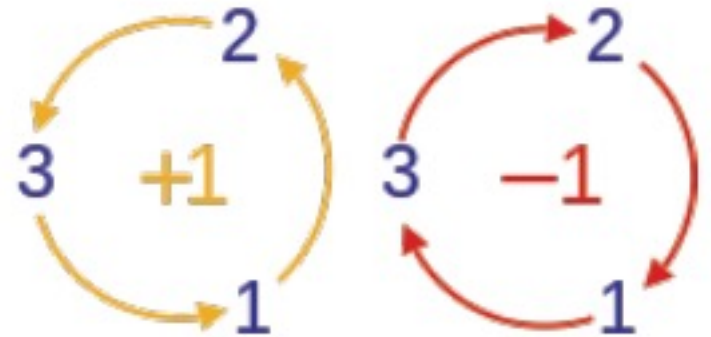
Tensor de Levi-Civita

Levi-Civita symbol - Wikipedia

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ or } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ or } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{if } i = j, \text{ or } j = k, \text{ or } k = i \end{cases}$$

$\epsilon = +1$ para sequências anti horárias

$\epsilon = -1$ para hohorárias



Exemplos

$$\epsilon_{132} = -\epsilon_{123} = -1$$

$$\epsilon_{312} = -\epsilon_{213} = -(-\epsilon_{123}) = 1$$

$$\epsilon_{231} = -\epsilon_{132} = -(-\epsilon_{123}) = 1$$

$$\epsilon_{232} = -\epsilon_{232} = 0$$