6. Variáveis de Ação e Ângulo

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Percival 1989, Lichtenberg, 1992,)

IFUSP

2025

Importância

- Introduzidas para sistemas integráveis que têm soluções regulares (periódicas e quase-periódicas).

- Relacionadas às constantes de movimento.
- Importante para definir a integrabilidade de um sistema.

- Conveniente para obter as soluções das equações de movimento. Soluções simples nessas variáveis.

Sistemas com Um Grau de Liberdade

$$H(q,p) = p^2/2m + V(q)$$

$$p(q,E) = \pm\,[2m\,(E - V(q))]^{\frac{1}{2}}$$

Equação da trajetória, com energia E, no espaço de fase (q, p).

Vamos introduzir novas variáveis canônicas,
de ângulo e ação (θ, *I*) com as propriedades:
No novo espaço de fase (θ, *I*) a trajetória ocorre com
I constante e apenas θ varia.

Equações de movimento

$$\dot{I} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \text{constant}$$

H = H(*I*)

Essas equações podem ser integradas facilmente

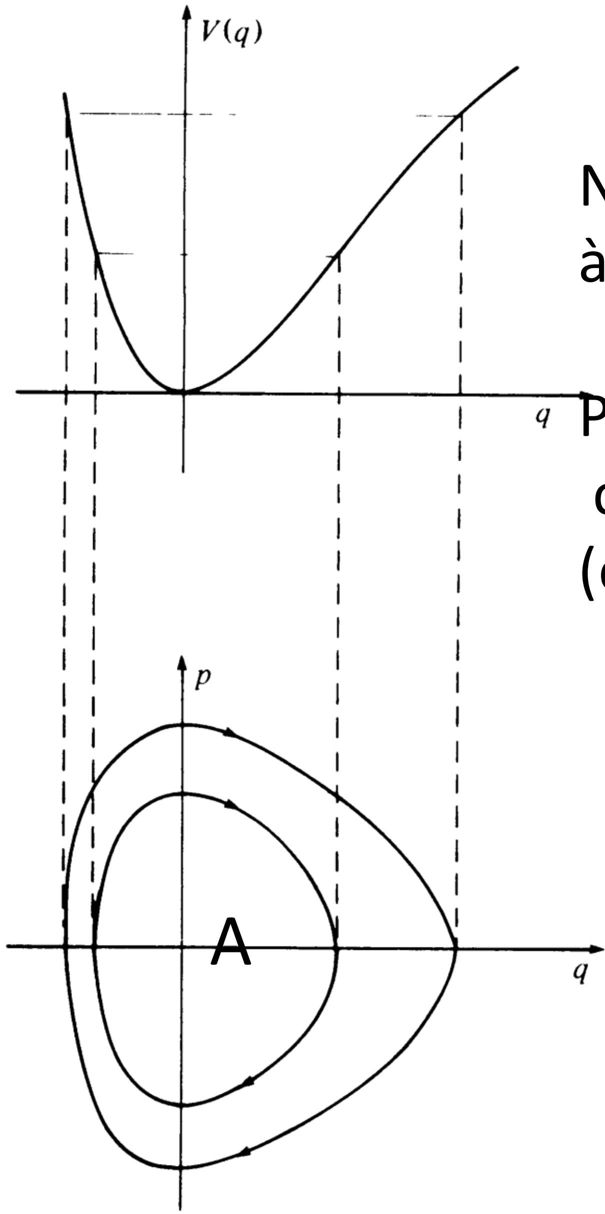
$$\dot{I} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow H = H(I) \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \text{constant} = \omega(I)$$

$$I = I_0 \qquad \theta = \omega(I)t + \delta, \quad \omega(I) = \partial H/\partial I$$

$\Delta\theta = \omega\, \Delta t$

$2\pi = \omega\, T$

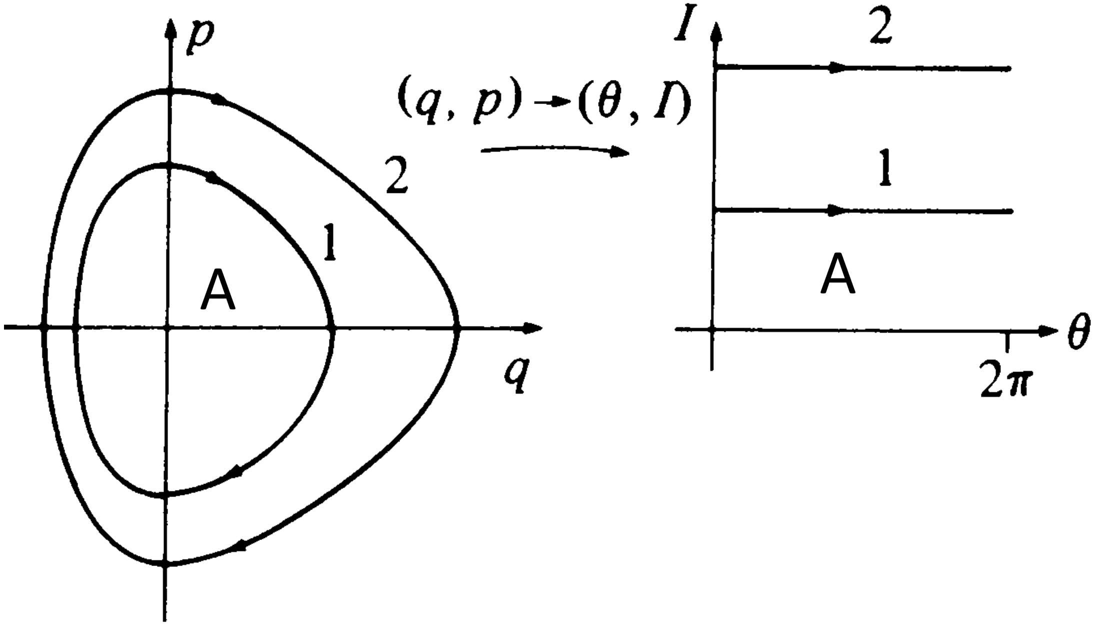
$$\omega(I) = 2\pi/T = \partial H/\partial I$$



No espaço de fase, a trajetória contem uma àrea A constante no tempo.

Podemos introduzir a ação *I* = A e a sua conjugada canônica como um ângulo θ (entre 0 e 2 π)

Trajetórias nos Espaços de fase
(q, p) e (θ, *I*)

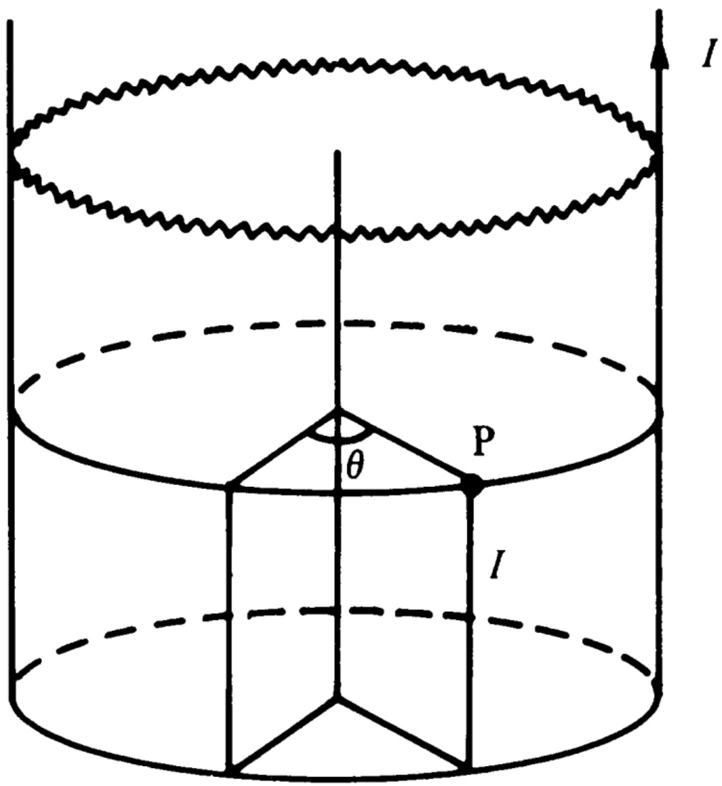


θ aumenta de 2π em um período T
ω é a frequência

$$\omega(I) = 2\pi/T = \partial H/\partial I$$

Representação Geométrica

Podemos representar as coordenadas de ângulo e ação em um cilindro I : eixo vertical e θ : ângulo polar



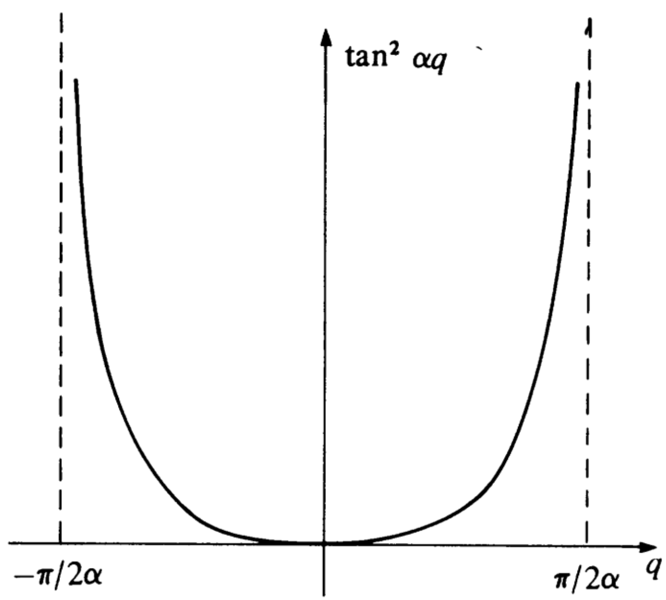
Cada trajetória é uma linha circular com *I* constante e periódica em θ

$$q(\theta + 2\pi, I) = q(\theta, I)$$

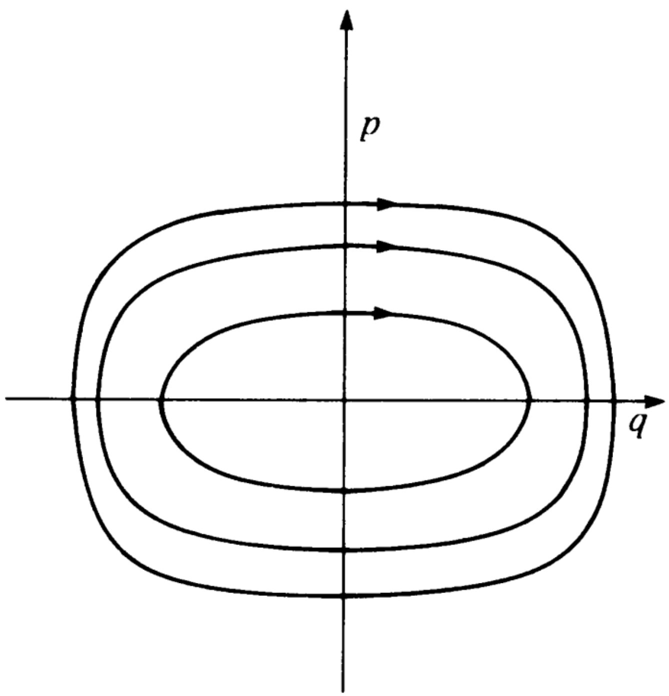
$$p(\theta + 2\pi, I) = p(\theta, I).$$

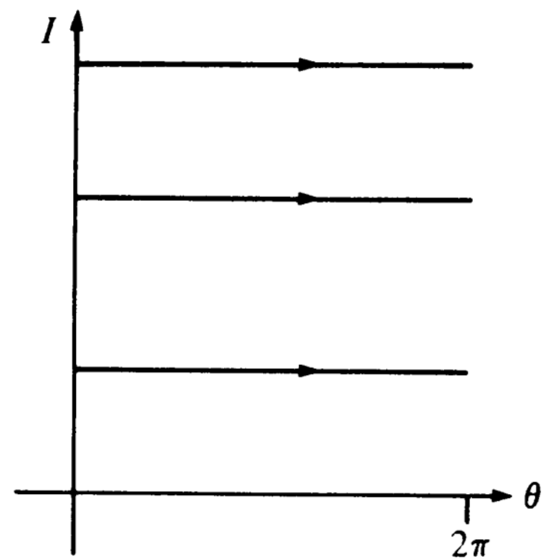
Exemplo (Percival 1989)

Dado o potencial: $V(q) = U \tan^2 \alpha q$



Espaços de Fase





Ponto de quilíbrio com E = 0

I (E) > O e I = 0 para E = 0

$$V(q) = U \tan^2 \alpha q \qquad\qquad p(q, E) = \pm\,[2m\,(E - V(q))]^{\frac{1}{2}}$$

A ação pode ser calculada por

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q\ [2m\,(E - U \tan^2 \alpha q)]^{\frac{1}{2}}$$

Sendo q_1 e q_2: $\tan^2 \alpha q_2 = E/U, \quad q_1 = -q_2$ (E = V)

Fazendo a integral, obtemos

$$\alpha I = [2m\,(E + U)]^{\frac{1}{2}} - [2m\,U]^{\frac{1}{2}}$$

Obtenção da Hamiltoniana H(I) e da frequência ω(I)

Fórmula obtida de I = I(E)

$$\alpha I = [2m(E+U)]^{\frac{1}{2}} - [2mU]^{\frac{1}{2}}$$

H = E

$$\Rightarrow \qquad H(\theta, I) = \alpha I\,[\alpha I + 2(2mU)^{\frac{1}{2}}]/2m$$

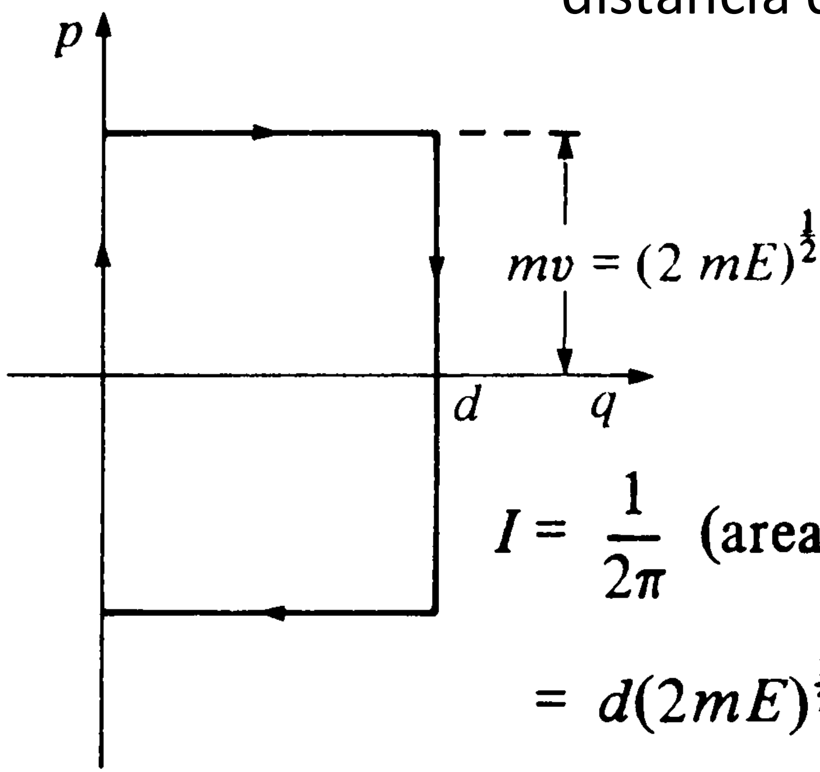
Frequência angular

$$\omega = \partial H/\partial I = \alpha[\alpha I + (2mU)^{\frac{1}{2}}]/m$$

$$= \alpha[2(E+U)/m]^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo

Trajetória
no espaço de fase



Bola de massa m, velocidade v, em colisões elásticas entre duas paredes separadas pela distância d

Cálculo da ação

$$I = \frac{1}{2\pi}\ (\text{area of rectangle}) = \frac{1}{2\pi} \times 2(2mE)^{\frac{1}{2}} \times d$$

$$= d(2mE)^{\frac{1}{2}}/\pi = mvd/\pi,$$

Hamiltoniana $\quad H(I) = E = (\pi I/d)^2/2m$

Essas equações podem ser integradas facilmente

$$\dot{I} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \mathrm{H} = \mathrm{H}\ (\mathrm{I}) \qquad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \text{constant} = \omega\ (\mathrm{I})$$

$$I = I_0 \qquad \theta = \omega(I)t + \delta, \quad \omega(I) = \partial H/\partial I$$

$\Delta\theta = \omega\ \Delta t$

$2\ \pi = \omega\ T$

$$\omega(I) = 2\pi/T = \partial H/\partial I$$

Obter as variáveis de ação e ângulo

Um procedimento para obter a ação e ângulo:

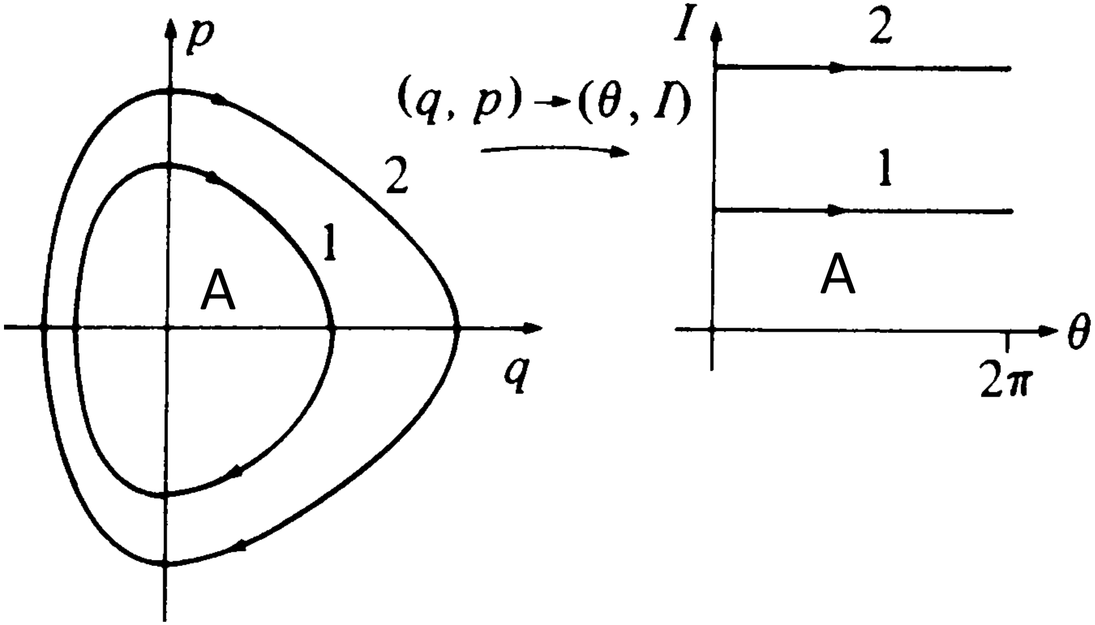
Obter a transformação canônica para a função geratriz conhecida S_2

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(I, q) \qquad \theta = \frac{\partial S_2}{\partial I}(I, q)$$

Com essas equações, dadas p, q calculamos I, θ

$$(q, p) \rightarrow (\theta, I)$$

Outro Procedimento:
Igualar áreas das trajetórias nos espaços de fase (q, p) e (θ, *I*)



θ aumenta de 2π em um período T
ω é a frequência

$$\omega(I) = 2\pi/T = \partial H/\partial I$$

Hamiltonina nas Variáveis de Ângulo e Ação

$$(q, p) \rightarrow (\theta, I)$$

Transformação canônica
Áreas descritas nos dois espaços de fase são iguais

No espaço de fase (q, p):

$$p(q, E) = \pm \left[2m\,(E - V(q))\right]^{\frac{1}{2}}$$

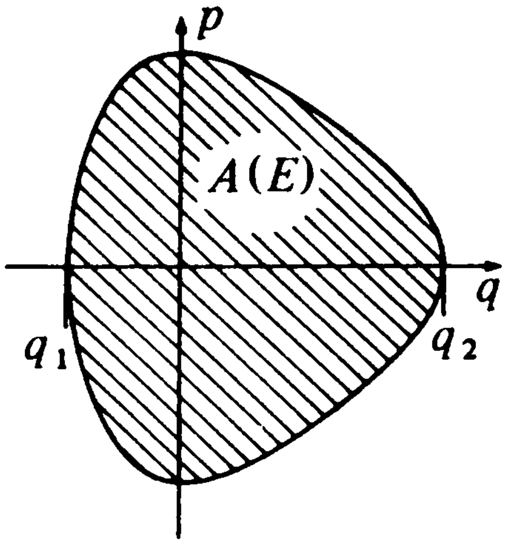
$$A(E) = \oint \mathrm{d}q\, p(q, E)$$

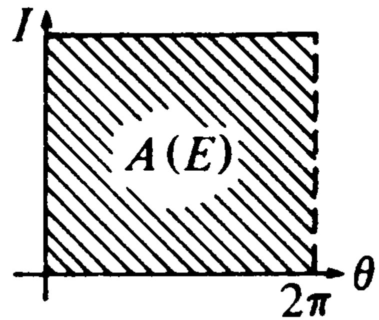
$$V(q_i) = E, \quad i = 1, 2$$

$$= 2 \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q\, \left[2m(E - V(q))\right]^{\frac{1}{2}}$$

No espaço de fase (θ, *I*):

$$A(E) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, I = 2\pi I$$





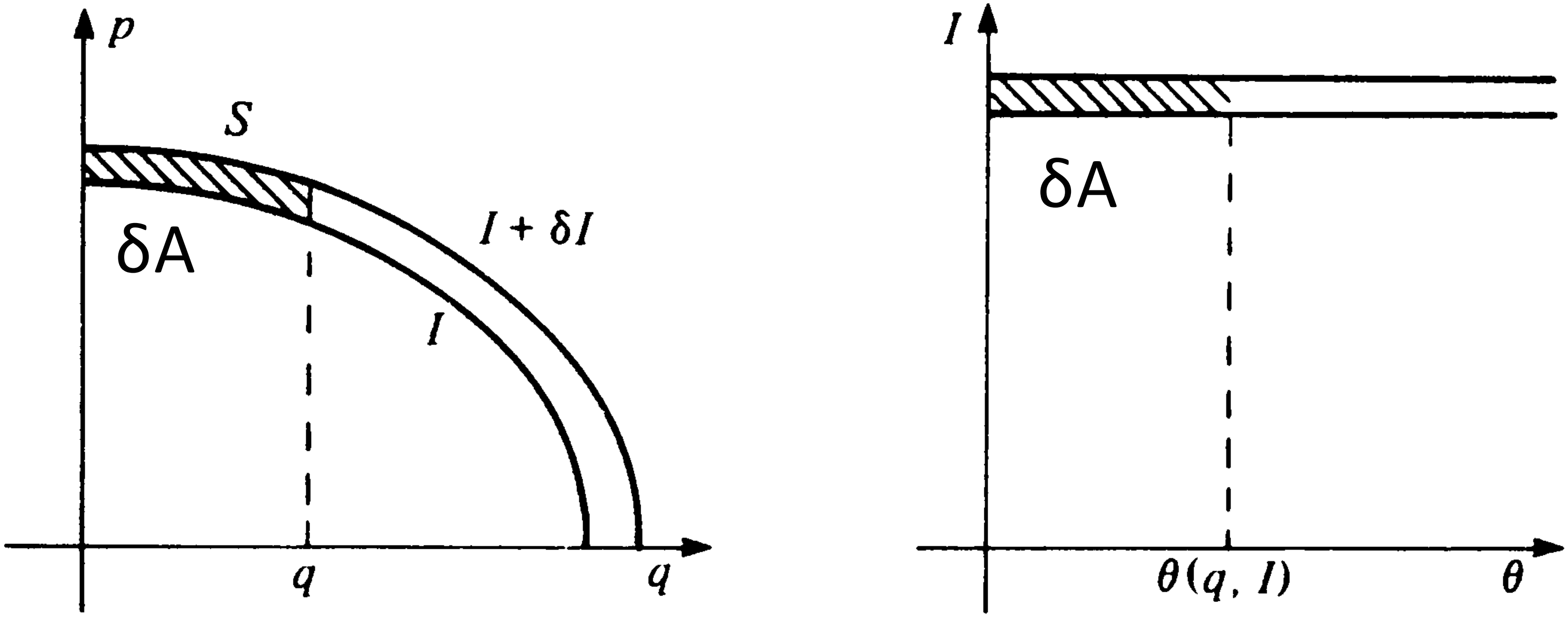
$$I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} \mathrm{d}q \, [2m\,(E - V(q))]^{\frac{1}{2}}$$

Invertendo essa equação, obtemos E (I)

A dimensão da ação I é a do momento angular ou da energia x tempo.
O ângulo é sem dimensão

Segundo procedimento para calcular o ângulo

As áreas δA assinaladas entre duas trajetórias, no percurso entre 0 e t, são iguais. Nesse percurso, as coordenadas variam de 0 a q e de 0 a θ.



No plano p x q a área δA é

$$\delta A = \iint_S \mathrm{d}q\, \mathrm{d}p$$

$$= \int_0^q \mathrm{d}q\, [p(q, I + \delta I) - p(q, I)]$$

$$= \delta I \int_0^q \mathrm{d}q\, \frac{\partial p}{\partial I}(q, I) + O(\delta I)^2,$$

$$p(q, E) = \pm\, [2m\,(E - V(q))]^{\frac{1}{2}}$$

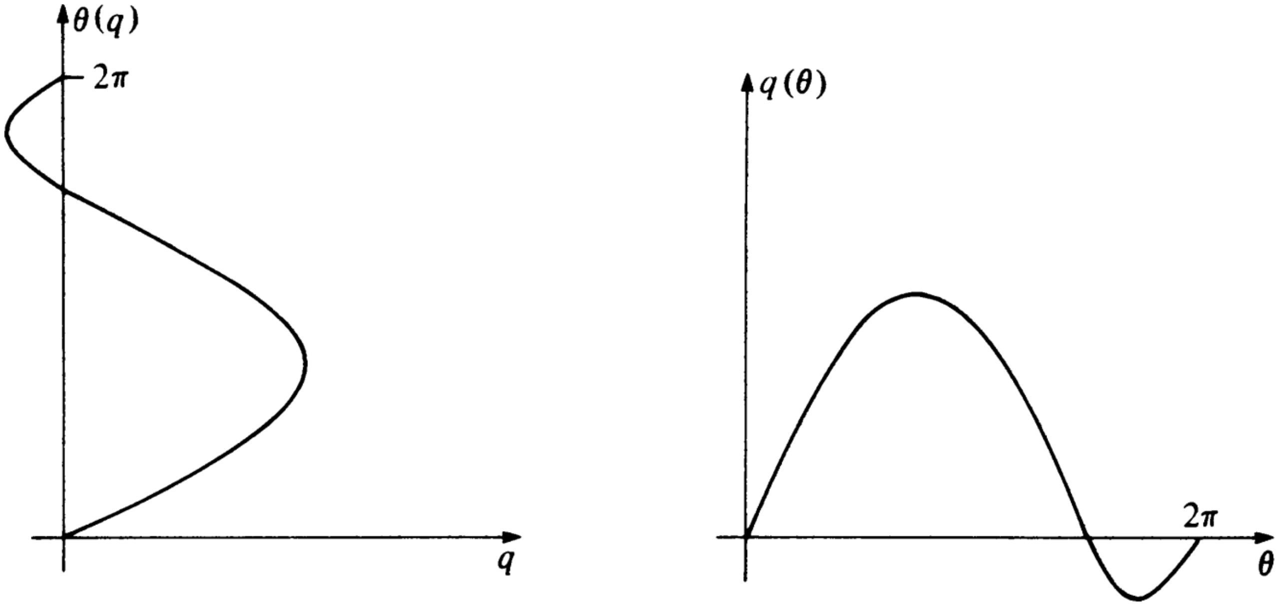
No plano *I* x θ a área δA é $\delta A = \delta I\, \theta(q, I)$

Igualando as duas expressões de δA
obtemos a fórmula a ser aplicada para calcular θ

$$\theta(q) = \int_0^q \mathrm{d}q \, \frac{\partial}{\partial I} p(q, I)$$

$$= \frac{\partial}{\partial I} \int_0^q \mathrm{d}q \, p(q, I)$$

Variações típicas das variáveis θ e q, para *I* fixa.



Exemplo do cálculo de θ

No potencial de um exemplo anterior $V(q) = U \tan^2 \alpha q$

Pela fórmula vista

$$\theta(q) = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^q \mathrm{d}q \, [2m\,(E(I) - U \tan^2 \alpha q)]^{\frac{1}{2}}$$

Integrando, obtem-se as relações entre q e θ:

$$\theta(q) = m \frac{dE}{dI} \int_0^q dq \, [2m(E - U \tan^2 \alpha q)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sin^{-1} \left[\left(\frac{E+U}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha q \right],$$

$$q(\theta) = \frac{1}{\alpha} \sin^{-1} \left[\left(\frac{E}{E+U} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \right]$$

Por outro lado, $\theta = \omega t + \delta \qquad \omega = dE/dI$

Função geradora para as variáveis de ângulo e ação

Transformação canônica $(q, p) \rightarrow (\theta, I)$

Função geradora $S_2(I, q), = \int_0^q \mathrm{d}q\, p(q, I)$

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(I, q). \qquad \theta = \frac{\partial S_2}{\partial I}(I, q)$$

Relações entre as variáveis
(vistas anteriormente)

pois $\theta(q) = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^q \mathrm{d}q\, p(q, I)$

Note que

$$\Delta S_2(I) = \oint \mathrm{d}q \; \frac{\partial S_2}{\partial q}$$

$$= \oint \mathrm{d}q \, p = 2\pi I.$$

Outra função geradora

$$S_1(\theta, q) = S_2(I, q) - \theta I$$

$$\theta = \partial S_2 / \partial I$$

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 - \Delta(I\theta)$$

$$= \Delta S_2 - I \Delta\theta = 0$$

Função periódica em θ

Encontrar I e θ e as geradoras $S_2(I, q)$ $S_1(\theta, q)$

$$H(q, p) = p^2/2m + \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-q_1}^{q_1} \mathrm{d}q \, [2m\,(E - \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2)]^{\frac{1}{2}} \qquad (m\omega^2 q_1^2 = 2E)$$

$$= E/\omega, \qquad H(I) = \omega I \qquad \partial H/\partial I = \omega$$

$$p = [2m\omega I - (m\omega q)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \int_0^q \mathrm{d}q \left[\frac{m\omega}{2I - m\omega q^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1} \left[q \left(\frac{m\omega}{2I} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

or

$$q = \left(\frac{2I}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta .$$

$$S_2(I, q) = \int_0^q \mathrm{d}q \, (2m\omega I - m^2\omega^2 q^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= I \sin^{-1} \left[q \left(\frac{m\omega}{2I} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} q \, (2Im\omega - m^2\omega^2 q^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_1(\theta, q) = \tfrac{1}{2} m\omega q^2 \cot\theta \quad \rightarrow \qquad p = \partial S_1 / \partial q = m\omega q \cot\theta$$

$$= (2Im\omega)^{\frac{1}{2}} \cos\theta$$

Dois Graus de Liberdade

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \, dq_i \qquad \theta_i = \omega_i t + \beta_i \qquad J_i = J_{0i}$$

$$\Omega_i = 2\pi/T_i$$

Mapeamento do Sistema Hamiltoniano

Sistema Integrável

$$H(J_1, J_2) = E$$

E: cte. de movimento

$$J_1 = J_1^0$$

$$J_2 = J_2^0$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^0 + \omega_1 t$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_2^0 + \omega_2 t$$

$$\alpha \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta\vartheta_1/\Delta t}{\Delta\vartheta_2/\Delta t} = \frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta\vartheta_2}$$

Se $\alpha = \frac{s}{r}$ r,s inteiros (primos)

$\Rightarrow$ órbitas periódicas, s(r) voltas em θ_1 (θ_2)

Se $\alpha \neq \frac{s}{r}$

$\Rightarrow$ órbitas quase-periódicas

r = 1

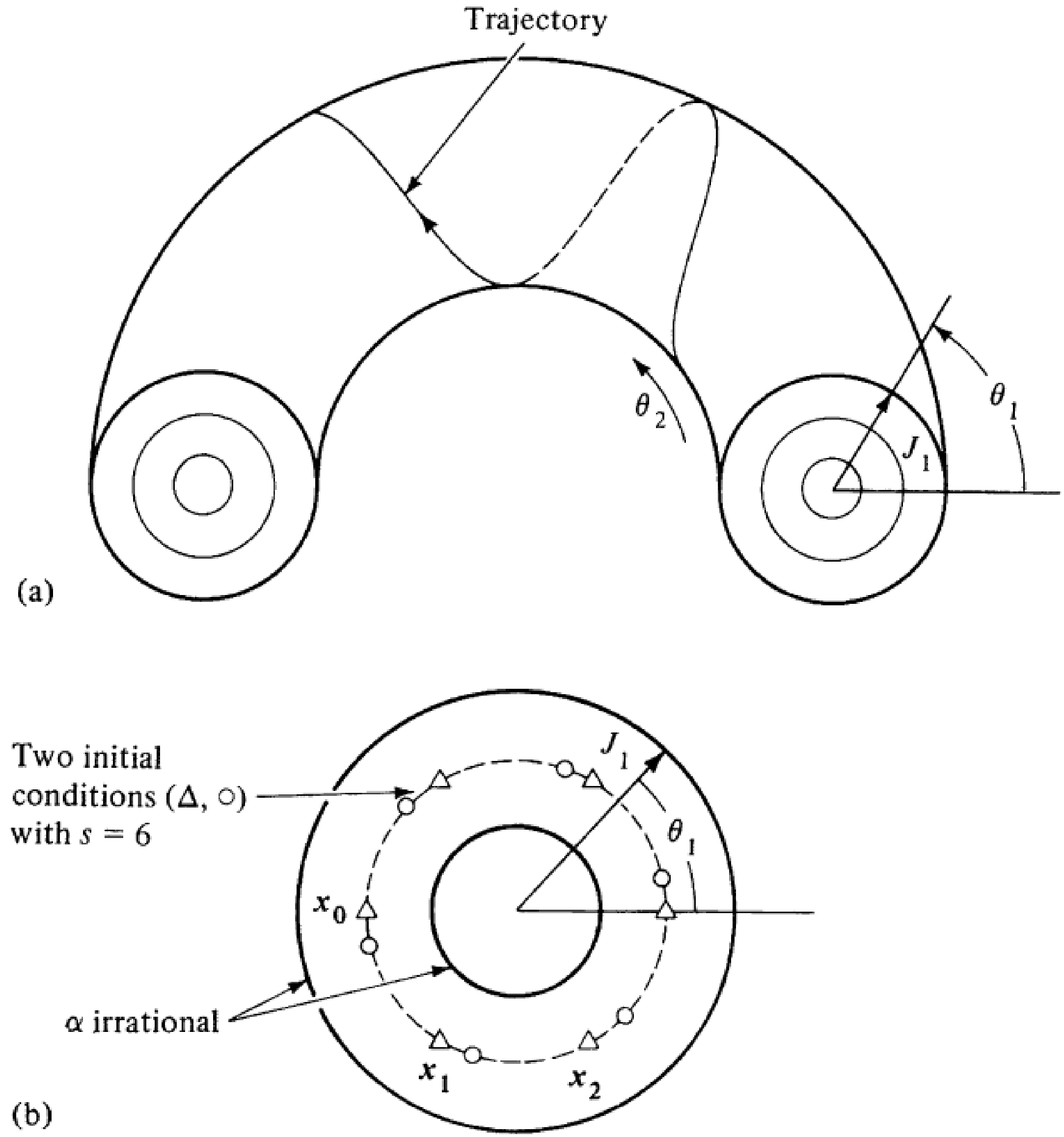


Figure 3.1. Motion of a phase space point for an integrable system with two degrees of freedom. (a) The motion lies on a torus $J_1 = \text{const.}$, $J_2 = \text{const.}$ (b) Illustrating trajectory intersections with a surface of section $\theta_2 = \text{const.}$ after a large number of such intersections.

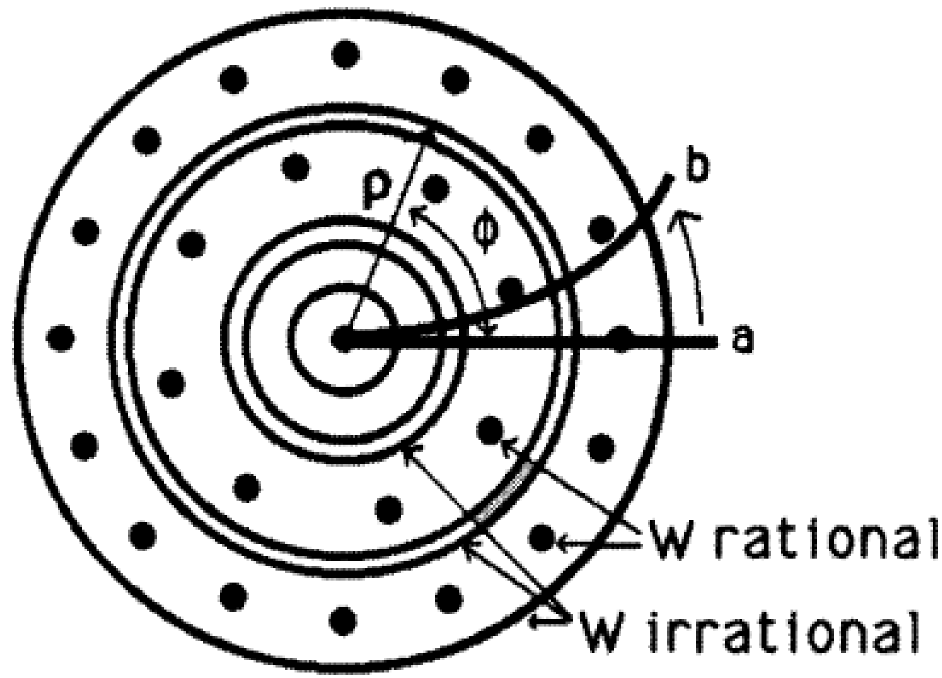
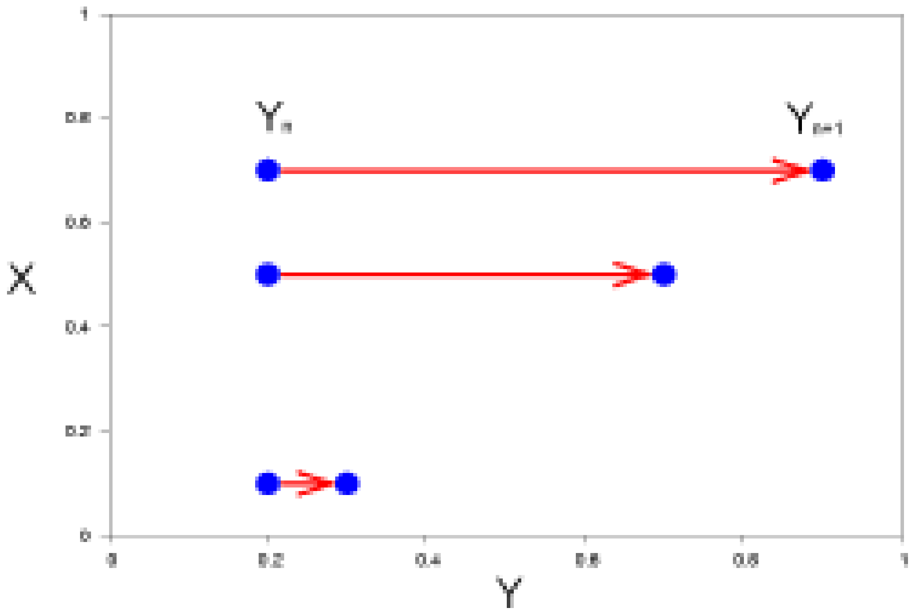


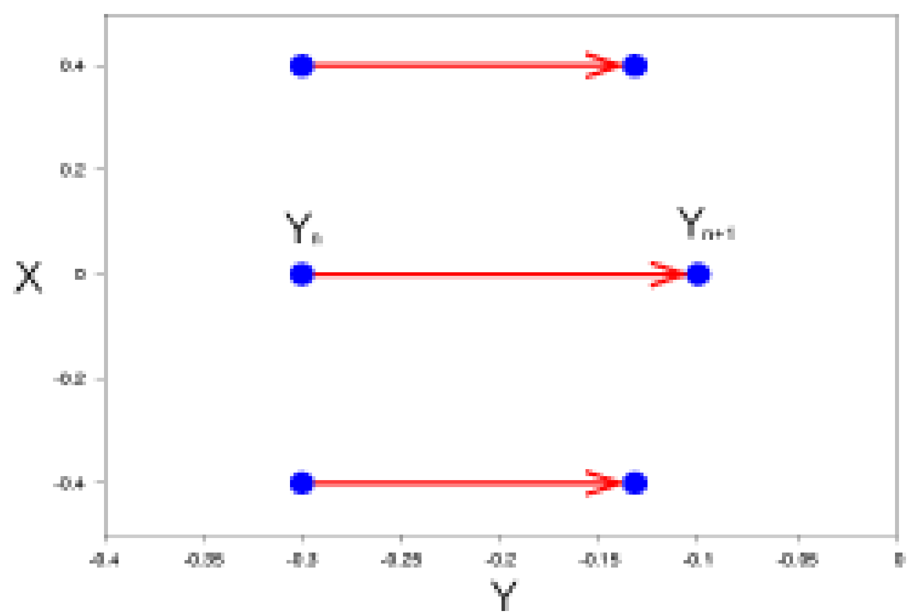
Figure 3.2.1. For integrable systems, the twist map consists of trajectories that densely fill a circle (irrational winding number w) and discrete, periodic points (rational winding number w). The rate at which a trajectory completes one revolution of the circle depends on the radius. Thus an initial line of points, a, becomes twisted, b, by the map.

Evolução de Y

Twist



Não-*twist*



Como pode ser notado, a evolução para Y é diferente de acordo com o tipo de mapa, *twist* ou não-*twist*, sendo monotonicamente crescente para o primeiro e não-monotônica para o segundo.

Mapas Twist

Mapa de Poincaré: Intersecções das trajetórias no plano $J_1 \times \theta_1$ (θ_2=cte., $J_2 > 0$)

Duas intersecções sucesivas $\Rightarrow$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2} \qquad \Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t = 2\pi\,\alpha$$

$\alpha = \alpha(J_1)$ pois, para E=cte., $J_2 = J_2(E, J_1)$

$$J_{n+1} = J_n,$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})$$

Mapas (twist e não twist) são conservativos

$$\boldsymbol{J}_{n+1} = \boldsymbol{J}_n,$$

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + 2\pi\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J}_{n+1})$$

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} \equiv [\theta_{n+1}, J_{n+1}] = 1$$

Mapa Canônico para Sistema Hamiltoniano

Sistema Quase Integrável $H(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\boldsymbol{J}) + \epsilon H_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$

Amplitude da perturbação $\varepsilon \sim 0$

Mapa de Poincaré: Intersecções das trajetórias no plano $J_1 \times \theta_1$ $(\theta_2 = \text{cte.}, J_2 > 0)$

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \theta_n),$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \theta_n)$$

Funções f, g periódicas em θ