

7. Teoria da Perturbação Canônica

PGF 5005 - Mecânica Clássica

web.if.usp.br/controle

(Referências principais: Percival 1989, Reichl, 1992)

IFUSP

2025

Hamiltoniana Integrável / Um Grau de Liberdade (I. Percival, Cap. 8)

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \epsilon H_1(q, p) \quad (|\epsilon| \ll 1)$$

Problema: conhecidas as soluções para $\epsilon = 0$, obter de forma aproximada as soluções perturbadas, isto é, as soluções para $\epsilon \neq 0$.

Conhecidas soluções para $H_0(J)$

$$H = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J) = H(I)$$

ϕ, J : variáveis de ângulo e ação de H_0 , mas não de H
 θ, I : variáveis de ângulo e ação de H , mas não de H_0 .

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(\phi, J) = H(I)$$

Para $H = H_0(J)$ as soluções são: $J = J_0$ e $\phi = \omega(J)t + \phi_0$

Para $H = H(I)$ as soluções são: $I = I_0$ e $\theta = \Omega(I)t + \theta_0$

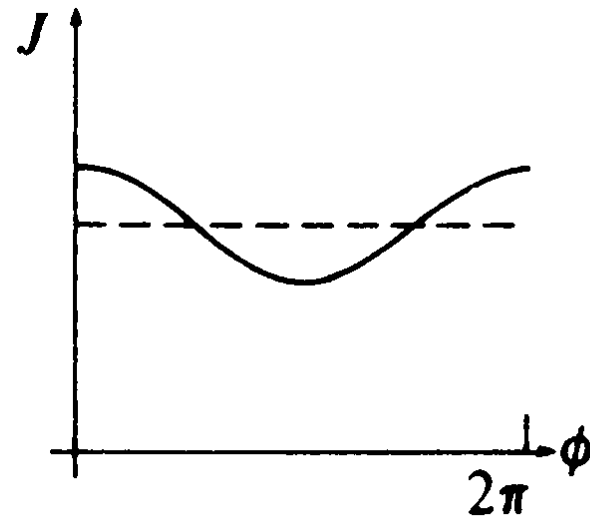
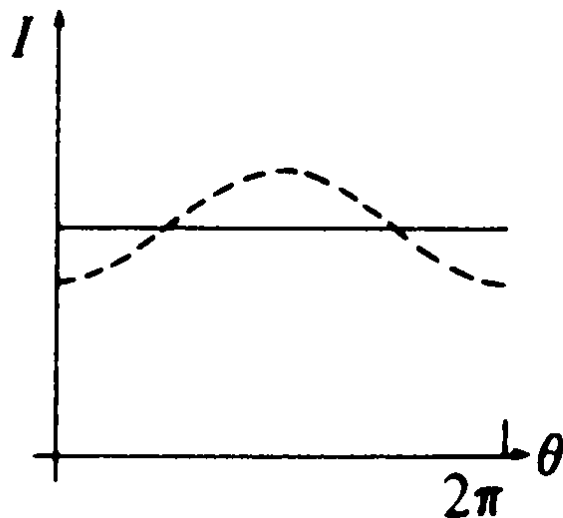
Problema:

Conhecidas as soluções de $H_0(J)$, e a evolução das variáveis ϕ, J , obter as soluções de $H(I)$ e as variáveis θ, I .

Isso será feito pela teoria de perturbação canônica

Sistema não perturbado , $\varepsilon = 0$, $H = H_0 (J)$

Sistema perturbado , $\varepsilon \neq 0$, $H = H_0 (I)$



- - - trajetória (não perturbada) de H_0
___ trajetória (perturbada) de H

Antigas variáveis ϕ, J escritas em função das novas θ, I
Transformação Canônica

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \epsilon \phi^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$J = J^{(0)}(\theta, I) + \epsilon J^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2),$$

Nesse caso $I = I_0$ e $\theta = \Omega(I) t + \theta_0$

$$\epsilon = 0, \theta = \phi \text{ and } I = J \rightarrow \phi^{(0)}(\theta, I) = \theta \quad J^{(0)}(\theta, I) = I$$

Falta calcular os coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

Ângulos ϕ, θ com períodos 2π

Funções periódicas em θ , com período 2π $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

Valor médio, no intervalo de 0 a 2π , é nulo $\phi^{(1)}$

Transformação Canônica

$$(\phi, J) \rightarrow (\theta, I)$$

$$[\phi, J] = \frac{\partial(\phi, J)}{\partial(\theta, I)} = 1$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi J(\phi)$$

Áreas iguais no espaços de fase

Hamiltoniana perturbada $K = H$

$$H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J) \quad \text{Variáveis } \phi, J$$

$$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2) \quad \text{Variáveis } \theta, I$$

$$K = H$$

$$K(I) = H_0(I + \epsilon J^{(1)}) + \epsilon H_1(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$= H_0(I) + \epsilon \left[J^{(1)} \frac{\partial H_0}{\partial I} + H_1(\theta, I) \right] + O(\epsilon^2)$$

$$K_0(I) = H_0(I),$$

$$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 + \epsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} \right) (I + \epsilon J^{(1)}) + O(\epsilon^2) \\
 &= I + \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)} + O(\epsilon^2),
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} \text{ é periódica } \Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta J^{(1)}(\theta, I) = 0$$

$$K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + \dot{H}_1(\theta, I) \text{ Integrando em } \theta \Rightarrow$$

$$K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta H_1(\theta, I)$$

Conhecendo $H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$

Obtemos $K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$

$$K_0(I) = H_0(I)$$

$$K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta H_1(\theta, I)$$

Calculo dos coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

De $K_1(I) = J^{(1)}(\theta, I) \frac{\partial H_0}{\partial I}(I) + H_1(\theta, I)$

obtemos $J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \quad \omega_0 = \partial H_0 / \partial I$

$$[\phi, J] = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = - \frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Considerando nula a média da função $\phi^{(1)}$

Conhecendo $H(\phi, J) = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$

Obtemos $K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$

$$K_0(I) = H_0(I) \quad K_1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta H_1(\theta, I)$$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \quad \omega_0 = \partial H_0 / \partial I$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = - \frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Transformação Canônica

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \epsilon \phi^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2)$$

$$J = J^{(0)}(\theta, I) + \epsilon J^{(1)}(\theta, I) + O(\epsilon^2),$$

$$\phi^{(0)}(\theta, I) = \theta \quad J^{(0)}(\theta, I) = I$$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)}$$

$$\omega_0 = \partial H_0 / \partial I$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = - \frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

Exemplo: Pêndulo vertical em **alta rotação**

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \alpha^2 \cos \psi \quad \varepsilon = 1, \quad \alpha \approx 0$$

$$\frac{1}{2} p^2 \gg \alpha^2 \quad \phi = \psi, \quad J = p$$

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2 \quad H_1 = -\alpha^2 \cos \psi$$

$$K_0(I) = \frac{1}{2} I^2$$

$$K_1(I) = -\frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0$$

$$K = K_0(I)$$

Transformação Canônica

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \quad \omega_0 = \partial H_0 / \partial I = 1$$

$$J^{(1)} = \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = - \frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I^2} \quad \Rightarrow \quad \phi^{(1)} = \frac{\alpha^2 \sin \theta}{I^2}$$

$$K(I) = \frac{1}{2} I^2 + O(\alpha^4)$$

$$\phi = \psi = \theta + \frac{\alpha^2 \sin \theta}{I^2} + O(\alpha^4)$$

$$J = p = I + \frac{\alpha^2 \cos \theta}{I} + O(\alpha^4)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} = I, \quad \theta = It + \delta \quad I = I_0$$

Evolução das variáveis
de ângulo e ação

$$\psi = It + \delta + \frac{\alpha^2 \sin (It + \delta)}{I^2} + O(\alpha^4),$$

Evolução temporal
das variáveis originais

$$p = I + \frac{\alpha^2 \cos (It + \delta)}{I} + O(\alpha^4).$$

Pêndulo Vertical / Oscilação com Amplitude Pequena

Hamiltoniana completa $H(\psi, p) = \frac{1}{2} p^2 - \alpha^2 \cos \psi$

Para aplicar a teoria da perturbação $\epsilon = 1$ $\alpha \approx 0$

Hamiltoniana aproximada

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \alpha^2 \psi^2) - \frac{1}{24} \epsilon \alpha^2 \psi^4 + O(\epsilon^2)$$

$$H_0(\psi, p) = \frac{1}{2} (p^2 + \alpha^2 \psi^2) \quad H_1 = -\frac{1}{24} \alpha^2 \psi^4 + O(\psi^6)$$

Obter variáveis de ângulo e ação ϕ, J de H_0

Vamos mudar de ϕ, J para θ, I $H(\phi, J) = K(I)$

Variáveis de ângulo e ação de H_0 vistas anteriormente
(oscilador harmônico)

Transformação canônica: $\psi = \left(\frac{2J}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \phi, \quad p = (2\alpha J)^{\frac{1}{2}} \cos \phi$

$$H(\phi, J) = \alpha J - \frac{1}{6} \epsilon J^2 \sin^4 \phi = H_0(J) + \epsilon H_1(\phi, J)$$

$$K_0(I) = \alpha I$$

$$K_1(I) = -\frac{1}{6} I^2 \int_0^{2\pi} d\theta \sin^4 \theta = -\frac{1}{16} I^2$$

$$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + O(\epsilon^2)$$

Cálculo da frequência Ω do movimento perturbado

$$K(I) = \alpha I - \frac{1}{16} \epsilon I^2 + O(\epsilon^2),$$

$$\Omega = \partial K / \partial I = \alpha - \frac{1}{8} \epsilon I + O(\epsilon^2)$$

Cálculo dos coeficientes $\phi^{(1)}, J^{(1)}$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \quad \rightarrow$$

$$J^{(1)} = -\frac{I^2}{\alpha} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6} \sin^4 \theta \right)$$

$$= -\frac{I^2}{12\alpha} (\cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta)$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I} \quad \rightarrow \quad \phi^{(1)} = \frac{I}{12\alpha} (\sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta),$$

Relações entre ϕ , J e θ , I

$$\phi = \theta + \frac{\epsilon I}{12\alpha} [\sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta] + O(\epsilon^2)$$

$$J = I - \frac{\epsilon I^2}{12\alpha} [\cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta] + O(\epsilon^2)$$

$$\theta = \Omega t + \delta$$

Soluções em termos das variáveis originais

$$\psi = \left(\frac{2J}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \phi, \quad p = (2\alpha J)^{\frac{1}{2}} \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \psi = & \left(\frac{2I}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\epsilon I}{12\alpha} (\cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 4\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \sin \left[\theta + \frac{\epsilon I}{12\alpha} (\sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta) \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Expandindo as funções até ordem ϵ :

$$\psi = \left(\frac{2I}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin \theta + \frac{\epsilon I}{48\alpha} (3 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta) \right]$$

$$p = (2\alpha I)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \theta - \frac{\epsilon I}{32\alpha} (2 \cos \theta - 3 \cos 3\theta) \right]$$

Teoria da Perturbação (Lowenstein, Cap. 4)

$$K = E(J) = J - \frac{1}{16}\epsilon J^2 \qquad \omega(E) = \frac{dE}{dJ}(J(E))$$

ω com correção de primeira ordem (n=1) $\qquad \omega(E) = 1 - \frac{1}{8}E$

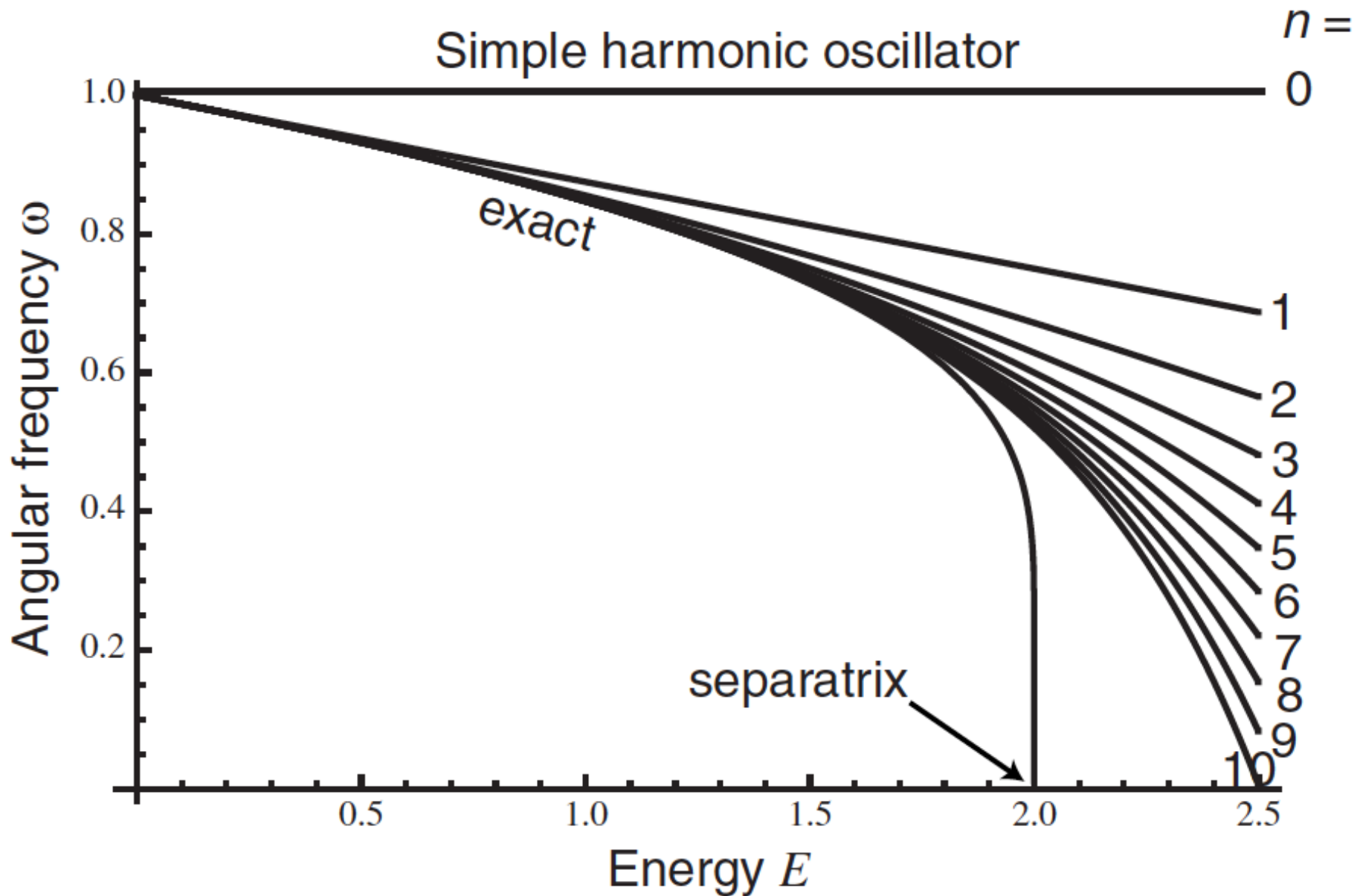
Resultado exato (Lowenstein, Cap. 4)

$$\omega(E) = \frac{\pi}{2}K(E/2)$$

Ordem n

$$\begin{aligned}
 E(J) = & J - \frac{1}{16}\epsilon J^2 - \frac{1}{256}\epsilon^2 J^3 - \frac{5}{8192}\epsilon^3 J^4 - \frac{33}{262\,144}\epsilon^4 J^5 - \frac{63}{2\,097\,152}\epsilon^5 J^6 \\
 & - \frac{527}{67\,108\,864}\epsilon^6 J^7 - \frac{9387}{4\,294\,967\,296}\epsilon^7 J^8 - \frac{175\,045}{274\,877\,906\,944}\epsilon^8 J^9 \\
 & - \frac{422\,565}{2\,199\,023\,255\,552}\epsilon^9 J^{10} - \frac{4\,194\,753}{70\,368\,744\,177\,664}\epsilon^{10} J^{11}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 \omega(E) = & 1 - \frac{1}{8}E - \frac{5}{256}E^2 - \frac{11}{2048}E^3 - \frac{469}{262\,144}E^4 - \frac{1379}{2\,097\,152}E^5 \\
 & - \frac{17\,223}{67\,108\,864}E^6 - \frac{56\,001}{4\,294\,967\,296}E^7 - \frac{11\,998\,869}{274\,877\,906\,944}E^8 \\
 & - \frac{41\,064\,827}{2\,199\,023\,255\,552}E^9 - \frac{571\,915\,951}{70\,368\,744\,177\,664}E^{10}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$



Dois Graus de Liberdade (L. Reichl, Cap. 2)

Hamiltoniana Integrável

$$H_0(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0(J_1, J_2)$$

Variáveis de ângulo e ação $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$

Perturbação

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon V(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \quad \epsilon \ll 1$$

Soluções são periódicas; expandindo em série de Fourier:

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$$

Antigas variáveis de ângulo e ação de H_0 $(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$

Novas variáveis de ângulo e ação de H $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2)$

Função geratriz da Transformação Canônica

$$G(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \theta_1, \theta_2) = \mathcal{J}_1 \theta_1 + \mathcal{J}_2 \theta_2 + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \sin(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$$

Vamos determinar g_{n_1, n_2}

4 relações entre as antigas e as novas variáveis

$$J_i = \frac{\partial G}{\partial \theta_i} = \mathcal{J}_i + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} n_i g_{n_1, n_2} \cos(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$$

$$\Theta_i = \frac{\partial G}{\partial \mathcal{J}_i} = \theta_i + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_{n_1, n_2}}{\partial \mathcal{J}_i} \sin(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$$

Substituimos θ_i e J_i na equação a seguir

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)$$

$$\begin{aligned}
& H'(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2) \\
&= H'_0(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} (n_1\omega_1 + n_2\omega_2) g_{n_1, n_2} \cos(n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2) \\
&+ \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \cos(n_1\Theta_1 + n_2\Theta_2) + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\omega_i = \frac{\partial H'_o}{\partial \mathcal{J}_i} \qquad \text{Escolhendo} \qquad g_{n_1, n_2} = -\frac{V_{n_1, n_2}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}$$

$$\text{obtemos} \qquad H'(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \Theta_1, \Theta_2) = H'_o(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) + O(\epsilon^2)$$

As novas ações podem ser obtidas de

$$J_i = \mathcal{J}_i - \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{n_i V_{n_1, n_2} \cos(n_1 \Theta_1 + n_2 \Theta_2)}{(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)} + O(\epsilon^2)$$

A transformação encontrada
para as variáveis existe se

$$|n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2| \gg \epsilon V_{n_1, n_2}$$

A geratriz diverge se a órbita estiver na
região de ressonância no espaço de fase

Resultado de validade geral, comum em vários sistemas!