# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

2023

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas separáveis**

$$H = H(q,p,t) = K(p) + U(q)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p} = q^{(n)} + \Delta t \left. \frac{\partial K(p)}{\partial p} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q} = p^{(n)} - \Delta t \left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + f(p^{(n)})\Delta t$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - g(q^{(n+1)})\Delta t$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - g(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$\boxed{q^{(n+1)} = q^{(n)} + f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - g(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**
  - Como determinar $q^{(n+1)}$ ?

**Método de Newton - Rhapson**

$$g(x) = 0$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**
  - Como determinar $q^{(n+1)}$ ?

**Método de Newton - Rhapson**

$$H = H(q, p, t)$$

$$\boxed{q^{(n+1)} = q^{(n)} + f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - g(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$g(x) = 0 \qquad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}} \qquad g'(x) = \frac{dg}{dx}$$

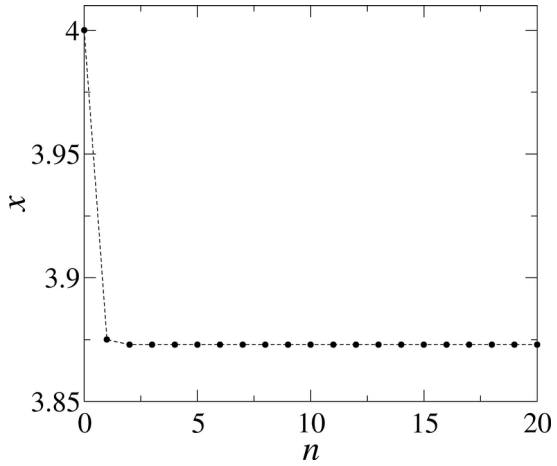
$$\boxed{g = q^{(n+1)} - q^{(n)} - f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 1**

$$\sqrt{15} = ?$$

$$x^2 = 15 \Rightarrow g(x) = x^2 - 15 = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

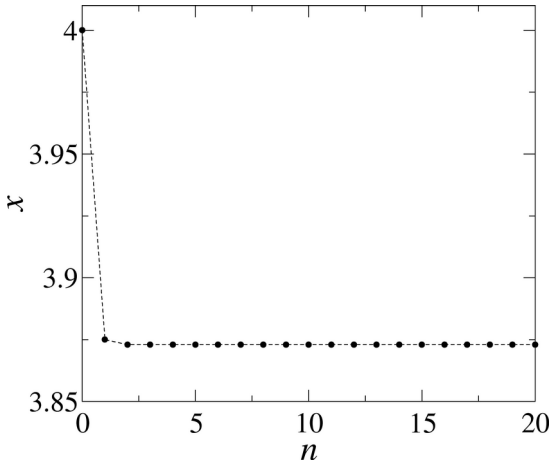


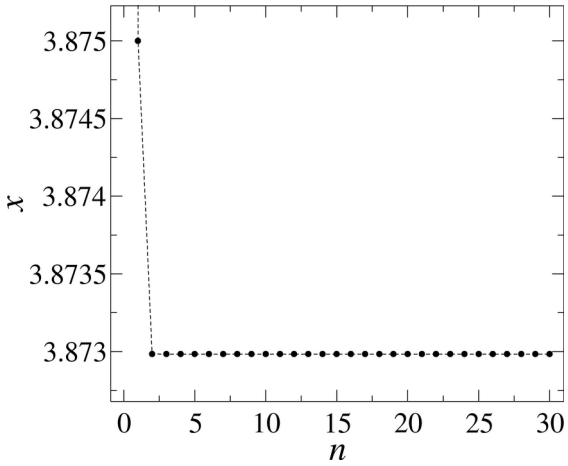
# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 1**

$$\sqrt{15} = ?$$

$$x^2 = 15 \Rightarrow g(x) = x^2 - 15 = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$



- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 1 \\ x - y^2 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} g_1 &= x^2 - y - 1 = 0 \\ g_2 &= x - y^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -g(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$Aq = b$$

$$\boxed{A\mathbf{q} = \mathbf{b}}$$

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x^2 - y = 1 \qquad\qquad g_1 = x^2 - y - 1 = 0$$
$$x - y^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad g_2 = x - y^2 + 1 = 0$$

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

**Decomposição *LU***

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_N)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_N)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A = L\ U$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A = L\ U$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Lx = b} \qquad \boxed{Uq = x}$$

$$LUq = Aq = b$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A = L\ U \qquad Lx = b \qquad Uq = x$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

$$x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} x_k$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}} \left( x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk} q_k \right)}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A = L\ U \qquad Lx = b \qquad Uq = x$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

$$x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} x_k$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}} \left( x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk} q_k \right)}$$

$$Aq = b$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 1 \\ x - y^2 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} g_1 &= x^2 - y - 1 = 0 \\ g_2 &= x - y^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad \xrightarrow{\text{A = Matriz das derivadas}} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$g(x_n) = (x_n - x_{n+1})g'(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b = Aq}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -g(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Aq = b} \Rightarrow b = -g(x_n)$$

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

$$A = L\ U \Rightarrow \mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$b_i = -g_i(x_n, y_n)$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 1 \\ x - y^2 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = L\,U \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u_{11} = 2x} \qquad \boxed{u_{12} = -1} \qquad \boxed{l_{21} = \frac{1}{u_{11}}} \qquad \boxed{u_{22} = -2y - l_{21}u_{12}}$$

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\boxed{u_{11} = 2x} \qquad \boxed{u_{12} = -1} \qquad \boxed{l_{21} = \frac{1}{u_{11}}} \qquad \boxed{u_{22} = -2y - l_{21}u_{12}}$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk}q_k\right)}$$

$$q_1 = \frac{x_1 - u_{12}q_2}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{x_{22}}{u_{22}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\boxed{u_{11} = 2x}$$

$$\boxed{u_{12} = -1}$$

$$\boxed{l_{21} = \frac{1}{u_{11}}}$$

$$\boxed{u_{22} = -2y - l_{21}u_{12}}$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk}q_k\right)}$$

$$\boxed{x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}x_k}$$

$$q_1 = \frac{x_1 - u_{12}q_2}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{x_{22}}{u_{22}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$\boxed{u_{11} = 2x} \qquad \boxed{u_{12} = -1} \qquad \boxed{l_{21} = \frac{1}{u_{11}}} \qquad \boxed{u_{22} = -2y - l_{21}u_{12}}$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk}q_k\right)} \qquad \boxed{x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}x_k}$$

$$q_1 = \frac{b_1 - u_{12}q_2}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{b_2 - l_{21}b_1}{u_{22}}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$q_1 = \frac{b_1 - u_{12}q_2}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{b_2 - l_{21}b_1}{u_{22}}$$

$$u_{11} = 2x \qquad u_{12} = -1 \qquad l_{21} = \frac{1}{2x} \qquad u_{22} = -2y + \frac{1}{2x}$$

$$b_1 = g_1(x, y)$$
$$b_2 = g_2(x, y)$$

$$\boxed{q_1 = \frac{-g_1(x_n, y_n) + q_2}{2x_n}} \qquad \boxed{q_2 = \frac{-g_2(x_n, y_n) + g_1(x_n, y_n)/2x_n}{-2y_n + 1/2x_n}}$$

$$g(x_n) = (x_n - x_{n+1})g'(x_n) \qquad q_1 = x_{n+1} - x_n \qquad q_2 = y_{n+1} - y_n$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$q_1 = x_{n+1} - x_n \qquad \Rightarrow \qquad x_{n+1} = x_n + q_1$$
$$q_2 = y_{n+1} - y_n \qquad\qquad\qquad y_{n+1} = y_n + q_2$$

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$\Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g_1(x_n, y_n) + q_2}{2x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g_1(x_n, y_n) - 2x_n g_2(x_n, y_n)}{1 - 2y_n x_n}$$

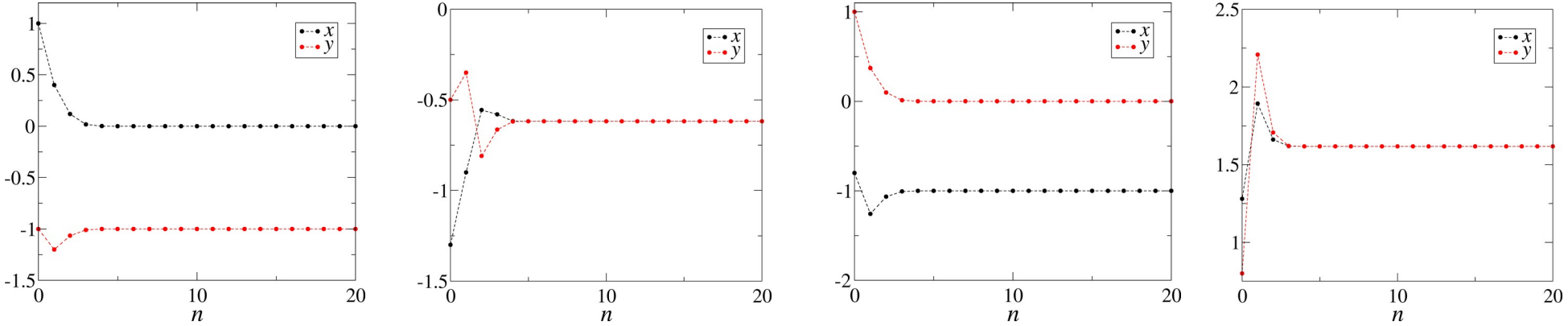
# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g_1(x_n, y_n) + q_2}{2x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g_1(x_n, y_n) - 2x_n g_2(x_n, y_n)}{1 - 2y_n x_n}$$



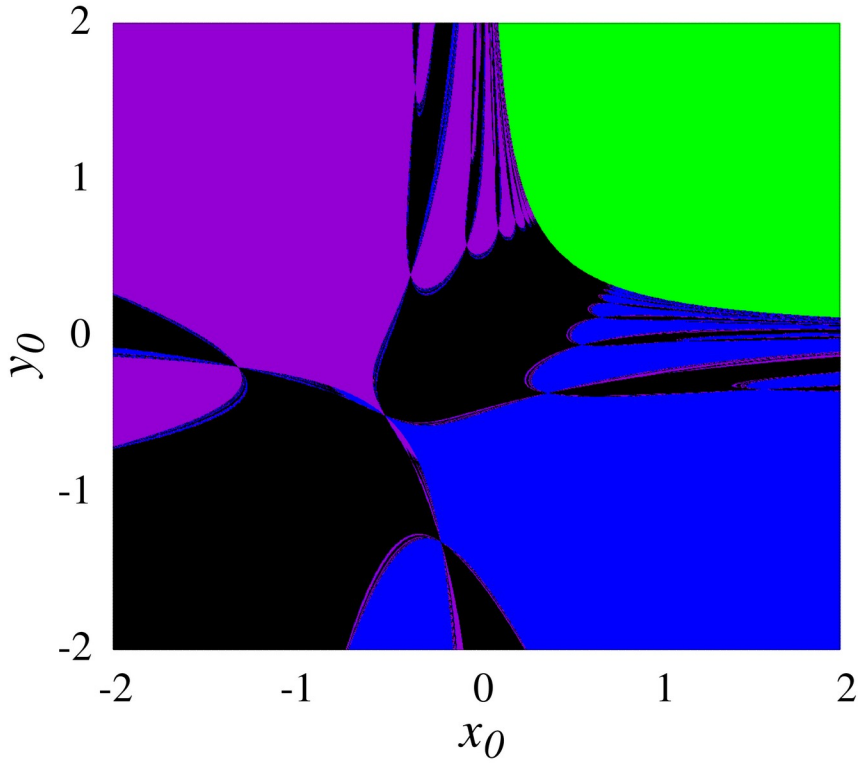
# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g_1(x_n, y_n) + q_2}{2x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g_1(x_n, y_n) - 2x_n g_2(x_n, y_n)}{1 - 2y_n x_n}$$



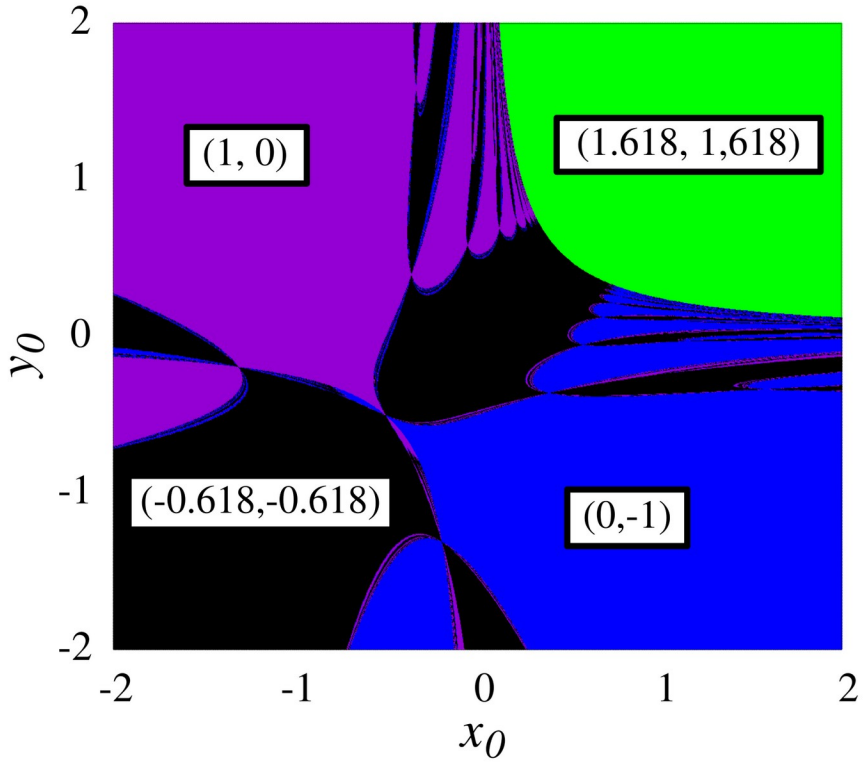
# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton – Rhapson – Exemplo 2**

$$x^2 - y = 1$$
$$x - y^2 = -1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g_1(x_n, y_n) + q_2}{2x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{g_1(x_n, y_n) - 2x_n g_2(x_n, y_n)}{1 - 2y_n x_n}$$



# Hamiltoniana de Walker-Ford

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2$$

$$H_1 = \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = 1 - 2J_1 - 3J_2 + \alpha J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{J}_1 = 2\alpha J_1 J_2 \sin(2\phi_1 - 2\phi_2) + 2\beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{\phi}_2 = 1 - 3J_1 + 2J_2 + \alpha J_1 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \dfrac{3}{2}\beta J_1 J_2^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{J}_2 = -2\alpha J_1 J_2 \sin(2\phi_1 - 2\phi_2) - 32\beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1 - 3\phi_2) \end{cases}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

$$\begin{cases}
\phi_1^{(n+1)} = \phi_1^{(n)} + \Delta t \left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \beta (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\
J_1^{(n+1)} = J_1^{(n)} + \Delta t \left[2\alpha J_1^{(n)} J_2^{(n)} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + 2\beta J_1^{(n)} (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right. \\
\phi_2^{(n+1)} = \phi_2^{(n)} + \Delta t \left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} + \alpha J_1^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \frac{3}{2}\beta J_1^{n} (J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\
J_2^{(n+1)} = J_2^{(n)} - \Delta t \left[2\alpha J_1^{(n)} J_2^{(n)} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + 3\beta J_1^{(n)} (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right.
\end{cases}$$

# Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\begin{cases} \phi_1^{(n+1)} = \phi_1^{(n)} + \Delta t \left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \beta (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\ \phi_2^{(n+1)} = \phi_2^{(n)} + \Delta t \left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} + \alpha J_1^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \frac{3}{2}\beta J_1^{n} (J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \end{cases}$$

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,m+1)}\right) q^{(n+1,m+1)} = J\left(q^{(n+1,m)}\right) q^{(n+1,m)} - g\left(q^{(n+1,m)}\right)}$$