Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

2023

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

$$H = H(q, p, t)$$

$$\boxed{q^{(n+1)} = q^{(n)} + f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t}$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - g(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2, t)$$

$$\boxed{q_i^{(n+1)} = q_i^{(n)} + f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t}$$

$$p_i^{(n+1)} = p_i^{(n)} - g(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2, t)$$

$$\begin{cases} q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} + f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t \\ q_2^{(n+1)} = q_2^{(n)} + f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t \end{cases}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$\boxed{A\mathbf{q} = \mathbf{b}}$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_N)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_N)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$A = L\ U$$

$$\mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q_j = \frac{1}{u_{jj}}\left(x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk} q_k\right)}$$

$$\boxed{x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} x_k}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} + f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$q_2^{(n+1)} = q_2^{(n)} + f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A\mathbf{q} = \mathbf{b}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} + f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$q_2^{(n+1)} = q_2^{(n)} + f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$q_1^{(n+1)} = q_1^{(n)} + f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$q_2^{(n+1)} = q_2^{(n)} + f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$g_1 = q_1^{(n+1)} - q_1^{(n)} - f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

$$g_2 = q_2^{(n+1)} - q_2^{(n)} - f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Sistemas não separáveis**

<u>Dois graus de liberdade</u>

$$g_1 = q_1^{(n+1)} - q_1^{(n)} - f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

$$g_2 = q_2^{(n+1)} - q_2^{(n)} - f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

$$\Rightarrow \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton para duas variáveis**

$$g = q^{(n+1)} - q^{(n)} - f(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

<u>Expandindo em Série de Taylor</u>

$$g \approx g\left(q^{(n+1,0)}\right) + J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}\right) = 0$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton para duas variáveis**

$$g \approx g\left(q^{(n+1,0)}\right) + J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}\right) = 0$$

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}\right) = -g\left(q^{(n+1,0)}\right)}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton para duas variáveis**

$$g \approx g\left(q^{(n+1,0)}\right) + J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}\right) = 0$$

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}\right) = -g\left(q^{(n+1,0)}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A\mathbf{q} = \mathbf{b}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton para duas variáveis**

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)}-q^{(n+1,0)}\right)=-g\left(q^{(n+1,0)}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$J=A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\mathbf{q}=\mathbf{b}}$$

$$b=-g=\begin{pmatrix}-g_1\left(q^{(n+1,0)}\right)\\ -g_2\left(q^{(n+1,0)}\right)\end{pmatrix}$$

$$q=\begin{pmatrix}q_1^{(n+1)}-q_1^{(n+1,0)}\\ q_2^{(n+1)}-q_2^{(n+1,0)}\end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Decomposição LU**

$$\boxed{A = L\ U}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$g_1 = q_1^{(n+1)} - q_1^{(n)} - f_1(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

$$g_2 = q_2^{(n+1)} - q_2^{(n)} - f_2(q^{(n+1)}, p^{(n)})\Delta t = 0$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Resolução**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u_{11} = a_{11} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ &u_{12} = a_{12} \\ &u_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{x_1 = b_1 \qquad x_2 = b_2 - l_{12}x_1}$$

$$q_1 = \frac{(x_1 - u_{12}q_2)}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{x_2}{u_{22}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Resolução**

$$q_1 = \frac{(x_1 - u_{12}q_2)}{u_{11}} \qquad q_2 = \frac{x_2}{u_{22}}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1^{(n+1)} - q_1^{(n+1,0)} \\ q_2^{(n+1)} - q_2^{(n+1,0)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} q_1^{(n+1)} = q_1^{(n+1,0)} + \dfrac{(x_1 - u_{12}q_2)}{u_{11}} \\ q_2^{(n+1)} = q_2^{(n+1,0)} + \dfrac{x_2}{u_{22}} \end{cases}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Resolução**

$$q_1^{(n+1,m+1)} = q_1^{(n+1,m)} + \left.\frac{(x_1 - u_{12}q_2)}{u_{11}}\right|_{(q^{(n+1,m)},p^{(n+1,m)})}$$

$$q_2^{(n+1,m+1)} = q_2^{(n+1,m)} + \left.\frac{x_2}{u_{22}}\right|_{(q^{(n+1,m)},p^{(n+1,m)})}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2$$

$$H_1 = \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

- Ilustrar a distorção de soluções não perturbadas por termos ressonantes

$$H = H_0(J_1, J_2) + f_{mn}(J_1, J_2)\cos(m\phi_1 + n\phi_2)$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

- Ilustrar a distorção de soluções não perturbadas por termos ressonantes

$$H = H_0(J_1, J_2) + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2)$$

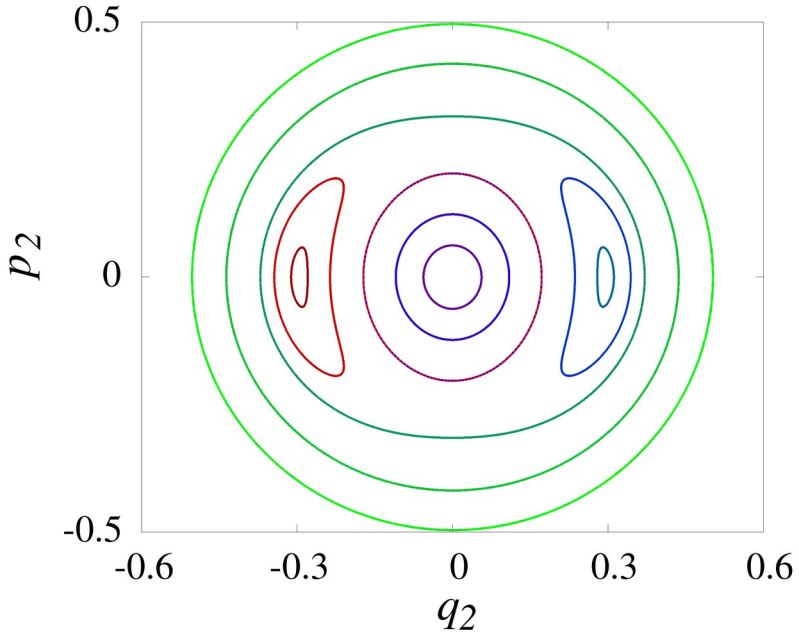
<u>Ressonância 2-2</u>

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

Ressonância 2-2

$$H = H_0(J_1, J_2) + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2)$$



Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

- Ilustrar a distorção de soluções não perturbadas por termos ressonantes

$$H = H_0(J_1, J_2) + \alpha J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)$$

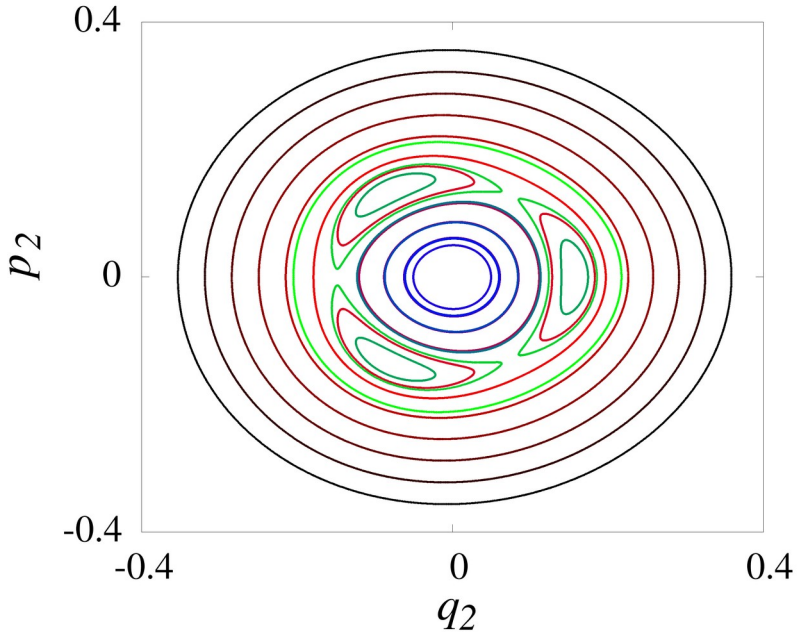
<u>Ressonância 3-2</u>

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

<u>Ressonância 3-2</u>

$$H = H_0(J_1, J_2) + \alpha J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)$$



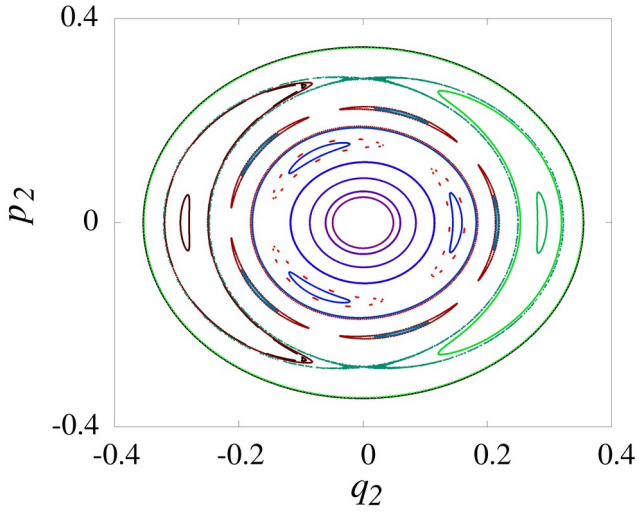
Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)$$

<u>Ressonância dupla 2-2 e 3-2</u>

- Observamos as duas ressonâncias no espaço de fase



Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = 1 - 2J_1 - 3J_2 + \alpha J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{J}_1 = 2\alpha J_1 J_2 \sin(2\phi_1 - 2\phi_2) + 2\beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{\phi}_2 = 1 - 3J_1 + 2J_2 + \alpha J_1 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \dfrac{3}{2}\beta J_1 J_2^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2) \\ \dot{J}_2 = -2\alpha J_1 J_2 \sin(2\phi_1 - 2\phi_2) - 32\beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1 - 3\phi_2) \end{cases}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

$$\begin{cases}
\phi_1^{(n+1)} = \phi_1^{(n)} + \Delta t \left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \beta (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\
J_1^{(n+1)} = J_1^{(n)} + \Delta t \left[2\alpha J_1^{(n)} J_2^{(n)} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + 2\beta J_1^{(n)} (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right. \\
\phi_2^{(n+1)} = \phi_2^{(n)} + \Delta t \left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} + \alpha J_1^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \frac{3}{2}\beta J_1^{n} (J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\
J_2^{(n+1)} = J_2^{(n)} - \Delta t \left[2\alpha J_1^{(n)} J_2^{(n)} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + 3\beta J_1^{(n)} (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \sin(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right.
\end{cases}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\boxed{H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)}$$

$$\begin{cases} \phi_1^{(n+1)} = \phi_1^{(n)} + \Delta t \left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \beta (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\ \phi_2^{(n+1)} = \phi_2^{(n)} + \Delta t \left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} + \alpha J_1^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \frac{3}{2}\beta J_1^{n} (J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \end{cases}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$\begin{cases} \phi_1^{(n+1)} = \phi_1^{(n)} + \Delta t \left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \beta (J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \\ \phi_2^{(n+1)} = \phi_2^{(n)} + \Delta t \left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} + \alpha J_1^{(n)} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) + \frac{3}{2}\beta J_1^{n} (J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}} \cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] \end{cases}$$

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,m+1)}\right) q^{(n+1,m+1)} = J\left(q^{(n+1,m)}\right) q^{(n+1,m)} - g\left(q^{(n+1,m)}\right)}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Método de Newton para duas variáveis**

$$\boxed{J\left(q^{(n+1,0)}\right)\left(q^{(n+1)}-q^{(n+1,0)}\right)=-g\left(q^{(n+1,0)}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$J=A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\mathbf{q}=\mathbf{b}}$$

$$b=-g=\begin{pmatrix}-g_1\left(q^{(n+1,0)}\right)\\ -g_2\left(q^{(n+1,0)}\right)\end{pmatrix}$$

$$q=\begin{pmatrix}q_1^{(n+1)}-q_1^{(n+1,0)}\\ q_2^{(n+1)}-q_2^{(n+1,0)}\end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$b = -g = \begin{pmatrix} -g_1\left(q^{(n+1,0)}\right) \\ -g_2\left(q^{(n+1,0)}\right) \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \phi_1^{(n+1)} - \phi_1^{(n)} - \Delta t\left[1 - 2J_1^{(n)} - 3J_2^{(n)} + \alpha J_2^{(n)}\cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) - \beta(J_2^{(n)})^{\frac{3}{2}}\cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] = 0$$

$$g_2 = \phi_2^{(n+1)} - \phi_2^{(n)} + \Delta t\left[1 - 3J_1^{(n)} + 2J_2^{(n)} - \alpha J_1^{(n)}\cos(2\phi_1^{(n+1)} - 2\phi_2^{(n+1)}) - \frac{3}{2}\beta J_1^{n}(J_2^{(n)})^{\frac{1}{2}}\cos(2\phi_1^{(n+1)} - 3\phi_2^{(n+1)})\right] = 0$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\mathbf{q} = \mathbf{b}}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1^{(n+1)} - q_1^{(n+1,0)} \\ q_2^{(n+1)} - q_2^{(n+1,0)} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$J=A=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\mathbf{q}=\mathbf{b}}$$

$$q=\begin{pmatrix} q_1^{(n+1)} - q_1^{(n+1,0)} \\ q_2^{(n+1)} - q_2^{(n+1,0)} \end{pmatrix}$$

$$J=A=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix}$$

$$q=\begin{pmatrix} \phi_1^{(n+1)} - \phi_1^{(n+1,0)} \\ \phi_2^{(n+1)} - \phi_2^{(n+1,0)} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{A = L\ U} \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford**

$$J = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{A = L\,U} \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} x_k$$

$$q_j = \frac{1}{u_{jj}} \left(x_j - \sum_{k=j+1}^{N} u_{jk} q_k \right) \longrightarrow \boxed{q = \begin{pmatrix} \phi_1^{(n+1)} - \phi_1^{(n+1,0)} \\ \phi_2^{(n+1)} - \phi_2^{(n+1,0)} \end{pmatrix}}$$

Integração numérica de sistemas Hamiltonianos não separáveis

- **Hamiltoniana de Walker-Ford – Coordenadas cartesianas**

$$(\phi_1, \phi_2, J_1, J_2) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$q_i = \sqrt{J_i}\cos(\phi_i)$$

$$p_i = -\sqrt{J_i}\sin(\phi_i)$$