11. Mapas Simpléticos

Transição para o Caos

Gabriel C. Grime

PGF 5005 - Mecânica Clássica
web.ifusp.br/controle

Referências principais: Revista Brasileira de Ensino de Física, **45**, e20220333 (2023); Physica D **91**, 1 (1996)

IFUSP

30/10/2023

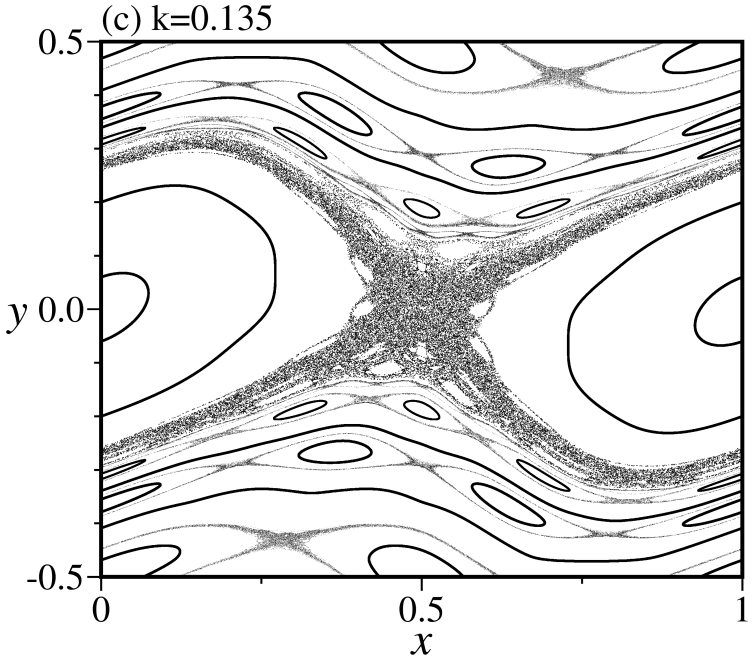
Na aula anterior

Mapas simpléticos:

- Análogo discreto de sistemas Hamiltonianos
- Preservam área no espaço de fases
- Possuem órbitas regulares
  - Periódicas (torus racionais)
  - Quasiperiódicas (torus irracionais)
- Órbitas caóticas confinadas pelos torus irracionais

Mapa Twist Radial

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(\theta_n)$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})$$



Objetivos

- Caracterizar a transição para o caos em sistemas twist
- Estudar órbitas em mapas não-twist
- Caracterizar a transição para o caos em sistemas não-twist
- Definir barreira de transporte sem cisalhamento

Outline

1. Transição para o caos em sistemas twist
2. Transição para o caos em sistemas não-twist

Outline

1 Transição para o caos em sistemas twist

2 Transição para o caos em sistemas não-twist

Qual a última curva a se quebrar?

- Curvas invariantes são rotuladas por seu número de rotação (média da variação angular da órbita)

Número de rotação

Dada uma órbita regular de um mapa simplético $(p_{n+1}, x_{n+1}) = M(p_n, x_n)$, com condição inicial (p_0, x_0), definimos seu número de rotação por

$$\omega(p_0, x_0) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k - x_{k-1}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{x_N - x_0}{N}$$

- O teorema KAM afirma que o **último torus** a ser **quebrado** é o torus com **número de rotação mais irracional**
- Ele tem como **hipótese a condição twist**

Qual a última curva a se quebrar?

Mapa Padrão

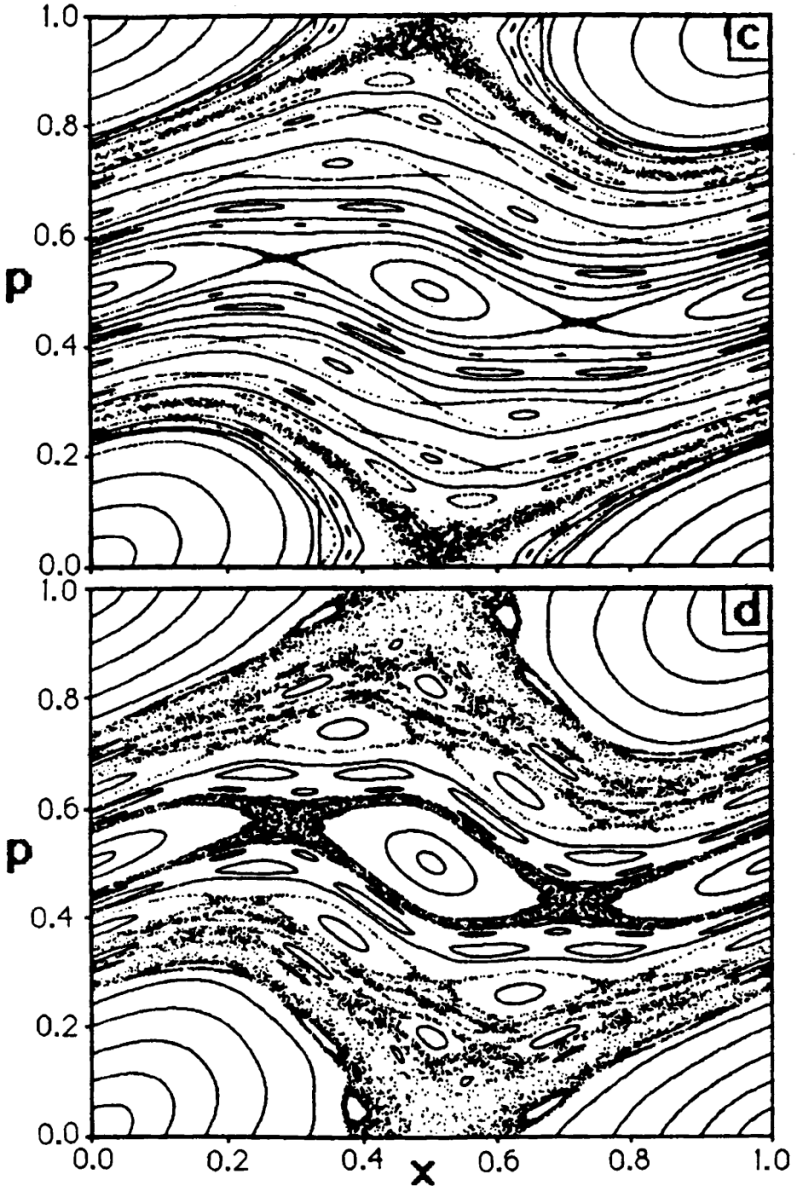
$$p_{n+1} = p_n + k \sin(2\pi x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \pmod 1$$

(c) $k = 0.7716354$

- Torus mais próximos das ressonâncias (mais irracionais) são quebrados

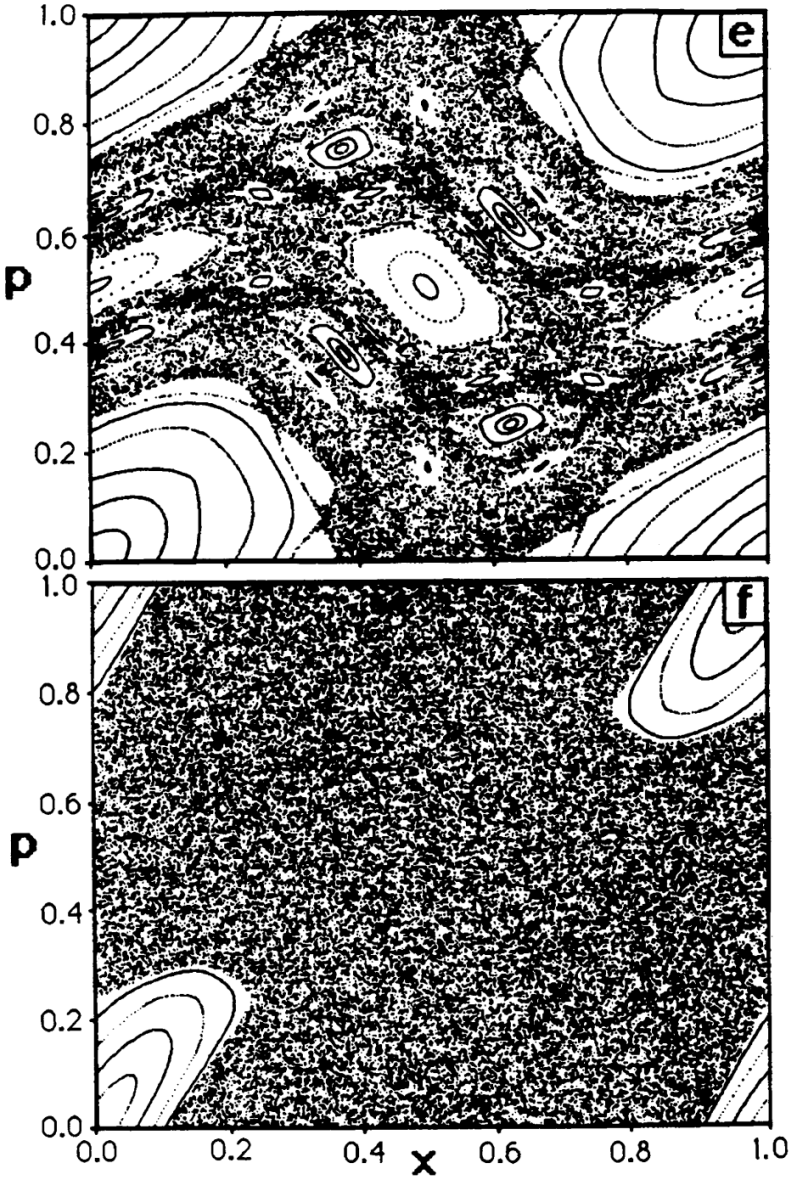
(d) $k = k_{\text{crit}} = 0.9716354$

- Apenas a curva mais irracional permanece, $\omega = (1 + \sqrt{5})/2$



Caos Global

- Após a última curva se quebrar, as órbitas caóticas preenchem todo o espaço de fase acessível
- Chamamos de **transporte caótico**
- Aplicações em fluidos, plasmas, bilhares, mecânica celeste, matéria condensada,...



Outline

1 Transição para o caos em sistemas twist

2 Transição para o caos em sistemas não-twist

Mas quando o sistema viola a condição twist?

- O teorema KAM é válido apenas para sistemas que satisfazem a condição twist
- Sistemas que não satisfazem a condição twist são chamadas de **não-twist**

Condição Twist

O mapeamento $(y_{n+1}, x_{n+1}) = M(y_n, x_n)$ é dito twist se, e somente se,

$$\left.\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n}\right|_{x_n} \neq 0 \quad \forall (y, x)$$

Porque estudar sistemas não-twist?

- Interesse matemático: pouco resultados até hoje
- Aplicações em relevantes áreas da ciência:
  - Advecção caótica sujeita a perfis não-monotônicos de velocidade
  - Tokamaks com perfil de campo magnético não-monotônico
  - Guias de onda
  - ...

Advecção caótica em Fluidos

- Escoamento 2D incompressível: linhas do campo de velocidades $\mathbf{v}$ obedece:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

- Definimos uma função de fluxo $H(x, y)$ tal que

$$v_x = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

- Como $\dot{x} = v_x$ e $\dot{y} = v_y$, obtemos o sistema Hamiltoniano

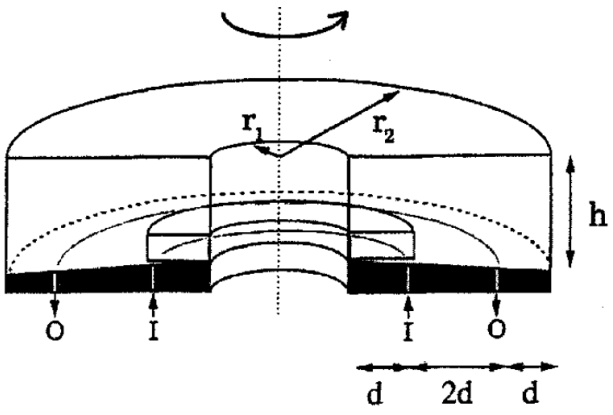
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

onde x é a coordenada generalizada ("q") e y o momento generalizado ("p").

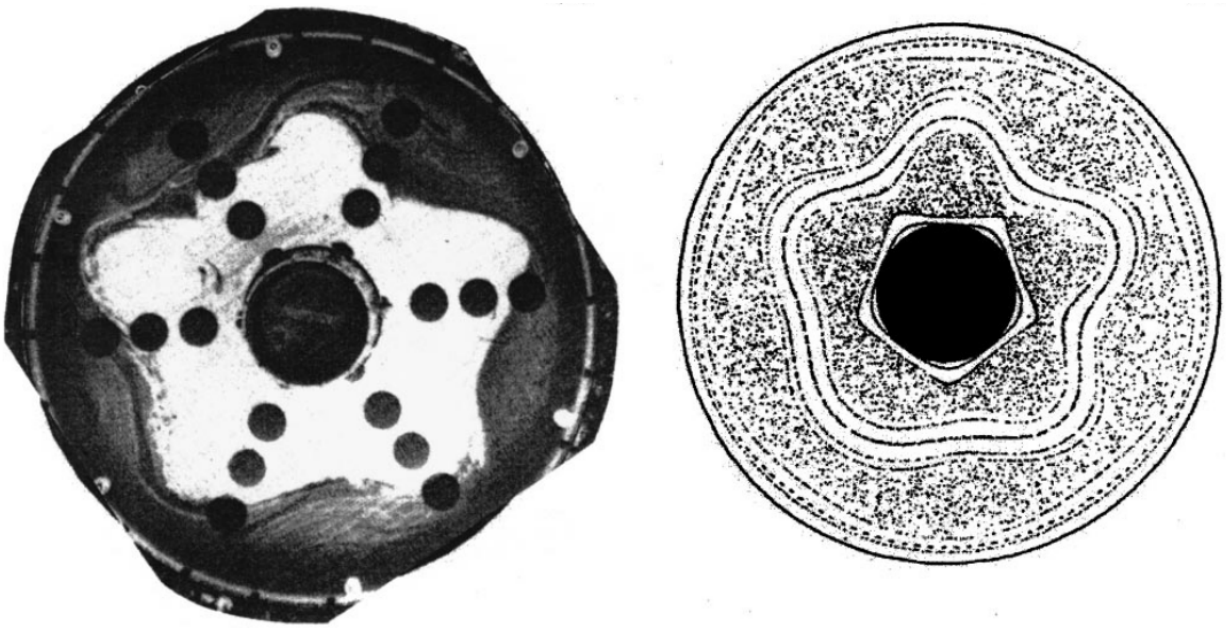
Advecção caótica em Fluidos

Modelo Hamiltoniano (não-twist)[1]

$$H(r,\theta) = \tanh(r - r_0) + \epsilon_1 \cos(m_1\theta - \omega t) + \epsilon_2 \cos(m_2\theta - \omega t)$$



- Tinta na borda
- Barreira de transporte
- Curva remanescente

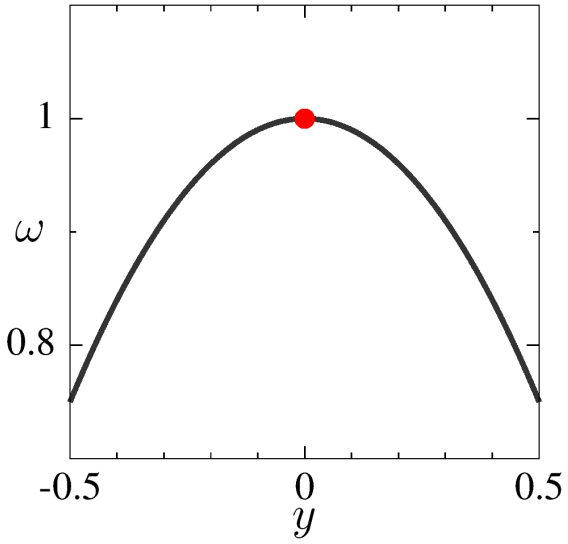


[1] *Phys Plasmas* **7**, 1702 (2000)

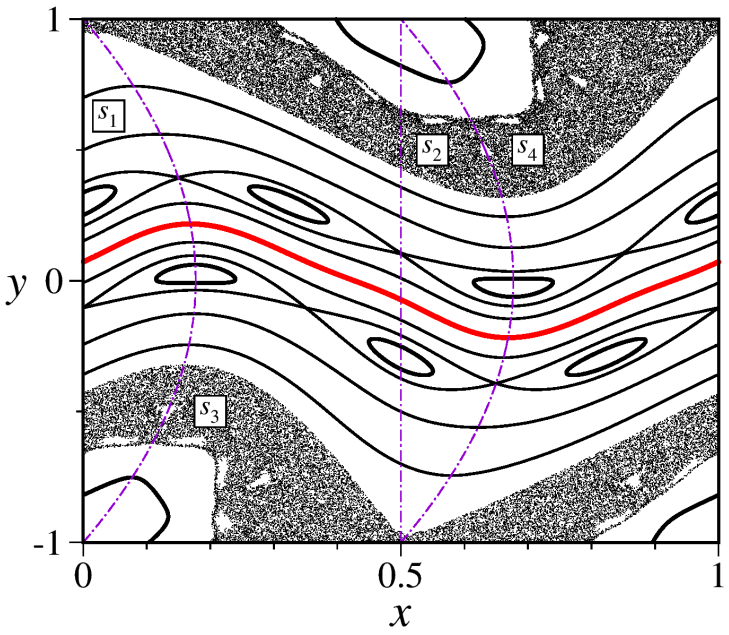
Sistema não-twist paradigmático

Mapa Padrão Não-twist[2]

$$y_{n+1} = y_n - b\sin(2\pi x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2)$$



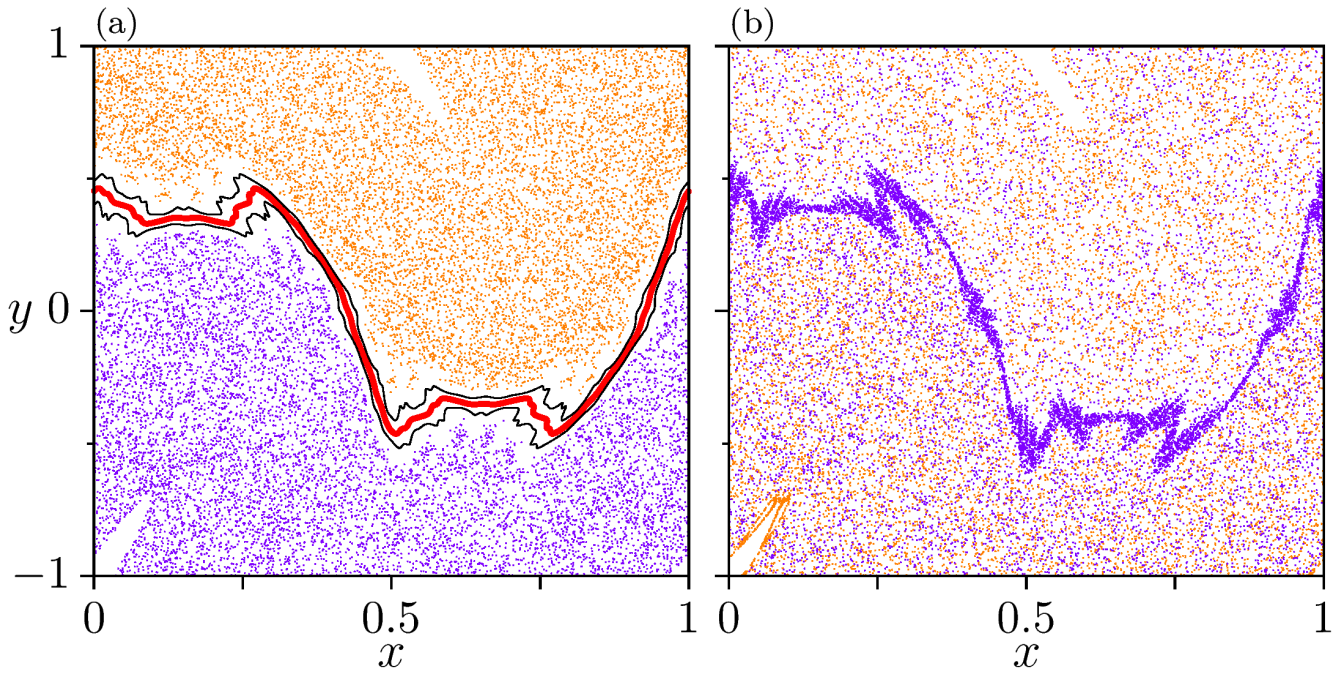
- Viola a condição twist em $y = b\sin(2\pi x)$
- Curva invariante sem cisalhamento



[2] D del-Castillo-Negrete, *et al.* Physica D **91**, 1 1996.

Shearless transport barrier

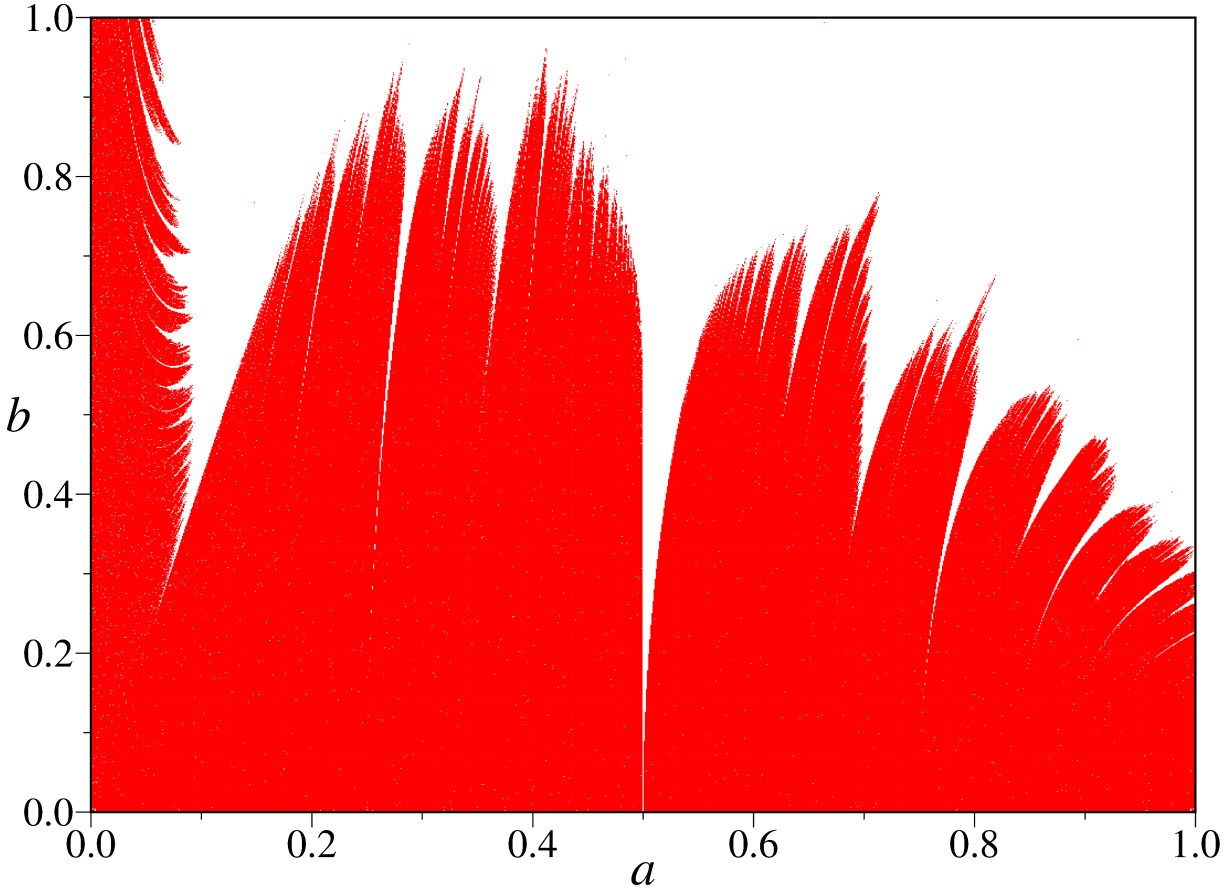
- Transport in phase space is due to chaotic orbits
- Shearless curves are total transport barriers
  - Don't follow KAM theorem
  - Particularly resistant under periodic perturbations[3]
- A partial transport barrier **reduces transport coefficients**



[3] I I Rypina, *et al. Phys Rev Lett* **98**, 104102 (2007)

Shearless curve breakup parameter space of the SNM

- The parameter space (a, b) tells whether the shearless curve
  - Exists (red)
  - Broken (white)



- Regular boundaries
- Sharp singularities
- Fractal-like

$$y_{n+1} = y_n - b\sin(2\pi x_n)$$
$$x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2)$$

Conclusões

- Curvas sem cisalhamento confinam órbitas caóticas: barreiras de transporte
- A transição para o caos global (transporte) depende se o sistema satisfaz a condição twist
  - Twist: torus mais irracional é o último a quebrar
  - Não-twist: curva sem cisalhamento é a última a quebrar
- Aplicações em Fluidos: advecção caótica
- Mapa Padrão Não-Twist não tem esse nome à toa!

Próximos capítulos

- Os teoremas mais importantes de toda a dinâmica:
  - Kolmogorov-Arnold-Moser
  - Poincaré-Birkhoff
- Variedades hiperbólicas, emaranhados homoclinicos e a **origem do caos**