# 11. Mapas Simpléticos

Gabriel C. Grime

PGF 5005 - Mecânica Clássica
web.ifusp.br/controle

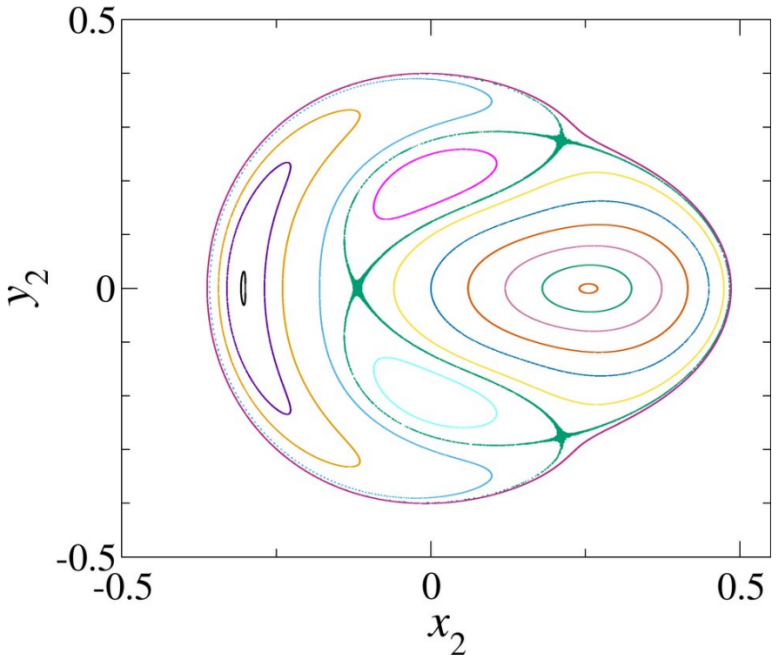
Referências principais: Reichl, The Transition to Chaos, cap. 3 (2004);
Lichtenberg e Lieberman, Regular and Chaotic Motion, cap. 3 (1992)

IFUSP

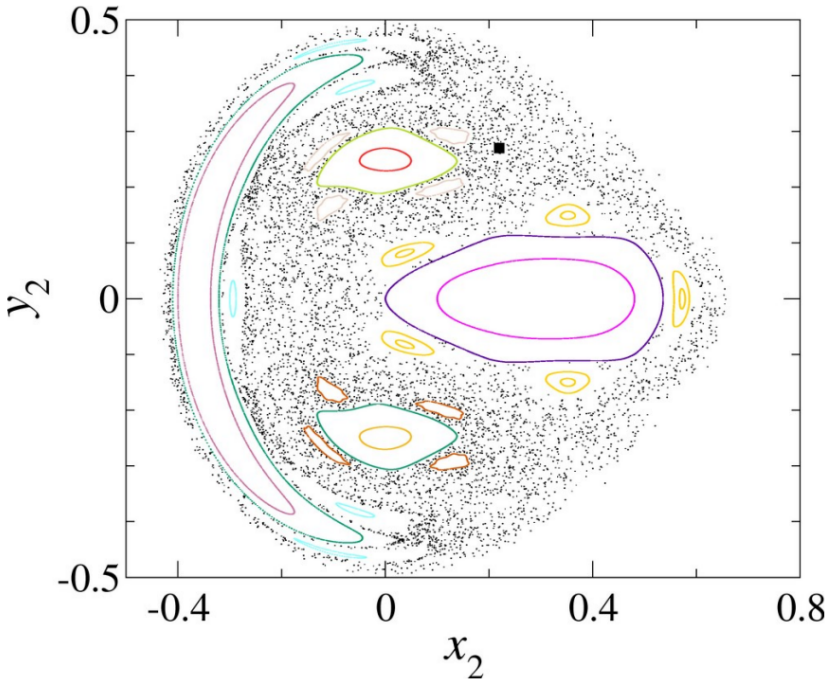
30/10/2023

# Motivação

- Até agora estudamos sistemas Hamiltonianos **contínuos**.
  1. Suas equações vêm direto do modelo físico
  2. Visualizamos órbitas utilizando seções de Poincaré
  3. Integração numérica é custosa e imprecisa (erros numéricos)
- Mas também existem sistemas Hamiltonianos discretos (mapas simpléticos)




$E = 0.08333$




$E = 0.125$

# Objetivos

- Definir mapas simpléticos e relação com sistemas Hamiltonianos contínuos
- Caracterizar órbitas em mapas simpléticos
- Apresentar a condição *twist*
- Apresentar o mapa padrão e sua importância

# Outline

# Outline

# Sistemas Integráveis

Dado um sistema Hamiltoniano integrável bidimensional, em variáveis de ângulo $(\theta_1, \theta_2)$ e ação $(J_1, J_2)$

$$H = H_0(J_1, J_2)$$

Suas equações de movimento são

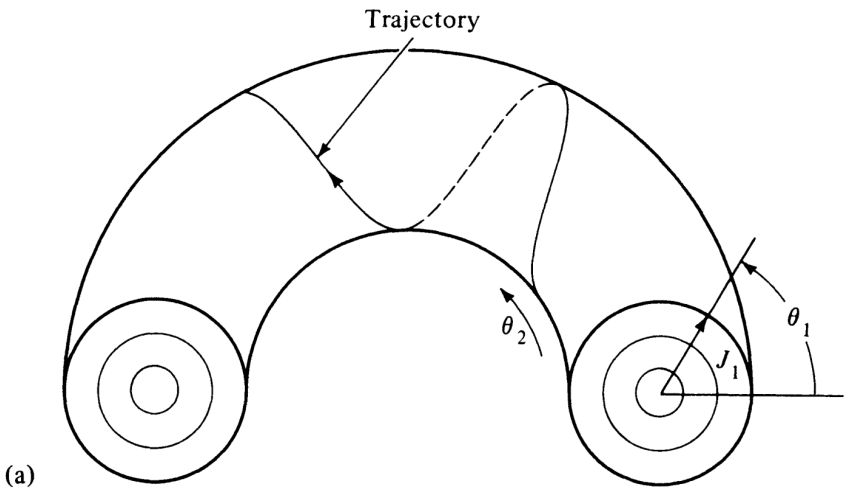
$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$$
$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J_1, J_2)$$

com solução

$$J_i(t) = J_i(0)$$
$$\theta_i(t) = \theta_i(0) + \omega_i t$$

# Sistemas Integráveis

$$J_i(t) = J_i(0)$$
$$\theta_i(t) = \theta_i(0) + \omega_i t$$




- $J_i$ constantes
- Movimento **periódico** em $\theta_i$
- Período: $\tau_i = 2\pi/\omega_i$

- Podemos definir a seção de Poincaré $\Sigma = \{(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) : \theta_2 = 0\}$ e analisar as trajetórias do sistema nela.
- Iterações sucessivas em $\Sigma$ são separadas por $\tau_2 = 2\pi/\omega_2$.

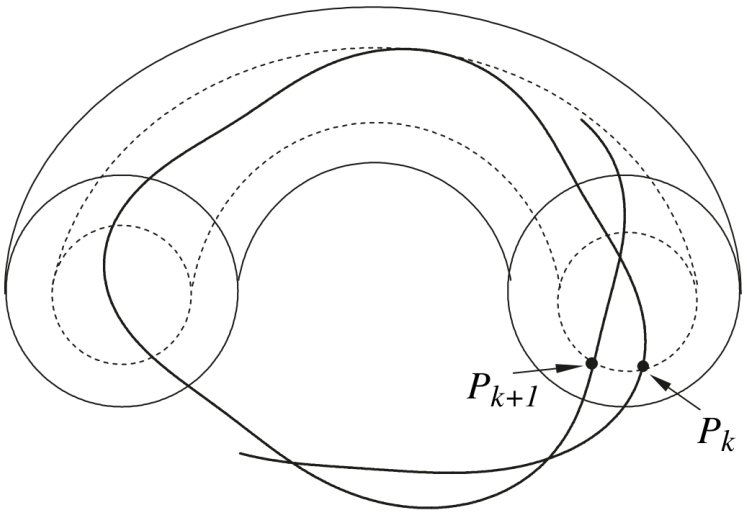
$$\begin{aligned}\theta_1(t+\tau_2) &= \theta_1(0) + \omega_1(t+\tau_2) \\ &= \theta_1(0) + \omega_1 t + 2\pi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \theta_1(t) + 2\pi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\end{aligned}$$

# Sistemas Integráveis

- Definindo $\alpha \equiv \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$
- Como $\omega_i = \omega_i(J_1, J_2)$ e $H_0(J_1, J_2) = \text{const.}$, $\alpha = \alpha(J_1)$
- Eliminando o subscrito "1", a evolução de do par $(J_1, \theta_1)$ fica:

**Mapa Twist**

$$J_{n+1} = J_n$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})$$



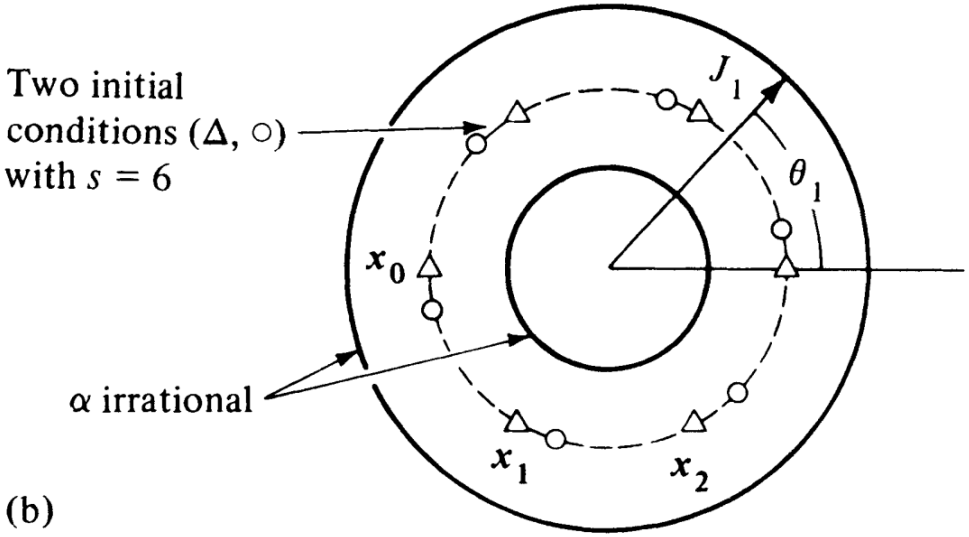

- Mapa de Poincaré de um sistema Hamiltoniano **integrável**.
- Ação constante
- Ângulo varia com a ação por meio da *função twist* $\alpha(J)$.

# Sistemas Integráveis

- Torus racional $\alpha = r/s$
  - Órbita periódica de período $s$, dando $r$ voltas em $\theta_1$.
  - Também chamado de torus ressonante.
- Torus irracional $\alpha \neq r/s$
  - Órbitas quasiperiódicas
  - Círculos invariantes
  - Torus invariantes

## Mapa Twist

$$J_{n+1} = J_n$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})$$



# Sistemas Quasi-integráveis

Considere a Hamiltoniana perturbada ($\epsilon \ll 1$)

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$$

Sua seção de Poincaré pode ser descrita pelo

## Mapa Twist Perturbado

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \theta_n) \end{aligned}$$

- $f$ e $g$ periódicas em $\theta$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial J_{n+1}} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta_n} = 0$

- Mapa de Poincaré de um sistema Hamiltoniano **quasi-integrável**
- Ação varia periodicamente
- Implícito, pois $J_{n+1}$ depende de $J_{n+1}$

# Mapa Twist Radial

- Mapa Twist perturbado é implícito
- Podemos contornar esse problema considerando $f = f(\theta_n)$ e $g \equiv 0$.

## Mapa Twist Radial

$$
\begin{aligned}
J_{n+1} &= J_n + \epsilon f(\theta_n) \\
\theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})
\end{aligned}
$$

- Explícito (mais fácil e rápido de iterar computacionalmente)
- A depender da escolha para $f(\theta)$ e $\alpha(J)$, leva a mapas interessantes

# Definição de Mapa Simplético

- Mapas simpléticos = seção de Poincaré de sistema Hamiltoniano
- Evolução temporal é uma transformação canônica
- Logo, mapas simpléticos são **transformações canônicas!**

Condição para uma transformação $(p, q) \to (Q, P)$ ou $(z \to Z)$ ser canônica:

$$J^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma \cdot J = \Gamma$$

onde $J_{ij} = \dfrac{\partial Z_i}{\partial z_j}$ são os elementos da Jacobiana e $\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$

Para um mapa, a condição é idêntica!

# Definição de Mapa Simplético

## Mapa Simplético

Seja $z_{n+1} = M(z_n)$ um mapeamento $2N$ dimensional, ele é dito simplético se, e somente se, $J^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma \cdot J = \Gamma$, onde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_N & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & \mathbb{O}_N \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad J_{ij} = \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \text{ são os elementos da Jacobiana.}$$

- Desta definição decorre que $\left|\det(J)\right| = 1$ (preserva área)

# Exemplo

- Simplético
- Contém:
  1. Ilhas
  2. Curvas invariantes

## Mapa de Hénon

$$x_{n+1} = x_n \cos\psi - (y_n - x_n^2)\sin\psi$$
$$y_{n+1} = x_n \sin\psi + (y_n - x_n^2)\cos\psi$$

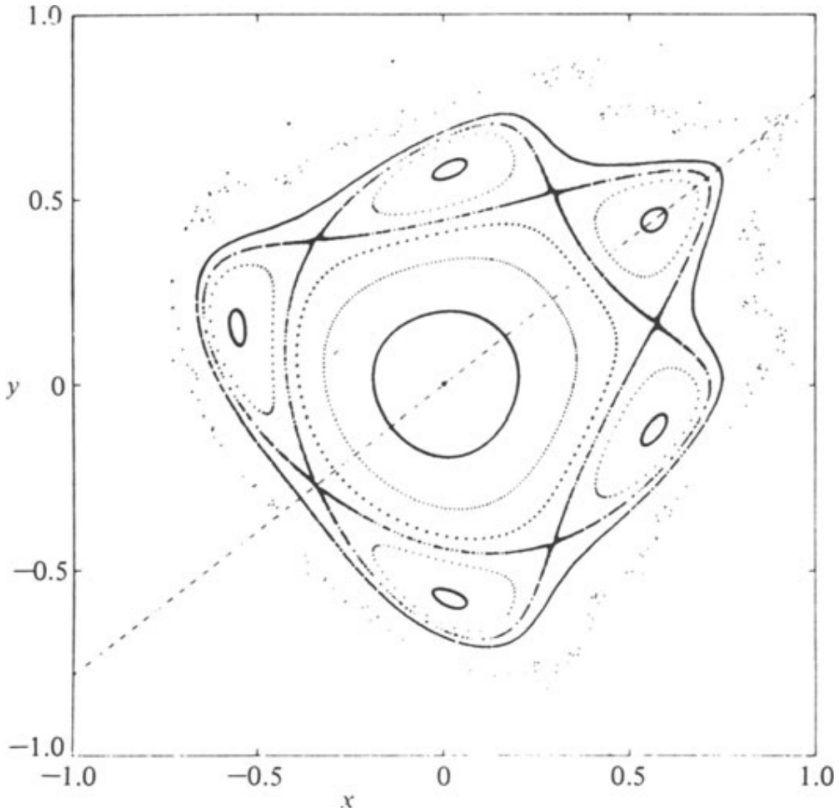



Figure: Mapa de Hénon com $\psi = 0.2114$.

# Condição Twist

## Twist

O mapeamento $(J_{n+1}, \theta_{n+1}) = M(J_n, \theta_n)$ é dito twist se, e somente se,

$$\left.\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n}\right|_{\theta_n} \neq 0 \quad \forall (J, \theta)$$

- Para o mapa twist radial, esta condição é equivalente à $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}J} \neq 0$
- Hipótese de vários teoremas importantes em sistemas Hamiltonianos e mapas simpléticos (próxima aula).

# Outline

# O mapa tangente

- Seja $z_{n+1} = M(z_n)$ um mapeamento simplético bidimensional, onde $z = (J, \theta)$.
- Seja $z_0$ um ponto fixo, isto é, $M(z_0) = z_0$.
- A dinâmica do mapa em torno do ponto de equilíbrio é dada pela expansão em série de Taylor:

$$z_{n+1} = M(z_n) = M(z_0) + DM(z_0)(z_n - z_0) + \cdots$$

onde

$$DM = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \dfrac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} & \dfrac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}$$

- Em uma aproximação linear, considerando até primeira ordem, a Jacobiana $J = DM$ dita o comportamento em torno do ponto de equilíbrio.

# O mapa tangente

- Da mecânica clássica, sabemos que um ponto pode ser **estável** ou **instável**.
- Em sistemas $1D$, basta olhar o sinal da segunda derivada aplicada no ponto.
- Em mapas $2D$, a estabilidade depende dos autovalores da Jacobiana aplicada no ponto.

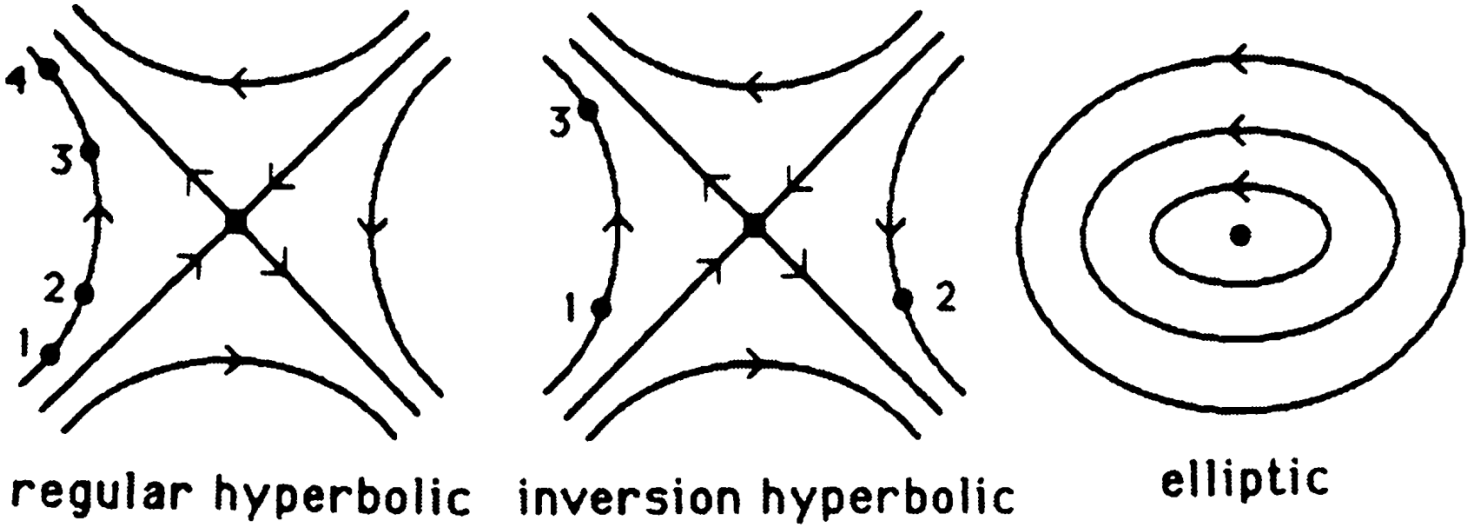
Calculando os autovalores $\lambda$ de $J$, resolvemos $\det(\lambda \mathbb{1} - J) = 0$. Ou seja,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mathrm{Tr}(J)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\mathrm{Tr}(J))^2}{4} - 1}$$

# O mapa tangente

Observe que os autovalores vêm em pares $\lambda_+\lambda_- = 1$, onde:

1. $-2 < \mathrm{Tr}(J) < 2$: $\lambda_\pm \in \mathbb{C}$ (elíptico, estável)
2. $\mathrm{Tr}(J) > 2$ ou $\mathrm{Tr}(J) < -2$: $\lambda\pm \in \mathbb{R}$ (hiperbólico, instável)
3. $\mathrm{Tr}(J) = \pm 2$: $\lambda_+ = \lambda_-$ (parabólico, instável) **Bifurcação**



# Outline

# Mapa Padrão

Para estudar o comportamento de um sistema Hamiltoniano (mapa simplético) em torno de um ponto fixo, fazemos uma aproximação no mapa twist radial:

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(\theta_n)$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1})$$

Considerando o ponto fixo $J_{n+1} = J_n = J_0$:

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(\theta_n) = J_n \quad \Rightarrow \epsilon f(\theta_n) = 0$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) = \theta_n \Rightarrow \alpha(J_{n+1}) = 0$$

Expandindo a equação para $\theta$ em torno do ponto fixo $J_0$:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\Big[\alpha(J_0) + \alpha'(J_0)(J_{n+1} - J_0)\Big]$$

Definindo $\Delta J \equiv J - J_0$ e como $\alpha(J_0) = 0$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha'(J_0)\Delta J_{n+1}$$

# Mapa Padrão

Definindo $I \equiv 2\pi\alpha'(J_0)\Delta J$:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

Também da definição de $I$, obtemos

$$I_{n+1} = 2\pi\alpha'(J_0)(J_{n+1} - J_0)$$

Utilizando a segunda equação do mapa twist radial, $J_{n+1} = J_n + \epsilon f(\theta_n)$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= 2\pi\alpha'(J_0)\{[J_n + \epsilon f(\theta_n)] - J_0\} = 2\pi\alpha'(J_0)\Big[\Delta J_n + \epsilon f(\theta_n)\Big] \\ &= 2\pi\alpha'(J_0)\Delta J_n + 2\pi\alpha'(J_0)\epsilon f(\theta_n) \\ &= I_n + Kf(\theta_n) \end{aligned}$$

onde $K \equiv 2\pi\alpha'(J_0)\epsilon$ é o *parâmetro de estocasticidade*.

# Mapa Padrão

Em resumo, o mapa

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + Kf(\theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1} \end{aligned}$$

é equivalente a qualquer mapa twist radial em trono de um ponto de equilíbrio. Escolhendo $f(\theta) = \sin\theta$, obtemos o famoso

**Mapa Padrão/Chirikov-Taylor**

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K\sin\theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1} \end{aligned}$$

- Sistema padrão para testar novas técnicas
- Sistema twist mais conhecido na literatura
- Descreve o comportamento de trajetórias próximas a ressonâncias

# Órbitas regulares no Mapa Padrão

No limite de integrabilidade $K = 0$:

$$I_{n+1} = I_n \equiv I_0$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_0$$

1. Torus racional:
   - $I_0 = q/p$: órbita de período $p$.
2. Torus irracional:
   - $I_0 \neq q/p$: preenche densamente uma curva.

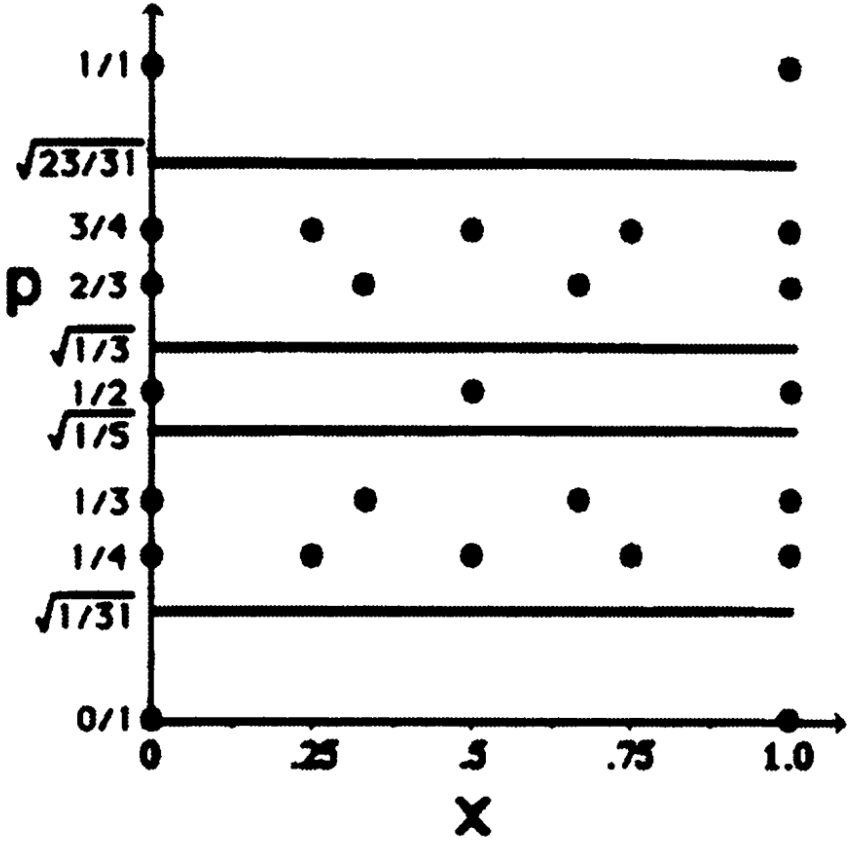
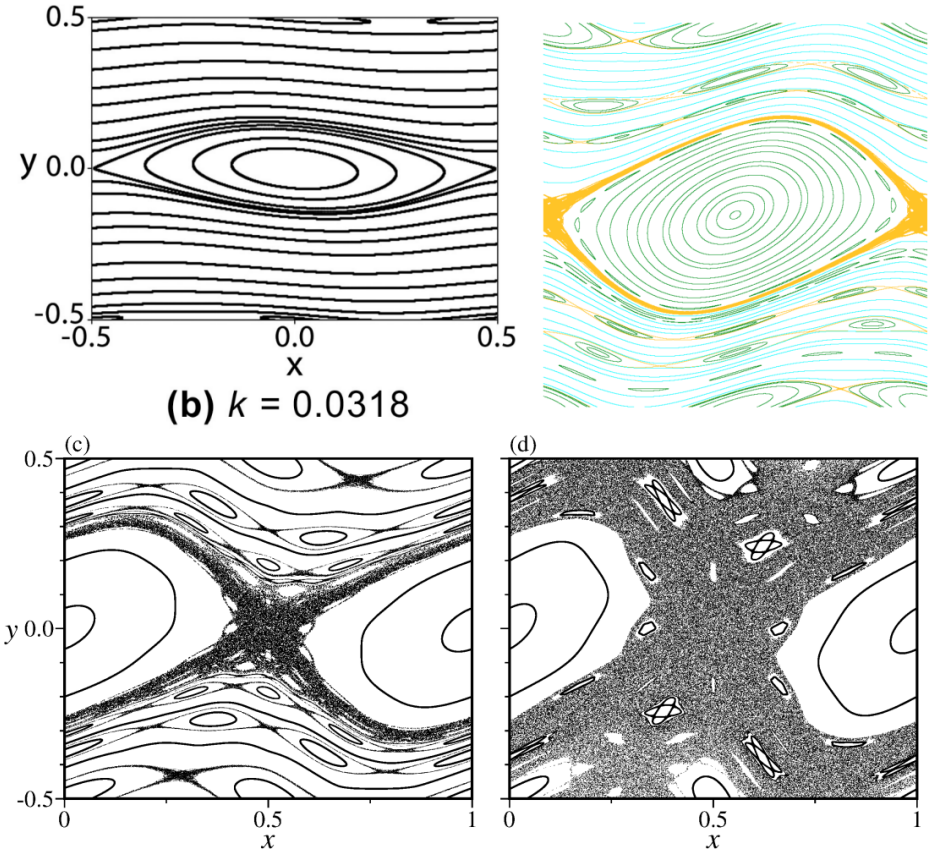



Figure: Typical orbits of the integrable standard map. Irrational tori fill a line densely, while rational tori form a discrete set of periodic points.

# Órbitas Caóticas no Mapa Padrão

Para $K \neq 0$

- Torus racionais geram ilhas (ressonâncias)
- Órbitas caóticas:
  - Surgem nos pontos hiperbólicos
  - Ocupam uma área não-nula
  - Deformam e quebram torus invariantes próximos
  - Sensível dependência às condições iniciais
  - Obedecem ao teorema da recorrência de Poincaré[1]




[1] Órbitas são, eventualmente, iteradas para qualquer região do espaço de fase acessível.

# Conclusões

Nesta aula estudamos mapas simpléticos:

- Análogo discreto de sistemas Hamiltonianos contínuos
- Podem ser obtidos a partir de seções de Poincaré de sistemas Hamiltonianos
- Preservam área no espaço de fases
- Possuem órbitas regulares
  - Periódicas (torus racionais): elípticas (estáveis) ou hiperbólicas (instáveis)
  - Quasiperiódicas (torus irracionais)
- A perturbação gera órbitas caóticas, confinadas pelos torus irracionais
- O Mapa Padrão não possui este nome à toa.

# Próxima Aula

- O que acontece quando a condição twist é violada?

# Exemplo

## Mapa de Henon

$$x_{n+1} = 2Cx_n + 2x_n^2 - y_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

1. Mostre que o mapa é simplético
2. Encontre os pontos fixos e sua estabilidade em função do parâmetro $C$
3. Para qual valor de $C$ há uma bifurcação?

# Exemplo