

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# DESCRIÇÃO SIMPLÉTICA DO ESCAPE DAS LINHAS MAGNÉTICAS EM TOKAMAKS

Bruno Borges Leal

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr. (UEPG)

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (UNESP-Rio Claro)



São Paulo  
2021

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Leal, Bruno Borges

Descrição simplética do escape das linhas magnéticas em Tokamaks. São Paulo, 2021.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Depto. de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Tokamak; 2. Confinamento magnético; 3. Limitador ergódico magnético; 4. Escape das linhas de campo magnético

USP/IF/SBI-014/2021

University of São Paulo  
Physics Institute

# SYMPLECTIC DESCRIPTION OF MAGNETIC ESCAPE LINES IN TOKAMAKS

Bruno Borges Leal

Supervisor: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertation submitted to the Physics Institute of  
the University of São Paulo in partial fulfillment  
of the requirements for the degree of Master of  
Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - Supervisor (IFUSP)

Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr. (UEPG)

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (UNESP-Rio Claro)

São Paulo  
2021





# Agradecimentos

Sou grato ao meu orientador, Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, por ter me aceito em seu grupo de pesquisa e por sua solicitude ao longo desses dois anos.

Sou grato à minha família, especialmente ao meu irmão, Rafael, que me incentivou a continuar o mestrado.

Sou grato aos alunos, pós-doutores e professores pela recepção amigável que recebi ao integrar-me ao grupo e pelo convívio sadio que sempre houve durante todo esse tempo.

Sou grato pelas conversas e ajudas, essenciais, que tive dos doutorandos Matheus Jean, Vitor Martins e Matheus Palmero.

Sou grato também por todas as outras pessoas que, apesar de não citadas explicitamente aqui, contribuíram de alguma forma.

Sou grato ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro (processo 133395/2019 – 7), que permitiu dedicação total ao programa de mestrado.

A todos, muito obrigado.



# Resumo

O campo magnético na borda do plasma confinado em tokamaks apresenta ilhas magnéticas e linhas magnéticas caóticas. Detalhes dessa configuração são importantes para a melhoria do confinamento do plasma. Em particular, o escape das linhas magnéticas tem sido investigado para explicar o aquecimento excessivo de algumas partes da parede do tokamak. Para investigar o escape das linhas caóticas nós usamos o mapa simplético de Ullmann, que fornece as seções de Poincaré do campo magnético de equilíbrio perturbado por um limitador magnético. Nós consideramos a ação de dois limitadores ergódicos para criar uma perturbação ressonante com números de onda poloidal e toroidal definidos. Assim, obtivemos a distribuição do escape associado ao aprisionamento das linhas caóticas ao redor das linhas magnéticas.

Palavras-chaves: tokamak; confinamento magnético; limitador ergódico magnético; escape das linhas magnéticas.



# Abstract

The magnetic field at the tokamak plasma edge has magnetic islands and chaotic lines. Details of this configuration are important to improve the plasma confinement. In particular, the magnetic lines escape has been investigated to explain the excessive heating of some tokamak wall sections. To investigate the chaotic lines escape we apply the symplectic Ullmann map, which gives the Poincaré sections of the magnetic equilibrium field perturbed by an ergodic limiter. Furthermore, we consider the action of two ergodic limiters in order to create a resonant perturbation with chosen poloidal and toroidal wave numbers. Thus, we obtained the distribution of the escape associated to the chaotic lines stickiness around the magnetic islands.

Keywords: tokamak; magnetic confinement; ergodic magnetic limiter; magnetic lines escape.



# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                                                                                |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Pequeno segmento toroidal ilustrando o arranjo das superfícies magnéticas.                                                                                                                                                     | 17 |
| 2.2 | Direções toroidal e poloidal em um toroide. . . . .                                                                                                                                                                            | 18 |
| 2.3 | Aproximação cilíndrica para o tokamak, com limitador ergódico. . . . .                                                                                                                                                         | 19 |
| 2.4 | Na figura (a) está o perfil para $B_\theta$ . Em (b) está o perfil do fator de segurança. Parâmetros do tokamak TCABR e $q(a) = 4$ . . . . .                                                                                   | 21 |
| 3.1 | Seções de Poincaré geradas pelo mapa de Ullmann nas situações de confinamento do plasma no equilíbrio e perturbado. Para $q(a) = 5$ , $m = 5$ , $I_h = 4000 A$ e $a_1 = -0.02$ . . . . .                                       | 35 |
| 3.2 | Mapa de Ullmann para dois anéis limitadores, $a_1 = -0.02$ , $q(a) = 4$ e $(m, n) = (4, 1)$ e $I_h = 4000 A$ . . . . .                                                                                                         | 39 |
| 3.3 | Comparação entre o perfil do fator de segurança obtido por integração e numericamente, através do mapa de Ullmann, para diferentes valores de $a_1$ .                                                                          | 40 |
| 3.4 | Linhas de campo regulares possuem um número de rotação bem definido, Fig.(3.4a). Enquanto que linhas caóticas não, Fig.(3.4c). . . . .                                                                                         | 42 |
| 3.5 | Na figura (a) é representado a linha de campo (em vermelho) aprisionada pela cadeia 5/1, para $(m = 5, n = 1)$ , $q(a) = 5$ e $I_h = 4000$ . Nas figuras (b) e (c) é mostrado o cálculo numérico do número de rotação. . . . . | 43 |
| 3.6 | Espectro de potência para a cadeia de ilhas e a trajetória caótica das Figs.(3.4b) e (3.4d), respectivamente. . . . .                                                                                                          | 44 |
| 4.1 | Seções de Poincaré para diferentes valores de $q(a)$ , $I_h = 4000 A$ e $(m = 5, n = 1)$ . Em vermelho estão as linhas com maior comprimento de conexão.                                                                       | 46 |
| 4.2 | Comprimento de conexão, $N_{cl}$ , na parede do tokamak em função de $q(a)$ . .                                                                                                                                                | 47 |
| 4.3 | Número de rotação a tempo finito, calculado a cada 500 iterações, para as linhas em destaque da Fig.(4.1). . . . .                                                                                                             | 49 |
| 4.4 | Linha de campo em destaque da Fig.(4.1a). Os pontos em vermelho e amarelo são, respectivamente, os pontos das primeiras iterações e alguns dos pontos aprisionados pela cadeia de ilhas 5/1. . . . .                           | 50 |
| 4.5 | Distribuição dos comprimentos de conexão, para diferentes valores de $q(a)$ , com condições iniciais na parede do tokamak. . . . .                                                                                             | 51 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.6  | Ampliações sucessivas de uma parte da Fig. (4.5c). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 52 |
| 4.7  | Bacias de saída, com 10 intervalos de escape indicados na escala de cores, para linhas de campo com condições iniciais ( $x$ ) na parede tokamak. Em amarelo estão as órbitas que não escaparam. . . . .                                                                                                                       | 53 |
| 4.8  | Bacias de escape para dois valores diferentes de $q(a)$ , mostrando os padrões mais comuns encontrados. Em amarelo estão as condições que não escaparam, as outras cores representam cada um dos três intervalos em que a parede do tokamak foi dividida. . . . .                                                              | 54 |
| 4.9  | Ampliações sucessivas das bacias de escape da Fig. (4.8a) numa região sem fronteiras bem definidas. . . . .                                                                                                                                                                                                                    | 55 |
| 4.10 | Relação entre o comprimento de conexão e as fronteiras formadas. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 56 |
| 4.11 | Ampliação das Figs. (4.10a) e (4.10c), nas regiões com grande e pequeno comprimentos de conexão. . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 57 |
| 4.12 | Reprodução das figuras (4.11a) e (4.11c) considerando um valor menor de iteração máxima. . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 58 |
| 4.13 | Canais de saída para as órbitas com origem (pontos em vermelho) na região com aprisionamento. . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 59 |
| 4.14 | As figuras (a) e (c) mostram a porcentagem de linhas de campo que escaparam por cada região da parede do tokamak. Já as figuras (b) e (d) mostram os diferentes valores de comprimentos de conexão das linhas de campo que por essas regiões escaparam. Cada condição inicial foi iterada, por no máximo, 20000 vezes. . . . . | 60 |
| 4.15 | Frequência $\omega$ da componente dominante do espectro de potência para a órbita com maior $N_{cl}$ com origem na parede do tokamak. . . . .                                                                                                                                                                                  | 61 |
| 4.16 | Seções de Poincaré com valores de $q(a)$ correspondentes aos pontos selecionados na figura 4.15. Em vermelho estão representadas as órbitas que tiveram seu espectro de potência calculado. . . . .                                                                                                                            | 62 |



# Sumário

## Lista de Figuras

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                     | <b>11</b> |
| <b>2</b> | <b>Confinamento Magnético</b>                         | <b>13</b> |
| 2.1      | Plasma . . . . .                                      | 13        |
| 2.2      | Equações básicas . . . . .                            | 15        |
| 2.3      | Equilíbrio MHD e superfícies magnéticas . . . . .     | 16        |
| 2.4      | Fator de segurança . . . . .                          | 17        |
| 2.5      | Tokamaks e a aproximação cilíndrica . . . . .         | 19        |
| 2.6      | O limitador ergódico magnético . . . . .              | 22        |
| 2.7      | Descrição Hamiltoniana . . . . .                      | 23        |
| 2.8      | Cálculo da largura das ilhas magnéticas . . . . .     | 24        |
| 2.8.1    | Funções de fluxo $\psi_0$ e $\psi_1$ . . . . .        | 24        |
| 2.8.2    | Determinando a largura das ilhas magnéticas . . . . . | 26        |
| <b>3</b> | <b>Mapa de Ullmann</b>                                | <b>30</b> |
| 3.1      | Mapa . . . . .                                        | 30        |
| 3.2      | Mapa de Ullmann . . . . .                             | 32        |
| 3.2.1    | Um limitador . . . . .                                | 32        |
| 3.2.2    | N anéis limitadores . . . . .                         | 35        |
| 3.2.3    | Mapa perturbativo . . . . .                           | 37        |
| 3.2.4    | Discussão sobre o fator $a_1$ . . . . .               | 39        |
| 3.3      | Fator de segurança numérico . . . . .                 | 41        |
| 3.3.1    | Aprisionamento das linhas de campo . . . . .          | 41        |
| 3.4      | Transformada de Fourier . . . . .                     | 43        |
| <b>4</b> | <b>Resultados</b>                                     | <b>45</b> |
| 4.1      | Órbitas aprisionadas . . . . .                        | 45        |
| 4.2      | Padrões de escape . . . . .                           | 50        |
| 4.3      | Conjectura de Kroetz . . . . .                        | 58        |

|   |                              |    |
|---|------------------------------|----|
| 5 | Conclusões                   | 63 |
| A | Derivadas da função de fluxo | 66 |
|   | Referências                  | 67 |

# Capítulo 1

## Introdução

Um possível uso da fusão nuclear controlada para a produção de energia resultaria em vantagens inquestionáveis à sociedade, por exemplo, por ser uma fonte limpa e em termos práticos, inesgotável. Para que aconteça fusão nuclear é necessário que os núcleos dos átomos se fundam, o que exige vencer a barreira coulombiana existente entre eles e que pode ser realizada uma vez que os átomos possuam energia suficiente para isso. Uma forma de fornecer essa energia aos núcleos é por meio do aquecimento da matéria, que nessa temperatura encontra-se em estado de plasma.

Se quisermos manter o plasma aquecido e estável, não podemos confiná-lo através de fronteiras físicas. Felizmente, o plasma pode ser confinado por campos magnéticos e vários dispositivos foram propostos ao longo do tempo para cumprir essa tarefa. O dispositivo mais promissor, em termos de alcance de densidade e temperatura do plasma, para o confinamento é a máquina tokamak [1] [2]. Um tokamak consiste basicamente de uma câmara em formato de toroide, onde o plasma fica contido pela sobreposição dos campos magnéticos toroidal e poloidal [3] [4]. O primeiro é formado por uma corrente elétrica externa ao redor do tokamak, na direção poloidal, o segundo pela própria corrente de plasma que é criada por um campo elétrico, devido a uma variação de fluxo magnético no tokamak. Nesse tipo de dispositivo o plasma fica confinado em superfícies magnéticas toroidais concêntricas [5].

Dentro da câmara toroidal do tokamak, os íons e elétrons que compõem o plasma circulam ao redor das linhas de campo, enquanto seus centros de guia acompanham a direção das linhas. Desse ponto de vista, o confinamento de plasma resume-se ao estudo das linhas de campo. Como as linhas de campo magnético possuem uma descrição Hamiltoniana [6] [7], há uma variedade de trabalhos em que o estudo do confinamento é feito por meio das seções de Poincaré obtidas através de fluxos e mapas conservativos.

Mas o confinamento do plasma não é perfeito, partículas atingem a parede interna do tokamak. As interações entre as partículas do plasma e a parede resultam em impurezas que prejudicam a existência da coluna de plasma. Uma solução paliativa, já que a perda de partículas é inevitável, foi proposta por meio de um dispositivo, chamado de limitador

magnético ergódico, que cria um campo magnético perturbativo. Esse limitador causa ressonâncias magnéticas na configuração de equilíbrio que dão origem a ilhas magnéticas. O tamanho dessas ilhas cresce com a intensidade da corrente elétrica de perturbação, aumentando a região caótica a depender de quão forte é a intensidade. A finalidade da região caótica, que é formada na periferia da câmara toroidal, seria distribuir homogeneamente o escape das linhas de campo [8] [9] [10]. Entretanto, há trabalhos teóricos (simulações computacionais) e experimentais mostrando casos em que essa exigência não é atendida [11] [12] [13] [14]. Em contrapartida, esses padrões de escape podem ser manejados por meio da configuração de equilíbrio do campo magnético e pela escolha do modo de perturbação [15] [16].

Propusemo-nos, neste trabalho, a investigar o efeito de aprisionamento das linhas de campo magnético caóticas ao redor de ilhas, na borda do plasma, e verificar como essas ilhas influenciam o escape das linhas. Mostramos, também, como esses resultados variam com o perfil do campo magnético de equilíbrio. Toda essa análise foi feita utilizando um campo magnético perturbativo gerado por um limitador ergódico magnético composto por dois anéis, permitindo uma comparação mais adequada com outros resultados da literatura.

Como método de abordagem ao problema, adotamos o mapa de Ullmann [17], um mapa simplético bidimensional que descreve as intersecções das linhas de campo em uma seção da câmara toroidal perpendicular ao eixo magnético. A versão original desse mapa é para um limitador composto de um único anel e descreve um campo magnético com uma perturbação ressonante, somente com o número de onda poloidal definido. Para termos também um número de onda toroidal determinado, fizemos uma pequena modificação capaz de permitir a utilização de mais anéis.

No capítulo II apresentamos a teoria básica sobre o confinamento de plasma e discutimos as configurações do campo magnético de equilíbrio e perturbado.

No capítulo III apresentamos o mapa de Ullmann na sua versão original, perturbado por um limitador formado por um único anel. Em seguida, apresentamos o mapa modificado, que permite o uso de vários anéis limitadores. Terminamos o capítulo introduzindo o cálculo do número de rotação numérico e da transformada de Fourier, indispensáveis para as análises no capítulo seguinte. Discutimos também o efeito de aprisionamento das linhas de campo (*stickiness*) [18], ao redor das ilhas magnéticas.

No capítulo IV apresentamos os resultados sobre: o escape das linhas de campo, o aprisionamento (efeito *stickiness*) das linhas de campo, a existência de canais de escape e terminamos o capítulo discutindo uma conjectura a respeito da influência das cadeias de ilhas sobre o escape das linhas.

Por fim, no capítulo V, apresentamos nossas conclusões e sugestões de continuação do trabalho.

# Capítulo 2

## Confinamento Magnético

Este capítulo possui dois objetivos. O primeiro é apresentar o conhecimento básico sobre o confinamento do plasma em configurações toroidais, na aproximação cilíndrica. Para isso, é apresentada a teoria da magnetoidrodinâmica (MHD) e discutidas as configurações magnéticas de equilíbrio e perturbada que consideramos nas simulações. Essa primeira parte está longe de ser uma discussão exaustiva sobre confinamento. O segundo objetivo é fornecer as informações necessárias sobre o limitador magnético ergódico, para apresentar, no capítulo 3, o mapa de Ullmann usado nessa dissertação.

### 2.1 Plasma

O plasma, mesmo que passe despercebido, muitas das vezes, no dia-a-dia de uma pessoa comum, provavelmente por estar restrito às lâmpadas fluorescentes e televisões de plasma, é o estado da matéria mais comum no universo. Mais de 99% do universo encontra-se em estado de plasma [19]. Damos o nome de plasma às substâncias macroscopicamente neutras formadas por um aglomerado de elétrons livres e átomos ou moléculas ionizadas, com comportamento coletivo.

Poderia-se pensar que o plasma é apenas um gás ionizado. Porém, se assim fosse, não faria muito sentido chamá-lo de quarto estado da matéria. Diferentemente de um gás, um plasma pode facilmente conduzir corrente elétrica, absorver certos tipos de radiação e ser confinado por campos magnéticos.

Porém, existem critérios que uma substância precisa atender para ser chamada de plasma. Apresentaremos, agora, cada um deles [20]. O primeiro exige que as dimensões físicas  $L$ , características do plasma, sejam muito maiores que o comprimento de Debye,

$$L \gg \lambda_D. \quad (2.1)$$

O comprimento de Debye é tipicamente pequeno, da ordem de  $10^{-4}$  a  $10^{-3} m$  para plasmas confinados magneticamente.

Em um plasma, sem ação de forças externas, o comprimento de Debye é definido como o raio de uma esfera de comprimento  $\lambda_D$  que delimita o alcance dos campos elétricos. Isto é, qualquer campo elétrico com origem externa à esfera não será sentido por uma partícula elétrica que esteja em seu centro. Esse efeito deve-se ao comportamento de coletividade do plasma.

O segundo critério

$$n_e \lambda_D^3 \gg 1, \quad (2.2)$$

onde  $n_e$  é a densidade do número de elétrons, garante que os elétrons estejam próximos uns dos outros.

O terceiro critério assegura a neutralidade do plasma,

$$n_e = \sum_i n_i, \quad (2.3)$$

onde  $n_i$  é a densidade do número de íons.

O quarto, e último critério, está relacionado com a frequência de oscilação de um plasma em repouso que foi exposto a um campo elétrico externo. Esse campo, quando em atuação, provoca a separação entre as partículas positivas e negativas do plasma. Quando o campo externo é removido, os elétrons tendem a voltar para suas posições originais devido a um campo elétrico criado pela separação das partículas. Dessa forma, o plasma restaura sua condição de neutralidade. Mas devido à velocidade ganha ao dirigirem-se às suas posições de origem, os elétrons passam da posição de equilíbrio e começam a sofrer uma força no sentido oposto. O processo, descrito anteriormente, volta a acontecer agora no sentido contrário. Fica, assim, estabelecida a oscilação do plasma com frequência [21]

$$\omega_p = \left( \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Onde  $e$  é a carga do elétron,  $m_e$  a massa do elétron e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica no vácuo. Os valores típicos de  $\omega_p$  de interesse termonuclear são da ordem de  $10^{10}$  a  $10^{11} \text{ Hz}$ . Colisões entre os elétrons e partículas neutras tornam as oscilações amortecidas, diminuindo a amplitude de oscilação com o passar do tempo. Se as oscilações são fracamente amortecidas, é necessário que a frequência de colisões  $\nu_c$  seja menor que a frequência do plasma. O quarto critério fica, então, definido por

$$\nu_p > \nu_c, \quad (2.5)$$

onde  $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ .

Entre as aplicações tecnológicas envolvendo o uso de plasma está a produção de energia por meio da fusão nuclear controlada. A fusão nuclear consiste em fundir os núcleos de

dois átomos, mais leves, em um terceiro, mais pesado. Porém, nesse processo ocorre um desbalanço de massa, a soma da massa dos reagentes é maior que a massa do produto. Essa diferença de massa  $\Delta m$  é transformada em energia  $E$ , igual a  $E = \Delta mc^2$ .

Mas para que a fusão ocorra é preciso vencer a barreira coulombiana que impede que os núcleos se fundam. Essa barreira é superada uma vez em que os átomos atinjam energia cinética suficiente para atravessá-la. Como partículas altamente energéticas implicam em altas temperaturas (a temperatura característica de fusão é da ordem de  $10^8 K$ ), a substância (combustível) de fusão encontra-se no estado de plasma.

O confinamento desse plasma é um dos grandes desafios a ser vencido pela fusão termonuclear. Existem várias propostas de confinamento magnético, as mais conhecidas são aquelas que envolvem sistemas abertos e sistemas fechados.

Os sistemas abertos (espelhos magnéticos) são equipamentos em formato linear que confinam o plasma por meio de um campo magnético axial, impedindo que suas partículas atinjam as paredes, e com regiões onde há a convergência das linhas de campo (espelhos magnéticos) que reduzem a perda das partículas pelos extremos do equipamento [22].

Os sistemas fechados consistem numa configuração toroidal do campo magnético. Os mais estudados são os stellarators e os tokamaks. A principal diferença entre eles está na origem dos campos magnéticos no interior do toroide. As máquinas tokamaks (modo de confinamento que esta dissertação trata), aprisionam as partículas do plasma por meio de um campo magnético helicoidal que é formado pela sobreposição dos campos magnéticos toroidal e poloidal. O primeiro desses campos é formado por uma corrente externa que circula o vaso toroidal na direção poloidal. O segundo campo é criado pela corrente elétrica induzida no plasma.

Para que a geração de energia seja rentável, obviamente, a energia gasta para gerar e manter o plasma deve ser menor que aquela produzida. Há um critério, envolvendo a densidade do plasma  $n$ , o tempo de confinamento  $\tau$  e a temperatura  $T$ , chamado de Critério de Lawson que estabelece as condições mínimas de viabilidade do confinamento. Para o caso do deutério e trítio, o composto mais utilizado em tokamaks, devemos ter  $n\tau > 10^{20} m^{-3}s$  para  $T > 10^7 K$  [23]. O critério mostra que há alguma liberdade de escolha entre a densidade do plasma e o tempo de confinamento, desde que o critério seja satisfeito.

## 2.2 Equações básicas

Para descobrir e analisar as diferentes geometrias magnéticas adequadas ao confinamento do plasma, faz-se uso da teoria da magnetoidrodinâmica (MHD). As equações da magnetoidrodinâmica consistem num conjunto de equações da mecânica dos fluidos e do eletromagnetismo convenientes para descrever um plasma sob a ação de um campo magnético externo.

Esse conjunto descreve o plasma como um fluido condutor único. Ou seja, não faz distinção entre as partículas carregadas eletricamente: íons e elétrons. Desconsiderando a resistividade  $\eta$  do plasma, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (p/\rho^\gamma) = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

definindo as equações MHD ideal [24] [25].

As duas primeiras equações pertencem à mecânica dos fluidos. Onde Eq.(2.6) é a equação da conservação de massa. Sendo  $\rho$  a densidade do plasma e  $\mathbf{v}$  a sua velocidade. A segunda equação, Eq.(2.7), é a equação do movimento e considera o plasma sob influência de duas forças. Uma devido ao gradiente da pressão  $\nabla p$ , e a outra, à força de Lorentz, devido a ação do campo magnético externo  $\mathbf{B}$  sobre as partículas do plasma com densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . A terceira equação, Eq.(2.8), está relacionada com a evolução temporal da energia, onde  $\gamma$  é a razão entre os calores específicos.

As últimas três são equações do eletromagnetismo. Sendo a Eq.(2.9) a lei de Ampère, onde é desconsiderada a corrente de deslocamento. Já a Eq.(2.10) é a lei de Ohm, para o caso em que  $\eta = 0$ . Por fim, a Eq.(2.11) é a lei de Faraday.

## 2.3 Equilíbrio MHD e superfícies magnéticas

Para uma plasma confinado magneticamente, admite-se que ele esteja em um estado estacionário. Portanto, devemos considerar que  $\partial/\partial t = 0$  e  $\mathbf{v} = 0$  no conjunto de equações MHD ideal. Assim, na condição de equilíbrio o plasma satisfaz as equações [19] :

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.13)$$



e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.14)$$

Fazendo uso das equações anteriores é possível mostrar que as linhas de campo magnético e a densidade de corrente estão sobre superfícies isobáricas. Para isso, basta tomar o produto escalar, por  $\mathbf{J}$  e por  $\mathbf{B}$ , na Eq.(2.12). Assim,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot \nabla p = 0. \quad (2.15)$$

Portanto, se um plasma está confinado magneticamente, há superfícies, chamadas de superfícies magnéticas, onde a pressão é constante e onde, também, jazem as linhas de campo magnético e a densidade de corrente. Para um sistema com simetria toroidal, caso do tokamak, as superfícies magnéticas que se formam são toroides concêntricos. Ver ilustração na Fig.(2.1).



Figura 2.1: Pequeno segmento toroidal ilustrando o arranjo das superfícies magnéticas.

A existência de superfícies magnéticas permite definir uma função de fluxo  $\psi$  que é constante sobre essas superfícies. Isto é,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (2.16)$$

As funções de fluxo serão úteis no final deste capítulo, quando formos calcular a largura das ilhas magnéticas.

## 2.4 Fator de segurança

Para cada linha de campo magnético de um plasma confinado, podemos associar um número  $q$ , chamado de fator de segurança, que mede o quanto a linha de campo gira na direção poloidal a cada volta toroidal [26]. Essas direções podem ser vistas na Fig.(2.2).

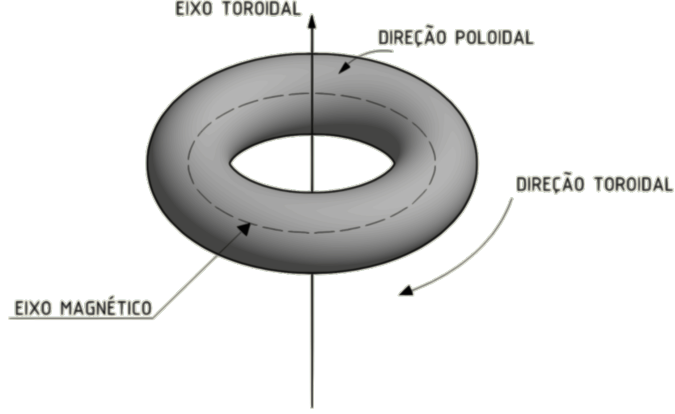


Figura 2.2: Direções toroidal e poloidal em um toroide.

Sendo assim, podemos expressar analiticamente o fator de segurança por

$$q \equiv \frac{2\pi}{\Delta\theta}, \quad (2.17)$$

onde  $\Delta\theta$  é a variação angular da coordenada poloidal ao longo de uma volta toroidal.

Na aproximação cilíndrica que usaremos, para um campo magnético  $\mathbf{B}$ , com componentes na direção poloidal e axial  $(0, B_\theta, B_z)$  obtemos, por meio da equação

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0, \quad (2.18)$$

onde  $d\mathbf{l}$  é um segmento diferencial da linha de campo, a relação

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{rB_z} \quad (2.19)$$

expressa em coordenadas cilíndricas.

Como

$$\Delta\theta = \int_{\theta(0)}^{\theta(2\pi R_0)} d\theta' = \int_0^{2\pi R_0} \frac{d\theta'}{dz} dz, \quad (2.20)$$

somos capazes, então, de relacionar o fator de segurança com o campo magnético de confinamento, por meio da expressão:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R_0} \frac{B_\theta}{rB_z} dz. \quad (2.21)$$

Na seção seguinte após estabelecermos explicitamente os campos magnéticos para o equilíbrio, seremos capazes de traçar o perfil do fator de segurança, por meio da Eq. (2.21).

## 2.5 Tokamaks e a aproximação cilíndrica

Tokamaks são máquinas em formato toroidal que confinam o plasma pela sobreposição de dois campos magnéticos. Seus parâmetros físicos característicos são o raio maior  $R_0$ , determinado pela distância do eixo toroidal ao eixo magnético e o raio menor  $b$ , distância do eixo magnético à parede do vaso toroidal. Um parâmetro muito utilizado é razão de aspecto  $\epsilon = R_0/b$ . Para tokamaks com  $\epsilon \gg 1$  é aceitável tratá-lo como um cilindro periódico de comprimento  $2\pi R_0$ . Exemplo, Fig.(2.3).

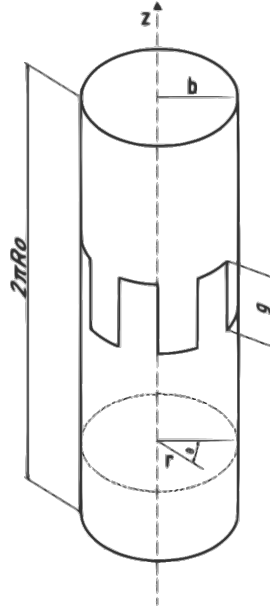


Figura 2.3: Aproximação cilíndrica para o tokamak, com limitador ergódico.

Nesta dissertação consideramos os parâmetros do tokamak TCABR, instalado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Trata-se de um tokamak de porte médio, de seção circular, aquecido ohmicamente [10]. Seus principais parâmetros podem ser visualizados na Tab.(2.1).

| Parâmetro                             | Símbolo | Valor numérico |
|---------------------------------------|---------|----------------|
| raio maior                            | $R_0$   | $0,61\ m$      |
| raio menor                            | $b$     | $0,21\ m$      |
| raio da coluna de plasma              | $a$     | $0,18\ m$      |
| campo toroidal de equilíbrio          | $B_0$   | $1,0\ T$       |
| fator de segurança na borda do plasma | $q(a)$  | $\geq 3,0$     |
| largura do limitador ergódico         | $g$     | $0,08\ m$      |

Tabela 2.1: Parâmetros do tokamak TCABR. [30]

O princípio básico de funcionamento de uma máquina tokamak consiste na criação de um campo magnético na direção toroidal,  $\mathbf{B}$ , obtido por meio de correntes externas que circundam a câmara na direção poloidal. Porém, apenas  $\mathbf{B}$  não é suficiente para confiná-lo [27], pois um campo magnético assim criado, possui um gradiente  $\nabla B$  que causa a

separação das partículas positivas e negativas na direção  $\mathbf{B} \times \nabla B$ , com velocidade de deriva (*drift*)  $\mathbf{V}_{\nabla B}$ :

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \frac{K_p}{qB} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}. \quad (2.22)$$

Essa separação de cargas gera um campo elétrico  $\mathbf{E}$ , levando as partículas a se movimentarem na direção  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , com velocidade de deriva  $\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.23)$$

fazendo com que as partículas atinjam a parede do tokamak. Na Eq.(2.22),  $K_p$  é a energia cinética das partículas eletricamente carregadas, em relação ao movimento na direção perpendicular às linhas de campo magnético e  $q$  é a carga da partícula.

Por esse motivo, é necessário também que exista um campo magnético na direção poloidal. Esse campo magnético é obtido pela própria densidade de corrente do plasma  $\mathbf{J}$ . Em todas as nossas simulações adotamos um perfil de densidade de corrente do tipo parabólico [28] [29]

$$\mathbf{J}(r) = j_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^\gamma \Theta(a - r) \hat{z}, \quad (2.24)$$

onde  $\Theta(a - r)$  é função de Heaviside que assume o valor um para  $r < a$  e é nula para  $r > a$ , onde  $a < b$  é a coluna de plasma. A constante  $\gamma$  (não confundir com a constante da Eq.(2.8)) fica determinada pelos valores do fator de segurança no centro do tokamak  $q(0)$  e na borda da coluna de plasma  $q(a)$ , a ordem de grandeza de  $\gamma$  é a mesma de  $q(a)$ .

A corrente elétrica induzida no plasma ocorre ao gerarmos um fluxo magnético, dependente do tempo, na região externa à câmara toroidal (círculo de raio  $R_0 - b$ ).

Vamos agora determinar a configuração do campo magnético de equilíbrio que será usada ao longo da dissertação. Consideraremos que o plasma está confinado em equilíbrio magnetoidrodinâmico num cilindro periódico, com período  $2\pi R_0$ , ver Fig.(2.3). Desconsideraremos qualquer efeito toroidal, portanto o campo magnético toroidal  $\mathbf{B}_0$  é homogêneo em todo o cilindro. O campo magnético  $\mathbf{B}_\theta$  pode ser obtido facilmente utilizando a lei de Ampère. Como a densidade de corrente, Eq.(2.24), só depende de  $r$ , assim também deverá ser com o campo. Logo,  $B(r) = \mu_0 I(r)/2\pi r$ . Onde,

$$I(r) = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.25)$$

determina a corrente que atravessa uma seção circular do cilindro com raio  $0 \leq r \leq b$ . Portanto, a intensidade do campo magnético  $\mathbf{B}_\theta$  é (o perfil característico desse campo pode ser visto na Fig.(2.4a))

$$B_\theta(r) = \frac{aB_\theta(a)}{r} \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{\gamma+1} \Theta(a - r) \right]. \quad (2.26)$$

O campo magnético na configuração de equilíbrio,  $\mathbf{B}$ , fica definido pela sobreposição desses dois campos

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\theta(r) \quad (2.27)$$

e as linhas de campo formadas possuem a forma de hélices.

Como agora há expressões para os campos poloidal e toroidal, podemos também escrever explicitamente uma função para o fator de segurança, na situação de equilíbrio, para o caso cilíndrico. Fazendo uso da Eq.(2.21), obtemos

$$q(r) = \frac{B_0 r}{R_0 B_\theta(r)}. \quad (2.28)$$

Na Fig.(2.4b) plotamos o perfil do fator de segurança, para o caso em que  $q(a) = 4$ , nota-se que ele é sempre monótono crescente. O perfil do fator de segurança é um fator relevante para o confinamento, pois influencia diretamente na topologia do campo magnético. O caso que escolhemos para representar graficamente pertence ao intervalo de valores de  $q(a)$  que utilizaremos nas simulações.

Na Tab.(2.1) o valor para  $\gamma$  não foi informado, porque utilizamos diferentes valores do fator de segurança na borda do plasma. Contudo, para evitar instabilidades o fator de segurança, no eixo magnético, foi sempre mantido em  $q(0) = 1$  e como  $\gamma$  está relacionado com  $q(0)$  e  $q(a)$  pela equação

$$q(0) = \frac{q(a)}{\gamma + 1}, \quad (2.29)$$

onde  $q(0) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} q(r)$ . Sempre que determinarmos  $q(a)$ , automaticamente  $\gamma$  ficará determinado.

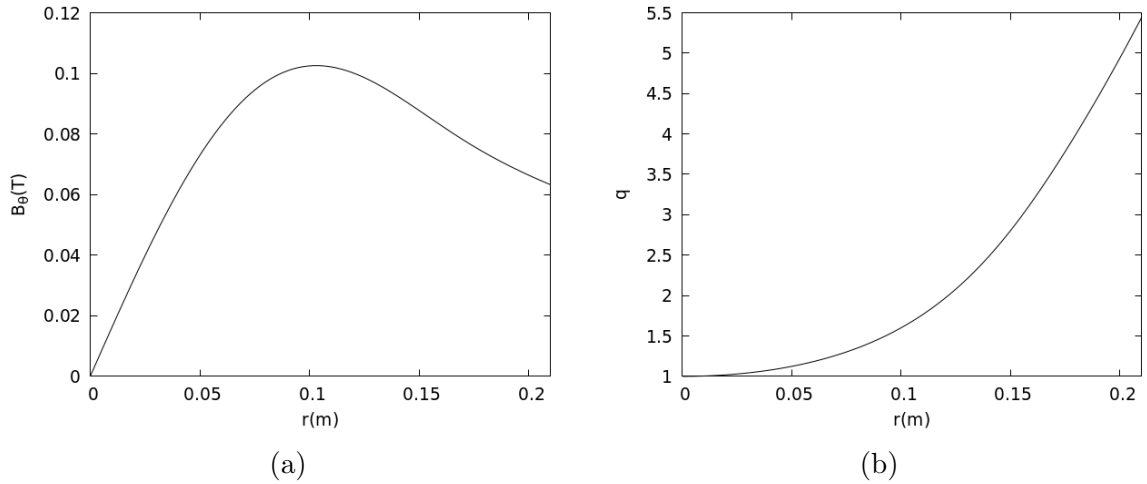


Figura 2.4: Na figura (a) está o perfil para  $B_\theta$ . Em (b) está o perfil do fator de segurança. Parâmetros do tokamak TCABR e  $q(a) = 4$ .

## 2.6 O limitador ergódico magnético

Interações do plasma com a parede da câmara toroidal levam impurezas ao plasma, podendo tornar o confinamento impraticável. Por exemplo, íons podem atingir a parede do tokamak, tornarem-se neutros, retornarem ao plasma e, novamente, se ionizarem e, eventualmente, retornarem à parede do tokamak. Repetindo o ciclo. Outra possibilidade, também causada por partículas que atingem as fronteiras do tokamak, é provocar o desprendimento de átomos que compõem a parede do tokamak. Este efeito é conhecido como efeito “*sputtering*” [23].

Essas interações são indesejadas, pois provocam perda de energia por radiação e uma significativa diluição da coluna de plasma. Porém, como o confinamento nunca é perfeito, não se pode evitar que partículas do plasma atinjam as fronteiras físicas internas da câmara toroidal. Como solução para amenizar esse efeito, há alguns métodos como o uso de diversores e limitadores físicos [23] [31].

Outra possibilidade é o uso de um limitador ergódico magnético. Um anel ou um conjunto de anéis, externos à câmara toroidal, produzem um campo magnético que gera ressonâncias em algumas das superfícies magnéticas [32]. A depender de quão fortes são essas perturbações, algumas superfícies magnéticas são destruídas, levando a uma camada de caos nas proximidades da parede do tokamak. A função dessa região caótica é isolar o plasma aquecido do vaso toroidal [33].

O modelo de limitador ergódico que consideramos possui largura  $g$ , tal que  $g \ll 2\pi R_0$ , e é composto de  $m$  pares de correntes elétricas  $I_h$  na direção toroidal, ver Fig.(2.3). O campo magnético gerado pela porção da corrente na direção poloidal é desprezado. Os primeiros limitadores ergódicos não foram propostos na forma de anéis. Eles consistiam em um conjunto de correntes, com sentidos alternados, enrolando a superfície da câmara toroidal de forma a copiar a helicidade das linhas de um campo na superfície com interesse em criar uma ressonância [34]. Esse método é inconveniente, pois subtrai espaço para instalação de janelas para medição do plasma.

A obtenção analítica para o campo magnético  $\mathbf{B}^{(1)}$  gerado pelo limitador ergódico, desconsiderando a existência do plasma, é obtida ao resolver o problema de  $m$  pares de fios transportando uma corrente  $I_h$ , com sentidos alternados para pares adjacentes, enrolados helicoidalmente em torno da câmara toroidal. Tomando, em seguida, o limite em que o passo de enrolamento dos fios é infinito. A dedução, por meio da solução do potencial magnético  $\Phi$ , através da equação de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$ , pode ser vista na referência [32]. As componentes do campo magnético do limitador são:

$$B_r^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 g m I_h}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \sin(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi j) \quad (2.30)$$

e

$$B_{\theta}^{(1)}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 g m I_h}{\pi b} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\phi - 2\pi j). \quad (2.31)$$

O aparecimento de função delta de Dirac, deve se ao fato do limitador ser muito menor que o comprimento do toroide  $g \ll 2\pi R_0$ . Portanto, o limitador é modelado matematicamente de forma a criar uma perturbação na linha de campo, somente na região onde ele está localizado. Dessa forma assumimos que a linha de campo percorre o interior da câmara toroidal sob ação do campo magnético de equilíbrio, mas quando passa na região onde o limitador está localizado sofre a ação do campo perturbativo.

## 2.7 Descrição Hamiltoniana

As linhas de campo magnéticas, responsáveis pelo confinamento do plasma numa geometria toroidal, podem ser estudadas por meio do formalismo Hamiltoniano. Desde que utilizemos um sistema de coordenadas conveniente [35].

Como mostrado anteriormente, no caso de um confinamento (em equilíbrio), as linhas de campo estão sobre superfícies magnéticas. Um modo de localizar um ponto da linha de campo seria determinando sua posição toroidal  $\phi$  (ângulo na direção do eixo magnético), sua posição poloidal  $\theta$  (ângulo na direção poloidal) e o valor do fluxo toroidal magnético  $\psi_t$ , determinado pela superfície magnética sobre qual está a linha de campo que desejamos localizar. Em resumo,  $(\psi_t, \theta, \phi)$  localiza um ponto da linha de campo univocamente. Como o campo magnético deve satisfazer

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad e \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \psi_p = 0. \quad (2.32)$$

É possível chegar às equações diferenciais [36]

$$\frac{d\psi_t}{d\phi} = -\frac{\partial\psi_p}{\partial\theta} \quad e \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial\psi_p}{\partial\psi_t}, \quad (2.33)$$

desde que  $\mathbf{B}$  seja escrito na forma de Clebsch. Onde  $\psi_p$  é o fluxo magnético poloidal na região formada entre o eixo magnético e a linha, com ângulo  $\theta$ , que se estende do eixo magnético à superfície magnética.

As equações acima possuem a mesma forma que aquelas de um sistema Hamiltoniano. Por analogia às equações de Hamilton,  $\psi_p$  é a Hamiltoniana,  $\psi_t$  o momento conjugado e  $\phi$  o tempo.

Para o caso de equilíbrio, onde  $\psi_p = \psi_p(\psi_t)$ . Obtemos,

$$\frac{d\psi_t}{d\phi} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\phi} = \omega(\psi_t) \quad (2.34)$$

onde,  $\omega(\psi_t)$  é o número de rotação e seu inverso é definido como o fator de segurança  $q$ .

O equilíbrio é um sistema integrável, com um grau de liberdade, e está escrito em variáveis de ângulo-ação. Cada trajetória do espaço de fase anda sobre um toro, com uma frequência  $\omega(\psi_t)$ . A adição do limitador pode ser descrita como uma perturbação  $\psi_1(\psi_t, \theta, \phi)$  no sistema original,

$$\psi(\psi_t, \theta, \phi) = \psi_p(\psi_t) + \psi_1(\psi_t, \theta, \phi), \quad (2.35)$$

dando origem a um sistema com um grau e meio de liberdade. Os toros racionais podem ser destruídos conforme a ressonância que a perturbação cria, dando origem às ilhas magnéticas no espaço de fase. Essas ilhas, quando sobrepostas, levam ao aumento de caos. Por outro lado, o teorema KAM garante que a maioria dos toros irracionais sobrevivam. O espaço de fase fica, dessa maneira, formado por trajetórias regulares, cadeias de ilhas e caos. No próximo capítulo apresentaremos seções de Poincaré características desse sistema.

## 2.8 Cálculo da largura das ilhas magnéticas

Já foi discutido que a ação do limitador ergódico sobre a configuração de equilíbrio provoca ressonâncias, levando ao surgimento de ilhas magnéticas. Mostraremos a dedução de uma expressão matemática que determina, de forma aproximada, a largura dessas ilhas magnéticas. Usaremos o conceito de funções de fluxo e consideraremos que a função de fluxo  $\psi$ , para a condição perturbada, é

$$\psi \approx \psi_0 + \psi_1 \quad (2.36)$$

onde  $\psi_0$  e  $\psi_1$  são funções de fluxo para a configuração de equilíbrio e para o limitador ergódico magnético, respectivamente, obtidas separadamente. Por isso, a aproximação na Eq.(2.36). Seguiremos de perto as referências [32] [37].

### 2.8.1 Funções de fluxo $\psi_0$ e $\psi_1$

Entretanto, antes de deduzirmos a expressão para a largura das ilhas magnéticas é preciso determinar explicitamente as funções de fluxo  $\psi_0$  e  $\psi_1$ . Vamos começar por  $\psi_0$ .

O campo magnético na condição de equilíbrio,

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z} + B_\theta \hat{\theta}, \quad (2.37)$$

possui simetria helicoidal, portanto as linhas de campo sobre cada superfície magnética seguem uma lei de enrolamento do tipo  $u = m\theta - kz = \text{constante}$ , onde  $k = n/R_0$  e  $m$  e  $n$  pertencem ao conjunto dos números naturais. Devemos deduzir uma função de fluxo



$\psi_0$  que seja constante sobre as superfícies magnéticas, por onde caminham as linhas de campo da configuração da Eq.(2.37). Essa condição é atendida se

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi_0 = 0. \quad (2.38)$$

Como o campo magnético pode sempre ser determinado por um potencial vetorial  $\mathbf{A}$ , tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.39)$$

teremos, no caso mais geral, que as componentes do campo magnético para o confinamento em equilíbrio (em coordenadas cilíndricas) são:

$$B_r = \frac{m}{r} \frac{\partial A_z}{\partial u} + k \frac{\partial A_\theta}{\partial u}, \quad (2.40)$$

$$B_\theta = -k \frac{\partial A_r}{\partial u} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (2.41)$$

e

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial A_r}{\partial u}. \quad (2.42)$$

Onde  $\frac{\partial}{\partial \theta} = m \frac{\partial}{\partial u}$  e  $\frac{\partial}{\partial z} = -k \frac{\partial}{\partial u}$ .

Pode-se verificar por substituição que

$$\psi_0(r, u) = m A_z(r, u) + k r A_\theta(r, u) \quad (2.43)$$

é solução da Eq.(2.38) [37].

A função de fluxo determinada pela Eq.(2.43) refere-se ao caso mais geral, onde  $B = B(r, u)$ . Devemos impor algumas restrições a ela, pois o campo magnético de equilíbrio que estamos considerando é da forma  $B = B(r)$ .

Assim, considerando as Eqs.(2.37, 2.40 - 2.42), devemos ter

$$B_r = 0, \quad (2.44)$$

$$B_\theta = -\frac{dA_z}{dr} \quad (2.45)$$

e

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r A_\theta) = B_0. \quad (2.46)$$

Também, concluímos que a função de fluxo para o equilíbrio depende somente de  $r$ ,  $\psi_0 = \psi_0(r)$ . Logo,

$$\frac{d\psi}{dr} = -m B_\theta + k r B_0. \quad (2.47)$$

Donde, integrando, obtemos finalmente uma expressão para  $\psi_0$ ,

$$\psi_0(r) = \frac{kr^2 B_0}{2} - m \int_0^r B_\theta(r') dr'. \quad (2.48)$$

A função de fluxo para o limitador é obtida de um modo análogo ao considerar as Eqs.(2.30) e (2.31), para o campo magnético do limitador ergódico. Vamos nos restringir, somente, a apresentar o modo  $\psi_{mn}$  da expansão de Fourier de  $\psi_1(r, \theta, u)$ ,

$$\psi_1(r, \theta, z) = \sum_{m,n} \psi_{mn}(r) e^{i(m\theta - n\phi)}. \quad (2.49)$$

O modo  $\psi_{mn}$ , após desprezarmos os termos que não contribuem para a ressonância, é dado pela expressão [32]

$$(\psi_1)_{m/n}(r, u) = \frac{\mu_0 m I_h g}{2\pi^2 R_0} \left(\frac{r}{b}\right)^m \cos(u). \quad (2.50)$$

## 2.8.2 Determinando a largura das ilhas magnéticas

A ressonância acontece onde a helicidade do modo  $\psi_{m,n}$  coincide com a helicidade de alguma das superfícies magnéticas. Portanto, fazendo uso da aproximação (2.36), vamos considerar a função de fluxo  $\Psi_{m/n}$  determinada pela soma da função de fluxo de equilíbrio mais  $(\psi_1)_{m/n}$ . Assim,

$$\Psi_{m/n} = \psi_0 + (\psi_1)_{m/n}. \quad (2.51)$$

Como estamos interessados em olhar para a região onde ocorre a ressonância, devemos considerar a região em torno de  $r = r_{m/n}$ , tal que,  $q(r_{m/n}) = m/n$  na condição de equilíbrio.

Por isso, faremos uma expansão de Taylor de  $\Psi_{m/n}$  em torno de  $r_{m/n}$ . Dessa maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi(r, u)_{m/n} \approx \psi_0(r_{m/n}) + (\psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, u) + \psi_0'(r_{m/n})(r - r_{m/n}) + \\ \frac{1}{2} \psi_0''(r - r_{m/n})^2 = \text{constante}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde houve truncamento de  $\psi_0$  no termo de segunda ordem e, de  $(\psi_1)_{m/n}$  no termo de ordem nula. Termos de ordem maior em  $(\psi_1)_{m/n}$  não foram considerados, por serem desprezíveis.

Há algumas simplificações que podem ser feitas na Eq.(2.52). Primeiro,  $\psi_0(r_{m/n}) =$

constante, porque está sobre uma superfície magnética. Depois,  $\psi'_o(r_{m/n}) = 0$ , pois

$$\frac{d\psi_o}{dr} = \frac{B_o}{R_o} r \left[ n - \frac{m}{q(r)} \right] \quad (2.53)$$

e como estamos lidando, justamente, com o caso  $q(r_{m/n}) = m/n$ , temos que  $\psi'_o(r) = 0$  para  $r = r_{m/n}$ .

Portanto, podemos reescrever a Eq.(2.52) da seguinte maneira

$$r - r_{m/n} = \sqrt{\frac{2[K - (\psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, u)]}{\psi''_o(r_{m/n})}}, \quad (2.54)$$

onde  $K$  é o agrupamento de todas as constantes na Eq.(2.52).

Se fixarmos um valor para  $z$ , que por critérios de simplificação, adotaremos como  $z = 0$ , poderemos plotar as intersecções das superfícies magnéticas com o plano  $z = 0$ . A figura formada é semelhante ao espaço de fase do oscilador harmônico simples para diferentes valores de energia.

Logo, a Eq.(2.54) gera curvas de libração ou rotação dependendo do valor que  $K$  assume, o que nos possibilita estimar um valor para a semi-largura das ilhas por elas formadas.

Usaremos o formalismo Hamiltoniano para determinar e classificar os pontos fixos. Dessa maneira é possível localizar o centro das ilhas (pontos elípticos) e os pontos pertencentes à separatriz (pontos hiperbólicos).

A função  $\Psi_{m/n}$  tem um caráter Hamiltoniano, onde  $r$  é o momento conjugado e  $\theta$  a coordenada conjugada. Vamos adotá-la como a Hamiltoniana do sistema,

$$\Psi(r, u)_{m/n} = \psi_0(r_{m/n}) + (\psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, u) + \psi'_0(r_{m/n})(r - r_{m/n}) + \frac{1}{2}\psi''_o(r - r_{m/n})^2. \quad (2.55)$$

Os pontos fixos, ou estacionários,  $(\bar{r}, \bar{\theta})$  são determinados por

$$\left. \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial r} \right|_{(\bar{r}, \bar{\theta})} = 0 \quad (2.56)$$

e

$$\left. \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial \theta} \right|_{(\bar{r}, \bar{\theta})} = 0. \quad (2.57)$$

Essas expressões nos levam a  $(\bar{r}, \bar{\theta}) = (r_{m/n}, p\pi/m)$ , onde  $p \in N$ .

Estamos perto de encontrar uma expressão para a semi-largura das ilhas. Precisamos, agora, classificar os pontos fixos, porque a semi-largura das ilhas será determinada pela diferença entre os momentos conjugados do ponto elíptico e da separatriz.

A classificação dos pontos fixos se dá por meio da resolução da equação  $\det[J(\bar{r}, \bar{\theta}) - \lambda I] = 0$ . Onde  $J$  é o jacobiano definido por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Resolvendo esse determinante, obtemos

$$\lambda^2 - \psi_0''(r) \frac{\mu_0 m^3 I_h g}{2\pi^2 R_0} \left( \frac{r_{m/n}}{b} \right) \cos(p\pi) = 0. \quad (2.59)$$

Afirmamos aqui que  $\psi_0'' > 0$ , no apêndice A há uma discussão sobre o sinal dessa função.

Se  $p$  é par, então  $\lambda$  é real. Mas se  $p$  é ímpar,  $\lambda$  é imaginário. Assim, para  $\lambda$  real, o ponto é hiperbólico e para  $\lambda$  imaginário, o ponto é elíptico [38]. O trabalho de classificar os pontos fixos está feito.

Falta determinar o valor da constante  $K$  de modo que Eq.(2.54) trace a separatriz. O valor que  $K$  deve assumir, fica determinado pelo valor que a Hamiltoniana  $\Psi_{m/n}$  assume no ponto hiperbólico, vamos considerar o ponto hiperbólico  $(r_{m/n}, 0)$  (qualquer outro ponto hiperbólico poderia ter sido escolhido). Portanto, a Hamiltoniana assume o valor:

$$\Psi_{m/n}(r_{m/n}, 0) = \psi_0(r_{m/n}) + (\Psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, 0) \quad (2.60)$$

logo,  $K = (\psi_1)_{m/n}(r_{m/n}, 0)$ .

Dessa maneira, por meio da Eq.(2.54), obtemos

$$r - r_{m/n} = \sqrt{\frac{2k_{m/n}[1 - \cos(m\theta)]}{\psi_0''(r_{m/n})}} \quad (2.61)$$

onde,

$$k_{m/n} = \frac{\mu_0 m I_h g}{2\pi^2 R_0} \left( \frac{r_{m/n}}{b} \right)^m. \quad (2.62)$$

Precisamos, agora, descobrir para qual valor de  $\theta$ ,  $r - r_{m/n}$  é máximo, pois isso nos dará o valor da semi-largura da ilha  $\Delta r_{m/n}$ . Basta, então, usarmos o valor da coordenada  $\theta$  do ponto elíptico  $(r_{m/n}, \pi)$ , (poderíamos ter escolhido qualquer outro ponto elíptico). Obtemos dessa forma a semi-largura da ilha

$$\Delta r_{m/n} = \sqrt{\frac{2[k_{m/n} + k_{m/n}]}{\psi_0''(r_{m/n})}} \quad (2.63)$$

ou ainda, de forma mais explícita,

$$\Delta r_{m/n} = \sqrt{\frac{2\mu_0 m I_h g}{\pi^2 R_o \psi_o''(r_{m/n})} \left(\frac{r_{m/n}}{b}\right)^m}. \quad (2.64)$$

O tamanho da ilha é então proporcional à  $\sqrt{I_h}$  e a  $\sqrt{(r_{m/n})^m}$ . Isso implica em um aumento da largura da ilha com o aumento da corrente perturbativa e também numa dificuldade para a formação de cadeias nas superfícies com valores mais baixos de  $q$  (cadeias na região mais interna ao plasma serão, a priori, menores).

A largura da ilha depende ainda do *shear* do campo magnético, representado pela segunda derivada da função de fluxo do equilíbrio. Assim, o gradiente do fator de segurança também influencia a largura da ilha.

# Capítulo 3

## Mapa de Ullmann

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, o mapa de Ullmann na sua versão original que simula a dinâmica das linhas de campo sob a ação de um único limitador ergódico. Em seguida, apresentamos as modificações necessárias para permitir que mais limitadores sejam implementados. Posteriormente, na segunda parte deste capítulo, há uma discussão sobre o parâmetro de correção toroidal do mapa de Ullmann e os métodos do cálculo do fator de segurança e da transformada de Fourier são apresentados. Estes serão de grande valia no capítulo seguinte. Aproveitamos, ainda, este capítulo para comentar sobre um efeito muito comum em sistemas Hamiltonianos chamado de aprisionamento (*stickiness*) e que possui papel importante no capítulo seguinte.

### 3.1 Mapa

Sistemas Hamiltonianos integráveis, quando descritos por variáveis de ação e ângulo, tornam a análise do espaço de fase menos complexa. Se restringirmos a discussão aos problemas com dois graus de liberdade, o espaço de fase fica determinado por meio de um toroide, onde as variáveis de ação  $J_1$  e  $J_2$  representam os raios maior e menor do toroide e os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , os ângulos ao longo do eixo toroidal e circular.

Se fixarmos  $\theta_1$  e construirmos um plano que corte o toroide perpendicular ao eixo circular, definimos uma seção de Poincaré. Cada ponto  $(J_2, \theta_2)$  nessa seção irá retornar a ela após uma volta toroidal, marcando um outro ponto na seção.

Isto permite que o sistema, inicialmente contínuo, seja discretizado por meio de um mapa

$$X_{n+1} = M(X_n). \quad (3.1)$$

Onde  $X_n$  é o  $n$ -ésimo ponto na seção de Poincaré,  $M$  é o mapa e  $X_{n+1}$ , o  $(n + 1)$ -ésimo ponto na seção de Poincaré.

Um mapa twist, construído como descrito acima, é da seguinte forma [39]:

$$J_{n+1} = J_n \quad (3.2)$$

e

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega(J_n). \quad (3.3)$$

Onde os subíndices nas variáveis  $J$  e  $\theta$  representam agora as iterações e  $\omega$  é uma função monotônica de  $J_n$ . Cada valor de  $J$  determina um valor para  $w$ , que é chamado de número de rotação. Se  $w$  é racional, a seção de Poincaré fica marcada por um certo número finito de pontos ao longo de um círculo e a órbita é periódica. Entretanto, se  $w$  é irracional, a órbita é quase periódica, e a seção de Poincaré é marcada por um número infinito de pontos ao longo de um círculo.

O modo mais geral de descrever esse mapa, quando sob a ação de uma perturbação, é

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(J_n, \theta_n) \quad (3.4)$$

e

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega(J_n) + \epsilon g(J_n, \theta_n), \quad (3.5)$$

onde  $\epsilon$  é um coeficiente de perturbação.

Para garantirmos que o mapa continue sendo conservativo, devemos impor que o jacobiano  $J$  (determinante da matriz jacobiana),

$$J \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

seja unitário, e para continuar sendo twist, devemos impor que

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} \neq 0. \quad (3.7)$$

Como as linhas de campo magnético, no confinamento do plasma em equilíbrio, constituem um sistema Hamiltoniano integrável e como estamos usando um perfil de fator monotônico, podemos fazer uso de mapas do tipo twist para descrever a dinâmica dessas linhas ao longo da câmara toroidal.

É exatamente isso o que faremos na seção seguinte, ao apresentarmos o mapa de Ullmann.

## 3.2 Mapa de Ullmann

### 3.2.1 Um limitador

O mapa de Ullmann é um aprimoramento do mapa de Viana, cuja função era descrever as linhas magnéticas num tokamak, levando em conta os efeitos da geometria toroidal, perturbadas por um campo magnético de um limitador ergódico. As mudanças realizadas nesse mapa tornam-o simplético e permitem a convergência de algoritmos que exigem um grande número de iterações como, por exemplo, o fator de segurança e o expoente de Lyapunov [17].

Para assegurar que o novo mapa fosse simplético, Kai Ullmann [40], propôs uma função geratriz capaz de reproduzir o mapa de Viana no equilíbrio para o caso cilíndrico. Em seguida, acrescentou uma correção, na forma de uma outra função geratriz adicionada à primeira, para tratar os efeitos da geometria toroidal sob o campo magnético de equilíbrio. No restante dessa subseção, reproduziremos os passos tomados por Ullmann para a obtenção desse novo mapa.

O mapa de Viana, para o equilíbrio e com simetria cilíndrica, é dado pelas expressões [32]:

$$r_n^* = r_n \quad (3.8)$$

e

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n)}. \quad (3.9)$$

Onde  $(r_n, \theta_n)$  é a posição inicial da linha de campo, no plano onde é definido a seção de Poincaré, e  $(r_n^*, \theta_n^*)$  é a posição, neste mesmo plano, após uma iteração. O jacobiano deste mapa, que é facilmente calculado, é igual a um. Portanto, o mapa é conservativo e deve existir uma função geradora para ele. Logo, se introduzirmos uma função geradora do tipo

$$G_{cil.}(r_n^*, \theta_n) = \theta_n r_n^* + 2\pi \int_0^{r_n^*} \frac{dx}{q(x)}. \quad (3.10)$$

Vemos que ao utilizarmos as expressão [41]

$$\frac{\partial G_{cil.}}{\partial r_n^*} = \theta_n^* \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial G_{cil.}}{\partial \theta_n} = r_n, \quad (3.12)$$

que relacionam as variáveis antigas  $(r_n, \theta_n)$  com as novas, reobtemos o mapa:

$$\theta_n^* = \frac{\partial G_{cil.}}{\partial r_n^*} = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n^*)} \quad (3.13)$$



$$r_n = \frac{\partial G_{cil.}}{\partial \theta_n} = r_n^*. \quad (3.14)$$

Entretanto, este mapa corresponde ao caso cilíndrico. Para dar conta dos efeitos toroidais, uma modificação na função geratriz citada anteriormente é sugerida. Mas o novo mapa deve atender a certos critérios: ser simplético, tender ao caso cilíndrico quando  $b/R_0 \rightarrow 0$  e possuir perfil do fator de segurança semelhante aos observados em tokamaks. A primeira exigência é automaticamente satisfeita, por estarmos deduzindo um novo mapa por meio de uma função geratriz. As outras duas exigências podem ser satisfeitas, se tomarmos como nova função geratriz a expressão [17]:

$$G_{tor.}(r_n^*, \theta_n) = G_{cil.}(r_n^*, \theta_n) + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_l \left( \frac{r_n^*}{R_0} \right)^l \cos^l \theta_n. \quad (3.15)$$

A sugestão acima para  $G_{tor.}$  é bastante razoável, porque os  $\bar{a}_l$ 's podem ser ajustados de forma que o novo mapa tenha o perfil do fator de segurança semelhante ao de um tokamak, e a redução ao caso cilíndrico ocorre devido ao termo  $(r_n^*/R_0)^l$ . Mantendo apenas o termo  $\bar{a}_1$ , por questões de simplicidade, e utilizando novamente as Eqs.(3.11) e (3.12), obtemos o mapa conservativo com correções toroidais:

$$r_n^* = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n} \quad (3.16)$$

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n^*)} + a_1 \cos \theta_n, \quad (3.17)$$

onde  $a_1 = \bar{a}_1/R_0$ . Se considerarmos um perfil de fator de segurança monotônico, como é o nosso caso, o mapa é twist e a correção toroidal, conforme comparação com as Eqs.(3.4) e (3.5), pode ser vista como uma perturbação no mapa, Eqs.(3.8, 3.9). Ainda por comparação, encontramos a relação  $\omega = 1/q$ .

Procedimento semelhante ao que acabamos de fazer será executado agora para obtermos o mapa de perturbação, devido à ação do limitador ergódico. Devemos, portanto, encontrar uma função geradora para o mapa perturbativo, mas sem nos preocuparmos com os efeitos toroidais desta vez, porque estamos considerando o caso onde  $g/2\pi R_0 \ll 1$ , isto é, a largura do limitador ergódico é muito menor que o comprimento da câmara toroidal.

Novamente, auxiliado pelo mapa de Viana, com a diferença que utilizaremos o mapa perturbativo, vamos deduzir um mapa simplético que descreva o efeito do limitador ergódico sobre as linhas de campo no equilíbrio. O mapa de Viana perturbado é [32]

$$r_{n+1} = r_n^* - bC \left( \frac{r_n^*}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n^*) \quad (3.18)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - C \left( \frac{r_n^*}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n^*), \quad (3.19)$$

onde  $C$  é uma constante adimensional,

$$C = \frac{2\epsilon m g a^2}{q(a) R_0 b^2}, \quad (3.20)$$

e  $(r_n^*, \theta_n^*)$  é a posição da linha de campo imediatamente antes de passar pelo limitador e  $(r_{n+1}, \theta_{n+1})$  é a posição da linha de campo imediatamente após sair do limitador e, ainda,  $\epsilon = I_h/I_p$ .

O jacobiano desse mapa não é unitário. Por isso, como já comentado, vamos adotar o mesmo procedimento feito para o mapa de equilíbrio para torná-lo simplético.

Vamos considerar uma função geradora perturbada  $G_{pert.}$  do tipo:

$$G_{pert.} = G_{pert.}(r_{n+1}, \theta_n^*). \quad (3.21)$$

Considerando a variação angular mais relevante que a variação radial, vamos adotar a aproximação  $r_n^* \approx r_{n+1}$ . Dessa maneira, obtemos:

$$G_{pert.} = \int dr_{n+1} \theta_{n+1}(r_{n+1}, \theta_n^*). \quad (3.22)$$

Logo,

$$G_{pert.} = \theta_n^* r_{n+1} - \frac{Cb}{m-1} \left( \frac{r_{n+1}}{b} \right) \cos(m\theta_n^*). \quad (3.23)$$

De  $r^* = \frac{\partial G_{pert.}}{\partial \theta_n^*}$ , obtém-se a evolução da coordenada radial

$$r_n^* = r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1} \left( \frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n^*). \quad (3.24)$$

De  $\theta_{n+1} = \frac{\partial G_{pert.}}{\partial r_{n+1}}$ , a evolução da coordenada poloidal

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - C \left( \frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n^*). \quad (3.25)$$

As Eqs.(3.16), (3.17), (3.24) e (3.25) determinam o mapa de Ullmann perturbado. Para a  $n$ -ésima interação, com origem  $(r_n, \theta_n)$  na seção de Poincaré, obtemos a evolução toroidal da linha de campo  $(r_n^*, \theta_n^*)$  por meio das Eqs.(3.16) e (3.17). Responsáveis por descrever as linhas de campo na configuração de equilíbrio. Para obtermos um novo ponto  $(r_{n+1}, \theta_{n+1})$  na seção, utilizamos as Eqs.(3.24) e (3.25) que descrevem a perturbação na linha de campo devido ao limitador ergódico.

Na Fig.(3.1) seções de Poincaré são mostradas para o mapa de equilíbrio e perturbado, para o caso em que  $a_1 = -0,02$ ,  $q(a) = 5$ ,  $m = 5$  e  $I_h = 4000$  A. Representamos o mapa de equilíbrio em coordenadas polares (normalizadas)  $X_p = r \cos \theta / b$  e  $Y_p = r \sin \theta / b$ ,

permitindo dessa maneira visualizar o deslocamento das superfícies magnéticas em relação ao eixo magnético, este descolamento é previsto pela equação de Grad-Shafranov [5].

A seção para o mapa perturbado pelo limitador está representada em coordenadas cartesianas (normalizadas), facilitando a visualização das cadeias de ilhas. Adotamos  $x = \theta/(2\pi)$  e  $y = (b - r)/b$ , e sempre que estivermos lidando com o mapa perturbado representaremos as seções de Poincaré dessa maneira. Para a criação de Fig.(3.1b), selecionamos por volta de 20 condições iniciais em uma reta perpendicular ao eixo  $x$  e iteramos cada condição inicial até, no máximo, 5000 iterações.

Vemos que as principais cadeias formadas são as cadeias 4/1, 5/1 (cadeia que esperávamos visualizar devido a perturbação  $m = 5$ ) e 6/1. Com uma cadeia  $r/s$ , onde  $r$  e  $s$  são dois números naturais, queremos dizer a formação de uma cadeia composta por  $r$  ilhas, onde as cadeias são visitadas pulando-se  $s$  ilhas a cada iteração.

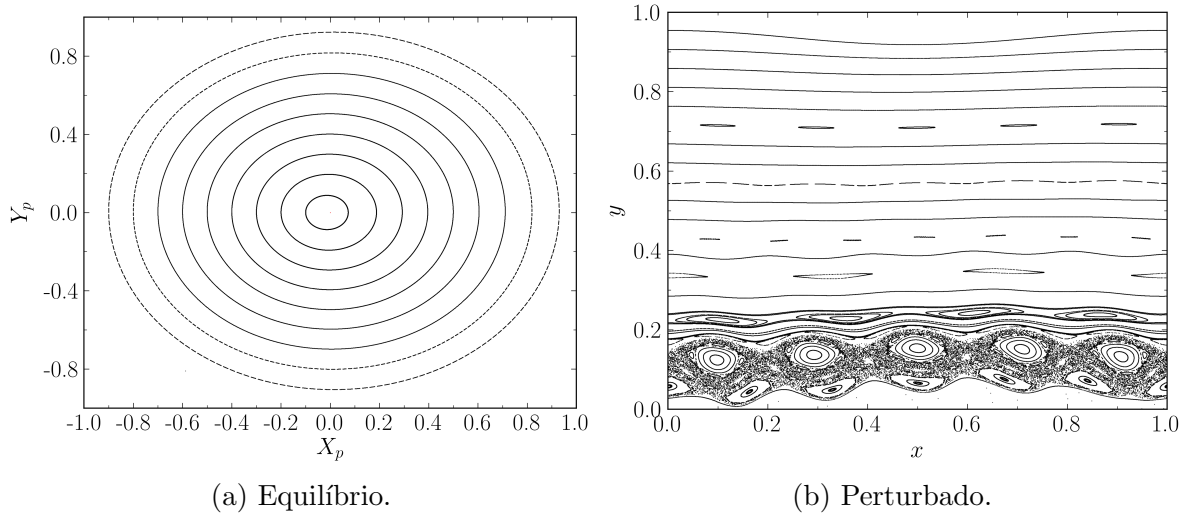


Figura 3.1: Seções de Poincaré geradas pelo mapa de Ullmann nas situações de confinamento do plasma no equilíbrio e perturbado. Para  $q(a) = 5$ ,  $m = 5$ ,  $I_h = 4000$  A e  $a_1 = -0.02$ .

### 3.2.2 N anéis limitadores

Quais modificações devem ser feitas no mapa de Ullmann, se quisermos aplicá-lo a um limitador formado por  $N$  anéis? Antes de começarmos as modificações, vamos estabelecer que os  $N$  anéis limitadores ficarão dispostos em intervalos toroidais  $\Delta\phi$ , igualmente espaçados. Onde  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$ .

A primeira modificação a ser feita é sobre a evolução das linhas de campo na região entre os anéis limitadores. Para isso, precisamos redefinir o mapa de equilíbrio, considerando agora a existência de mais de um limitador.

De,

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

temos que (*no caso cilíndrico*):

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_0} \quad (3.27)$$

e

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta(r)}{rB_0}. \quad (3.28)$$

Como a componente radial do campo magnético de equilíbrio é nula, concluímos da Eq.(3.27) que a posição radial de uma linha de campo não depende de  $z$ . Ou seja, a posição inicial  $(r, \theta)$  e final  $(r^*, \theta^*)$  de uma linha de campo entre dois limitadores consecutivos é tal que  $r^* = r$ . Integrando a equação (3.28), obtém-se uma relação entre  $\theta$  e  $\theta^*$ . Devido a inserção de mais anéis limitadores, devemos fazer a integração no intervalo  $[\phi, \phi + \Delta\phi]$  (no caso de um único limitador integraríamos no intervalo  $[0, 2\pi]$ ). Assim

$$\int_{\theta}^{\theta^*} d\theta' = \int_{\phi}^{\phi + \Delta\phi} \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_0} d\phi', \quad (3.29)$$

onde utilizamos o fato que  $dz = R_0 d\phi'$ . Logo, o mapa para a evolução da linhas de campo entre dois limitadores é:

$$r^* = r \quad (3.30)$$

$$\theta^* = \theta + \frac{2\pi}{Nq(r)}. \quad (3.31)$$

Este mesmo mapa pode ser deduzido da função geratriz

$$G_{cil.}(r^*, \theta) = \theta r^* + \frac{2\pi}{N} \int_0^{r^*} \frac{d\eta}{q(\eta)}. \quad (3.32)$$

Conforme proposto em [40], para considerarmos o efeito toroidal vamos acrescentar um termo de correção na Eq.(3.32). Assim, a função geratriz para o mapa com correção toroidal fica determinada pela Eq.(3.33):

$$G_{tor.}(r^*, \theta) = G_{cil.}(r^*, \theta) + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_l \left( \frac{r^*}{R_0} \right)^l \cos^l \theta. \quad (3.33)$$

Essa expressão gera o mapa de equilíbrio com correção toroidal para linhas de campo que sofrem um deslocamento toroidal  $\Delta\phi$ .

Usando as definições (3.34), (3.35) e fazendo a aproximação  $\bar{a}_l = 0$  para  $l > 1$

$$r = \frac{\partial G_{tor.}}{\partial \theta} \quad (3.34)$$

$$\theta^* = \frac{\partial G_{tor.}}{\partial r^*} \quad (3.35)$$

obtemos o mapa,

$$r^* = \frac{r}{1 - \frac{1}{N}a_1 \sin \theta} \quad (3.36)$$

$$\theta^* = \theta + \frac{2\pi}{Nq(r^*)} + \frac{1}{N}a_1 \cos \theta, \quad (3.37)$$

onde  $a_1 \equiv \bar{a}_1/R_0$ .

Logo, partindo de uma posição  $\mathbf{X}_i = (r_i, \theta_i)$  na seção de Poincaré, devemos iterar o mapa  $N$  vezes, até retornarmos a uma nova posição  $\mathbf{X}_f = (r_f, \theta_f)$ .

### 3.2.3 Mapa perturbativo

O objetivo em utilizar mais anéis limitadores é reproduzir uma perturbação com modo  $(m, n)$ . Sabemos que esse tipo de perturbação ocorre para fios (conduzindo corrente elétrica) enrolados em torno do tokamak, de forma a darem  $m$  voltas poloidais e  $n$  voltas toroidais, antes de se fecharem em si mesmos [42]. Sabemos ainda que uma perturbação de modo  $(m, n)$  ocorre na superfície magnética com fator de segurança  $q = m/n$ . E, lembrando que

$$q(r) = \frac{2\pi}{i(\theta)}, \quad (3.38)$$

onde  $i(\theta)$  é variação poloidal da linha de campo numa volta toroidal. Temos que,

$$i(\theta) = 2\pi \frac{n}{m} \quad (3.39)$$

é o quanto um fio deveria girar na direção poloidal, numa volta toroidal, para perturbar a superfície com  $q = m/n$ .

Agora, para emular esse mesmo efeito com  $N$  anéis, devemos impor uma defasagem  $\Delta\theta$ , na variável  $\theta$  do mapa de perturbação, entre limitadores vizinhos. A defasagem é dada pela expressão:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \frac{n}{m}. \quad (3.40)$$

Portanto, a correção na variável  $\theta$  do mapa perturbativo é [32]

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta \quad (3.41)$$

onde,  $j = 1, \dots, N$ .

A expressão (3.41) pode ainda ser reescrita de um modo mais conveniente para o nosso propósito:

$$\theta_j = \theta_1 + (j - 1)\Delta\theta. \quad (3.42)$$

Precisamos, agora, determinar o mapa para a perturbação dos limitadores. A função geratriz desse novo mapa pode ser obtida com o auxílio do mapa perturbativo de Viana [32], a mesma que utilizamos ao deduzir o mapa de Ullmann, acrescida da defasagem poloidal que deve existir entre os limitadores, Eq.(3.41). Assim, as duas equações seguintes:

$$r_j = r_j^* - bC \left( \frac{r_j^*}{b} \right)^{m-1} \text{sen}[m(\theta_j^* + (j - 1)\Delta\theta)] \quad (3.43)$$

e

$$\theta_j = \theta_j^* - C \left( \frac{r_j^*}{b} \right)^{m-2} \cos[m(\theta_j^* + (j - 1)\Delta\theta)], \quad (3.44)$$

representam um primeiro mapa perturbativo para cada limitador  $j$ , t.q.  $j = 1, 2, \dots, N$ . Onde  $(r_j^*, \theta_j^*)$  é a posição da linha de campo que entra no  $j$ -ésimo limitador, e  $(r_j, \theta_j)$  a posição da linha de campo que sai do  $j$ -ésimo limitador.

Para que o mapa também seja conservativo, precisamos que ele derive de uma função geratriz  $G_{pert.}(r_j, \theta_j^*)$ . A função geratriz que queremos, dado que  $\theta_j \equiv \frac{\partial G_{pert.}}{\partial r_j}$ , pode ser encontrada por meio de

$$G_{pert.}(r_j, \theta_j^*) = \int dr_j \theta_j(r_j, \theta_j^*), \quad (3.45)$$

se utilizarmos a equação angular (3.44) e fizermos a aproximação  $r_j \approx r_j^*$  [40].

Obtemos assim,

$$G_{pert.}(r_j, \theta_j^*) = \theta_j^* r_j - \frac{bC}{m-1} \left( \frac{r_j}{b} \right)^{m-1} \cos[m(\theta_j^* + (j - 1)\Delta\theta)]. \quad (3.46)$$

Utilizando  $r^* \equiv \frac{\partial G_{pert.}}{\partial \theta_j^*}$ , obtemos a coordenada radial. Ficamos assim, com

$$r_j^* = r_j + \frac{bmC}{m-1} \left( \frac{r_j}{b} \right)^{m-1} \text{sen}[m(\theta_j^* + (j - 1)\Delta\theta)] \quad (3.47)$$

e

$$\theta_j = \theta_j^* - C \left( \frac{r_j}{b} \right)^{m-2} \cos[m(\theta_j^* + (j - 1)\Delta\theta)]. \quad (3.48)$$

Recapitulando, as Eqs.(3.36) e (3.37) tratam da evolução das linhas campo na região entre os limitadores e as Eqs.(3.47) e (3.48), do mapa perturbativo no  $j$ -ésimo anel. Uma volta completa de uma linha de campo fica determinada ao iterarmos-a entre a seção de Poincaré e o primeiro anel limitador, Eqs.(3.36) e (3.37) depois, pelo primeiro anel limitador, Eqs.(3.47) e (3.48). Em seguida, basta repetir esse mesmo processo para todos os outros trechos do tokamak, até que a linha de campo retorne ao plano que definimos como nossa seção de Poincaré.

A Fig.(3.2b) mostra uma seção de Poincaré para o mapa de Ullmann perturbado por

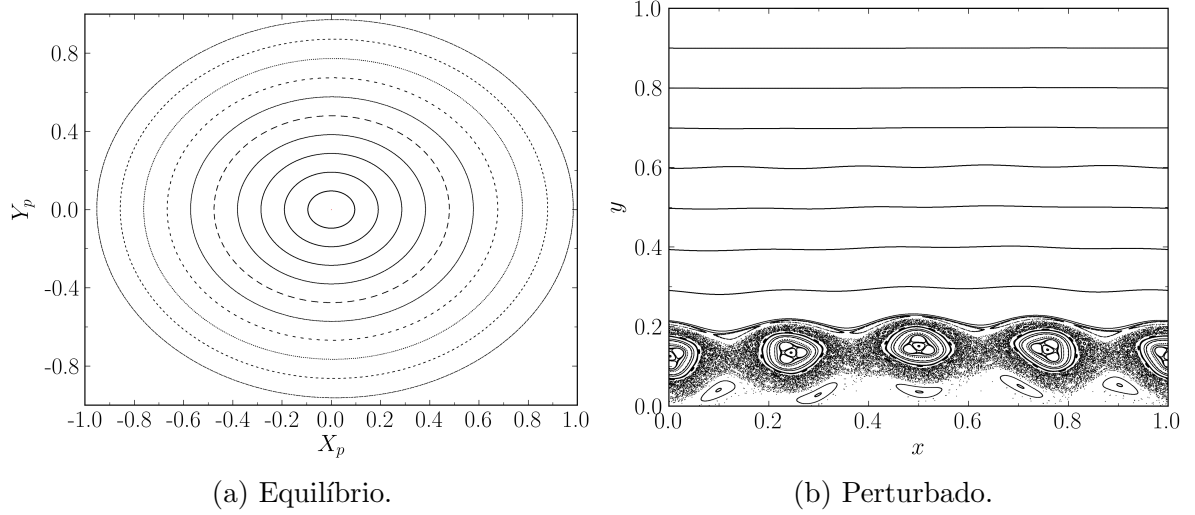


Figura 3.2: Mapa de Ullmann para dois anéis limitadores,  $a_1 = -0.02$ ,  $q(a) = 4$  e  $(m, n) = (4, 1)$  e  $I_h = 4000 A$ .

um limitador ergódico, formado por dois anéis. Os parâmetros utilizados foram  $a_1 = -0.02$ ,  $q(a) = 5$ ,  $I_h = 4000 A$  e o modo  $(m = 4, n = 1)$ . Como era esperado, devido ao modo de perturbação utilizado, a principal cadeia de ilhas formada é a cadeia  $4/1$ .

### 3.2.4 Discussão sobre o fator $a_1$

Um modo alternativo, ao proposto por Ullmann, para determinar o valor do termo  $a_1$ , pode ser feito ao comparar o perfil do fator de segurança, no equilíbrio cilíndrico com correções toroidais, com o perfil do fator de segurança numérico do mapa de Ullmann.

O fator de segurança também pode ser determinado por [23]:

$$q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r B_\phi}{R B_\theta} d\theta. \quad (3.49)$$

Esse modo de determiná-lo é conveniente, por que permite considerar os efeitos da geometria toroidal, se levarmos em conta as correções nos campos magnéticos toroidal e poloidal, respectivamente  $B_\phi$  e  $B_\theta$ . O campo  $B_\phi$  pode ser obtido por meio da lei de Ampère, semelhante ao modo de obter o campo para um solenoide de comprimento  $2\pi R$ . Mas levando em consideração que  $R = R_0 + r \cos \theta$ .

Assim, a expressão corrigida para intensidade do campo magnético toroidal é

$$B_\phi = \frac{B_0}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}. \quad (3.50)$$

Onde  $B_0 = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi R_0}$ , sendo  $I_p$  a corrente elétrica da coluna de plasma.

A correção no campo  $B_\theta$  é obtida de forma semelhante [43]:

$$B_\theta = \frac{B_\theta}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}. \quad (3.51)$$

Então, considerando as Eqs.(3.50) e (3.51), o fator de segurança cilíndrico com correções toroidais fica determinado pela Eq.(3.49). Na Fig.(3.3), comparamos o perfil do fator de segurança, obtido por meio dessa integral (linha em vermelho), com o perfil do fator de segurança para o mapa de Ullmann no equilíbrio, Eqs.(3.36) e (3.37), para diferentes valores de  $a_1$ .

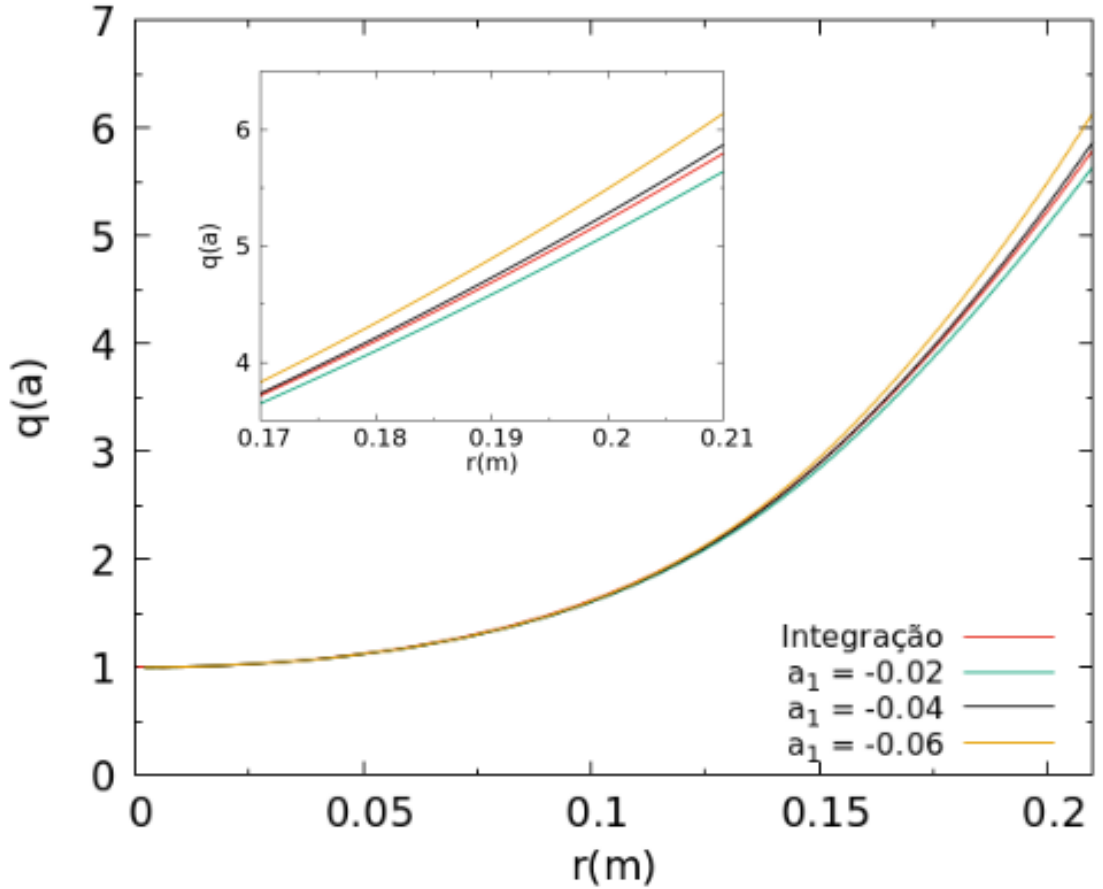


Figura 3.3: Comparação entre o perfil do fator de segurança obtido por integração e numericamente, através do mapa de Ullmann, para diferentes valores de  $a_1$ .

O valor de  $a_1$  que melhor se ajusta ao mapa é  $a_1 = -0,04$ , idêntico ao encontrado por Ullmann, utilizando parâmetros do tokamak TBR [17]. Mas as simulações que fizemos utilizando esse resultado levaram a seções de Poincaré com linhas invariantes senoidais bastante acentuadas na borda do tokamak, onde o escape das partículas era muito rápido, da ordem de uma iteração. Essa escolha de  $a_1$  seria inconveniente para a análise que pretendíamos fazer, além de não condizer com outros resultados já apresentados na literatura. Optamos, devido aos motivos citados, modificar o valor para  $a_1 = -0.02$ . As simulações com esse novo valor mostraram-se em maior alinhamento com a literatura.



A conclusão da discussão aqui levantada é que, talvez, seja necessário reconsiderar o valor  $a_1$  quando o mapa de Ullmann for aplicado para diferentes tokamaks.

### 3.3 Fator de segurança numérico

Dado o mapa de Ullmann, podemos determinar o fator de segurança para uma linha de campo pela Eq.(3.52) [32] [44]. A intuição por trás desse método está no fato que, se tomarmos o inverso da média da variação da coordenada  $\theta$  em relação ao número de voltas toroidais  $2\pi N$ , onde  $N$  é o número de interações, obteremos uma boa aproximação para  $q$ , caso  $N \rightarrow \infty$ .

$$q \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi N}{\sum_{j=1}^N (\theta_{j+1} - \theta_j)} \quad (3.52)$$

Para cada linha, o método pode convergir ou não. Caso convirja para um número racional, significa que a linha de campo é regular e está sobre um toro racional ou trata-se de uma ilha magnética. Se convergir para um número irracional, está sobre um toro KAM. Caso não convirja, a linha de campo é caótica.

Para a seção de Poincaré apresentada na Fig.(3.2b), escolhemos duas órbitas que podem ser vistas nas Figs.(3.4b) e (3.4d), e calculamos seu número de rotação  $\omega = 1/q$  pelo método definido em Eq.(3.52).

Para a cadeia de ilhas, rapidamente houve convergência para  $\omega = 0, 2$ . Já para a linha caótica (iteramos até que ela atingisse a parede do tokamak), não houve convergência, ver Fig.(3.4c). Até existe uma aparente convergência, causada pelas cadeias de ilhas localizadas na região onde a linha de campo transita Fig.(3.4d), mas é diferente do comportamento observado para linhas de campo que realmente convergem, Fig. (3.4a). Além disso, como veremos no final deste capítulo, essa linha tem um padrão de espectro de Fourier completamente diferente de uma linha de campo regular.

#### 3.3.1 Aprisionamento das linhas de campo

O espaço de fase de um sistema Hamiltoniano não é uniforme [45], há regiões com *armadilhas dinâmicas* que fazem com que certas trajetórias passem um longo tempo, porém finito, em uma porção limitada da seção de Poincaré. Uma das razões dessa não uniformidade acontece no entorno das cadeias de ilhas. O aumento da perturbação no sistema leva a quebra dos torus KAM que circundam a cadeia de ilhas, dando origem a cantori. Dá-se o nome de cantori ao conjunto infinito de pontos que são invariantes no sistema (conjunto de cantor), mas que não dividem o espaço de fase em duas áreas sem passagem de uma para a outra [39] [46].

Cantori são como órbitas periódicas de período infinito, com um número infinito de

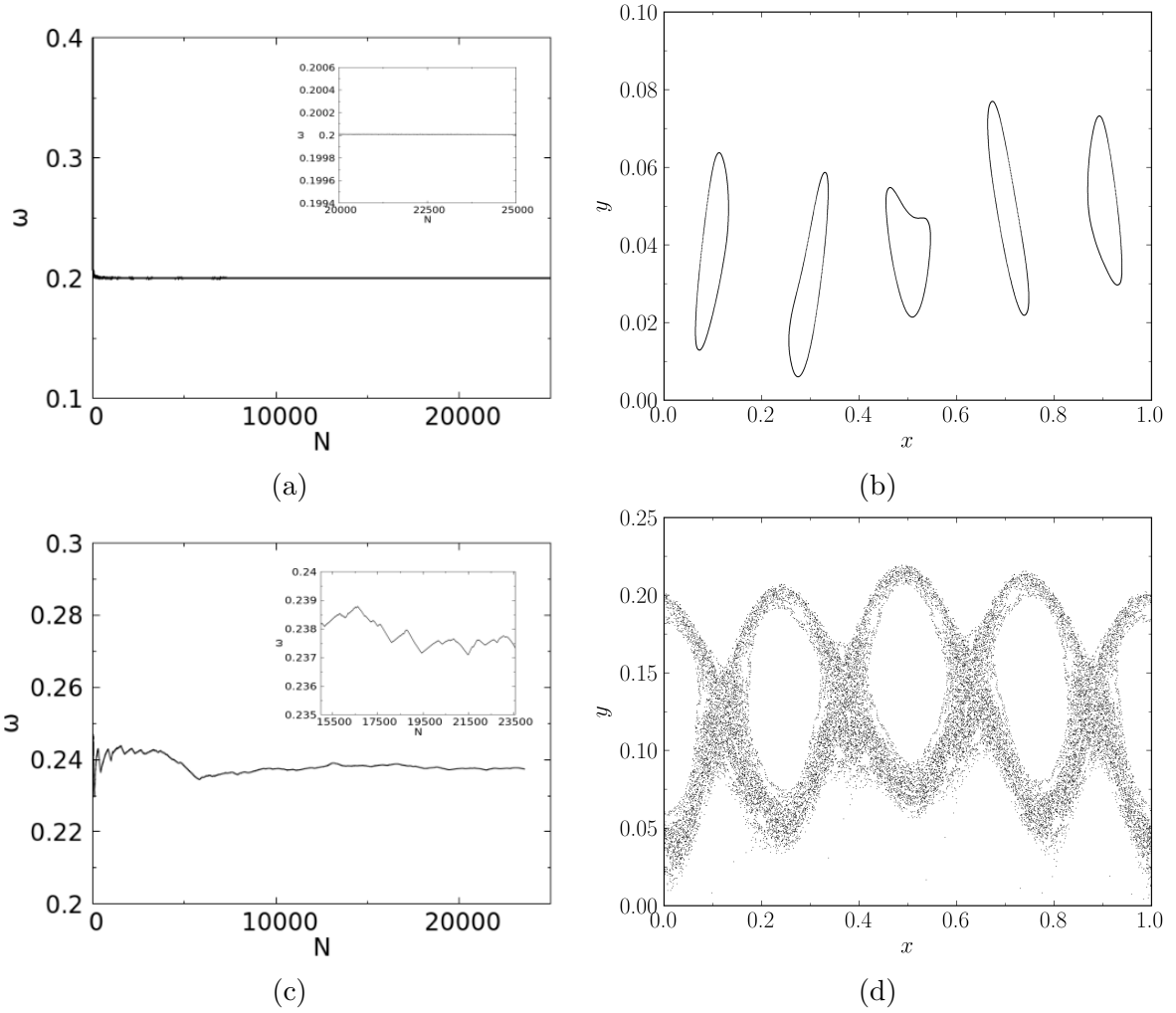


Figura 3.4: Linhas de campo regulares possuem um número de rotação bem definido, Fig.(3.4a). Enquanto que linhas caóticas não, Fig.(3.4c).

espaços (*gaps*) [46]. Quanto mais perto um cantori está de uma ilha mais estreitos são esses espaços, fazendo com que o tempo de permanência nessa região aumente. Isso explica a concentração de pontos na região imediatamente próxima à fronteira das ilhas.

Para o nosso caso, o efeito do aprisionamento das linhas de campo pelas cadeias de ilhas leva a uma pseudo convergência, quando calculamos o número de rotação por meio de Eq.(3.52). Como a linha passa um grande número de interações ao longo das cadeias de ilhas, um gráfico da evolução do método, a cada iteração, sugere que haja convergência. Um exemplo dessa situação é mostrado na Fig.(3.5a), onde escolhemos uma trajetória caótica próxima à cadeia de ilhas 5/1 e a iteramos até a linha ter atingido a parede do tokamak.

A linha de campo contorna a cadeia de ilhas 5/1, como se ela própria fizesse parte da cadeia. Isso explica uma tendência de convergência da ilha de campo, como pode ser visto na Fig.(3.5b). Mas próximo à iteração  $N = 15000$ , a linha de campo escapa da cadeia de ilhas fazendo com que a convergência deixe de existir, como pode ser visto na Fig.(3.5c).

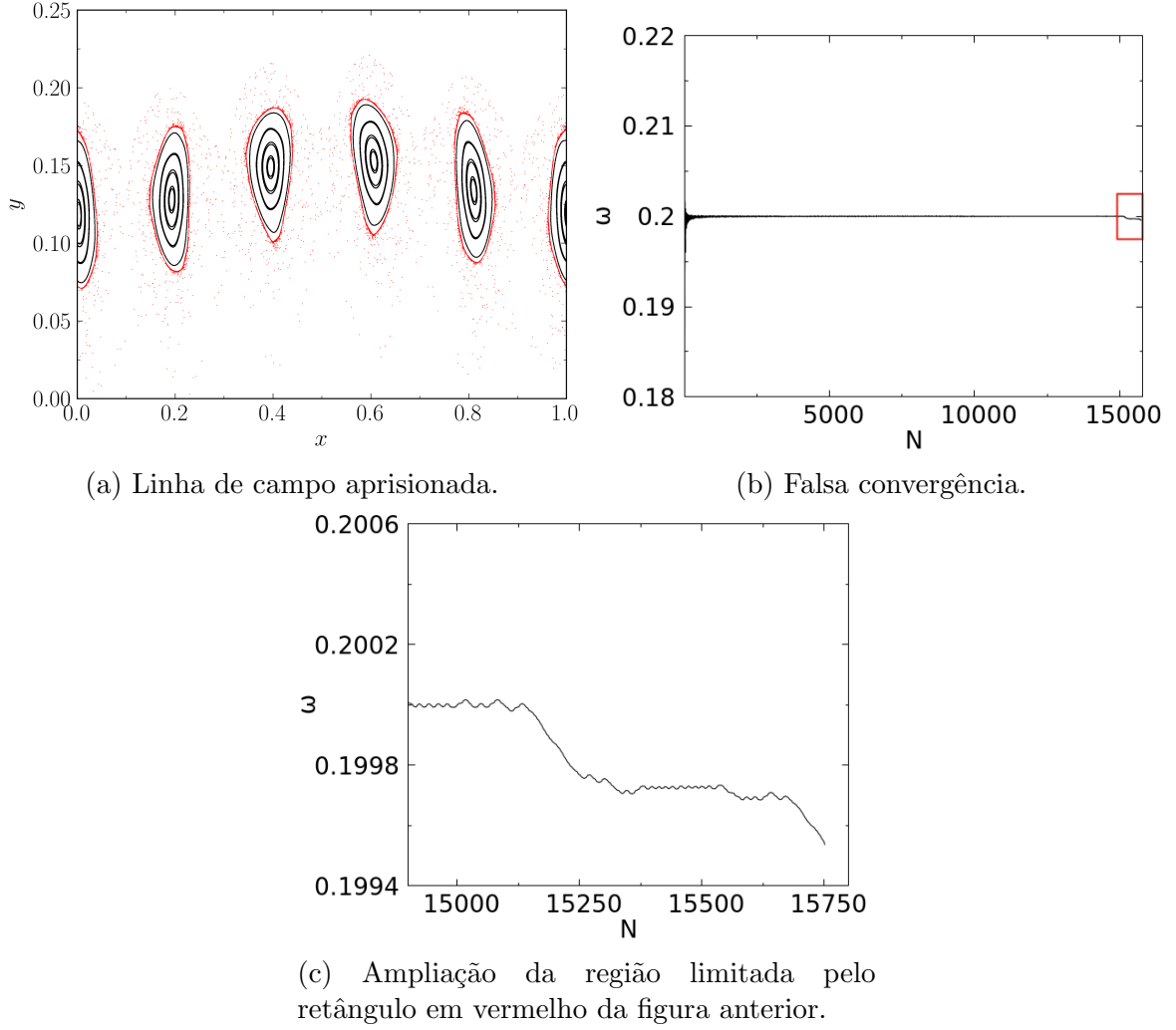


Figura 3.5: Na figura (a) é representado a linha de campo (em vermelho) aprisionada pela cadeia  $5/1$ , para  $(m = 5, n = 1)$ ,  $q(a) = 5$  e  $I_h = 4000$ . Nas figuras (b) e (c) é mostrado o cálculo numérico do número de rotação.

No capítulo 4 voltaremos a discutir o aprisionamento das ilhas magnéticas e veremos sua relação com os padrões de escape formados na parede interna do tokamak.

### 3.4 Transformada de Fourier

Um outro modo de analisar a natureza de uma trajetória, entre regular ou caótica, pode ser feita por meio do cálculo do espectro de potência que é determinado pelo módulo ao quadrado da transformada de Fourier. Trajetórias regulares possuem um espectro de potência discreto, enquanto que trajetórias caóticas possuem espectro contínuo [47] [48]. Os espectros de potência das linhas de campo, para as Figs.(3.4b) e (3.4d), foram calculados por meio da transformada de Fourier discreta [49]

$$S(\omega_n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(k) e^{i\omega_n t_k}. \quad (3.53)$$

Onde  $f(k) = x_k y_k$  é o produto das coordenadas retangulares do mapa de Ullmann para a  $k$  - ésima iteração,  $t_k = k$  e  $\omega_n$  é a frequência angular,

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad (3.54)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$  e  $T = 2N$  é o número (par) total de iterações.

Na Fig.(3.6a) é apresentado o espectro de potência para a cadeia de ilhas da Fig.(3.4b), o resultado é um espectro discreto, com um pico máximo em  $\omega = \omega_p$  (frequência principal) que é igual ao número de rotação da ilha. Ainda nessa figura, podemos ver uma frequência múltipla de  $\omega_p$ , em  $\omega = 0,4$ , e duas outras frequências em ambos os lados da frequência principal, determinadas pelas combinações lineares da frequência principal mais a frequência secundária  $\omega_s$ .

Já na Fig.(3.6b) está o espectro de potência para a trajetória caótica, Fig.(3.4d), como esperado o espectro é contínuo. O pico que aparece para  $\omega = 0,25$  deve-se ao grande número de iterações que a linha de campo passa ao redor da cadeia de ilhas  $4/1$ . Optamos por plotar o espectro de potência em função de  $\omega = \frac{n}{T}$ , por conveniência.

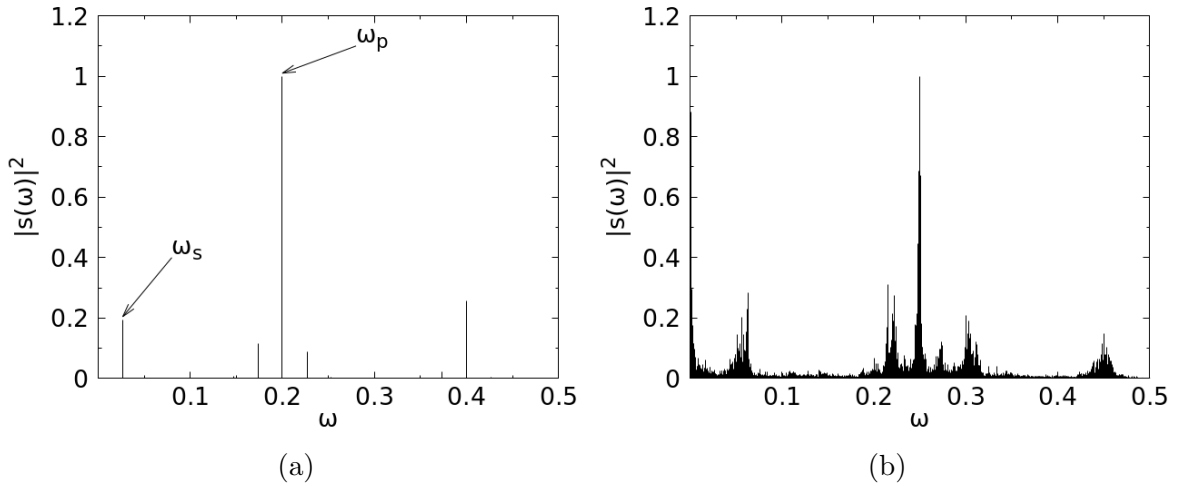


Figura 3.6: Espectro de potência para a cadeia de ilhas e a trajetória caótica das Figs.(3.4b) e (3.4d), respectivamente.

# Capítulo 4

## Resultados

Neste capítulo analisamos o escape das linhas de campo em configurações bem específicas. Nessas configurações, a borda do plasma e a região entre esta e a parede do tokamak estão tomadas por caos e cadeias de ilhas, sem a presença de superfícies magnéticas inteiras. Utilizamos a palavra escape para referirmos a situação em que uma linha de campo atinge a parede do tokamak, também usamos como sinônimos de escape as palavras fuga e perda.

A motivação por esse tipo de configuração é a existência de linhas de campo próximas à parede do tokamak com grandes comprimentos de conexão e que chegam, até mesmo, a atingir a região do plasma. Nesse caso as partículas, que seguem essas linhas de campo, estão altamente energéticas no momento em que escapam. Outra motivação está no fato de haver configurações onde o limitador ergódico, responsável, a priori, em tornar homogêneo o escape das linhas de campo não cumpre seu papel, fazendo com que haja regiões da parede mais atingidas que outras pelas partículas. Está aí formado um cenário indesejado. Partículas altamente energéticas com escape concentrado em certas regiões da câmara toroidal.

O presente capítulo está dividido em três partes. Na primeira mostramos exemplos de linhas de campo aprisionadas e na segunda os padrões de escape. Por fim, na terceira parte, mostramos resultados que sustentam uma conjectura sobre o aprisionamento das linhas de campo nas cadeias de ilhas próximas à borda do plasma.

### 4.1 Órbitas aprisionadas

Escolhemos o modo de perturbação e a corrente perturbativa como  $(5, 1)$  e  $I_h = 4000 A$ , respectivamente. Algumas seções de Poincaré, com diferentes valores de  $q(a)$ , foram obtidas. Como o fator de segurança é inversamente proporcional à corrente de plasma, ao variarmos  $q(a)$ , também variamos a razão perturbativa  $\epsilon = i_h/i_p$ . Este procedimento resultou no conjunto de seções de Poincaré mostradas na Fig.(4.1).

Conforme a variação de  $q(a)$ , novas ilhas surgiram na região abaixo das superfícies magnéticas não destruídas. Por exemplo, a cadeia  $4/1$ , na Fig.(4.1a), passa a aparecer

na região caótica a partir da Fig.(4.1c). O deslocamento das cadeias de ilhas, devido à variação de  $q(a)$ , ao longo da seção de Poincaré e sua relação com as órbitas aprisionadas será relevante para os resultados mostrados futuramente, quando abordarmos, no final deste capítulo, a conjectura sobre o aprisionamento das linhas de campo caóticas na borda do plasma.

Motivados pela busca de linhas de campo que levam um longo tempo para escapar, representamos em vermelho, ainda na Fig.(4.1), as linhas com o maior comprimento de conexão, que partem da parede do tokamak e para lá retornam. Essas linhas foram escolhidas como sendo aquelas que possuem o maior comprimento de conexão, entre  $10^5$  condições iniciais, com intervalos iguais de separação, partindo da parede do tokamak. Denominamos comprimento de conexão  $N_{cl}$  o número mínimo de iterações do mapa suficiente para que uma linha de campo, com condição inicial na parede do tokamak, retorne à parede. Nas seções de Poincaré apresentadas, nota-se que as órbitas em vermelho estão sempre associadas a alguma cadeia de ilhas.

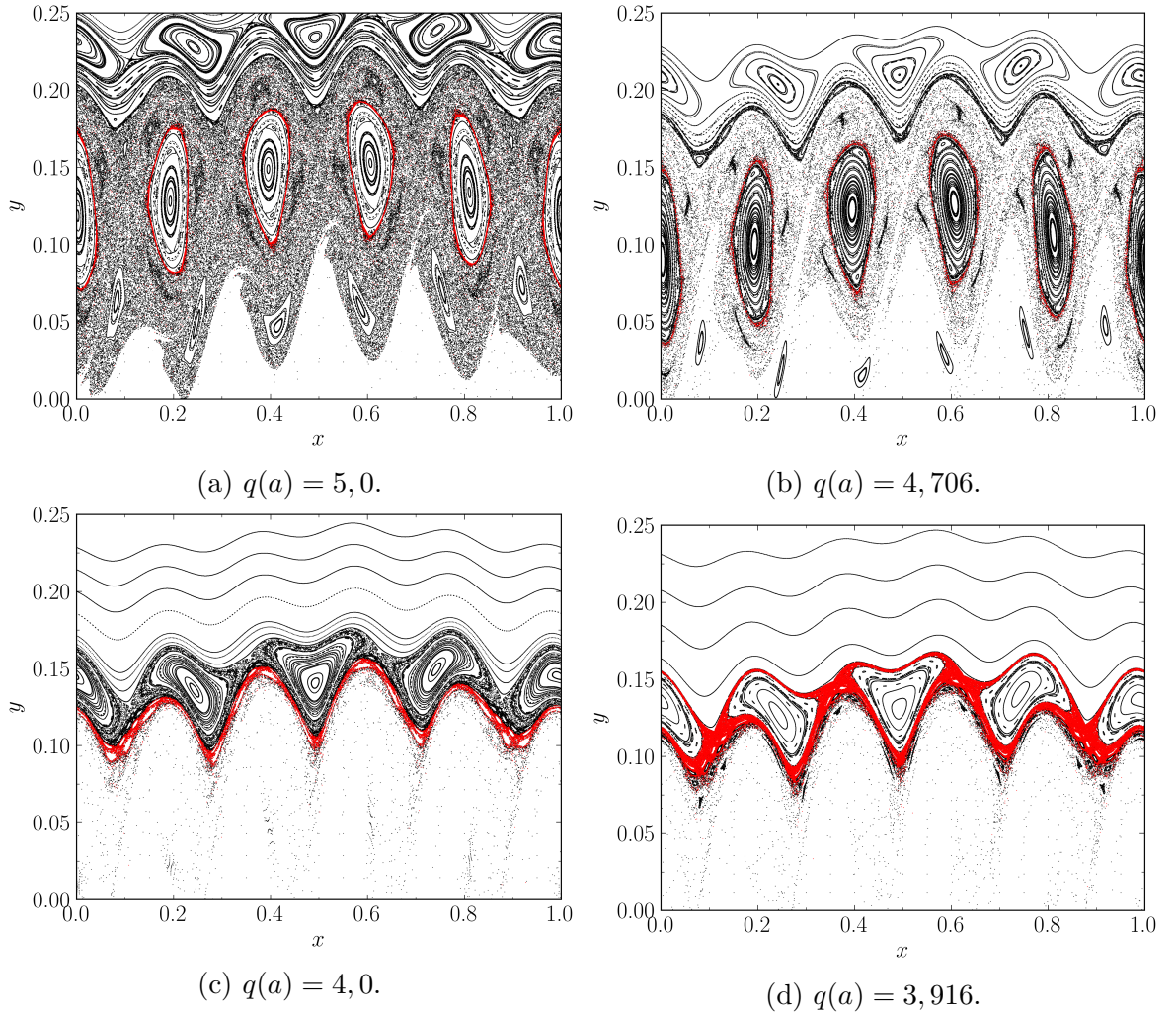


Figura 4.1: Seções de Poincaré para diferentes valores de  $q(a)$ ,  $I_h = 4000 A$  e  $(m = 5, n = 1)$ . Em vermelho estão as linhas com maior comprimento de conexão.

Para obter uma noção mais clara da influência de  $q(a)$  sobre as linhas de campo, um diagrama de comprimento de conexão fora criado.

Nesse diagrama, o eixo horizontal marca os valores assumidos por  $q(a)$  e o eixo vertical a coordenada  $x$  na parede do tokamak. Para cada valor de  $q(a)$  fixado, 1000 pontos distribuídos de forma homogênea na parede do tokamak, isto é, em  $y = 0$ , foram considerados como condições iniciais. Cada condição inicial foi iterada por até 16 vezes, e uma cor foi atribuída conforme seu comprimento de conexão. Em amarelo estão as condições iniciais que não escaparam nas 16 primeiras iterações, ver Fig.(4.2).

Alguns fatos interessantes foram obtidos dessa simulação. Certas regiões da parede sofrem modificações no comprimento de conexão, conforme  $q(a)$  varia. Por exemplo, para  $x = 0,2$ . Em contrapartida, outras possuem o mesmo comprimento de conexão, por exemplo para  $x = 0,7$ . Há, também, a presença de estruturas em formato “bumerangue”, que são conhecidas da literatura e que foram obtidas por meio de outros mapas ou experiências físicas [12] [15] e o número de faixas horizontais coincide com o valor  $m$  do modo de perturbação  $(m, n)$  [15].

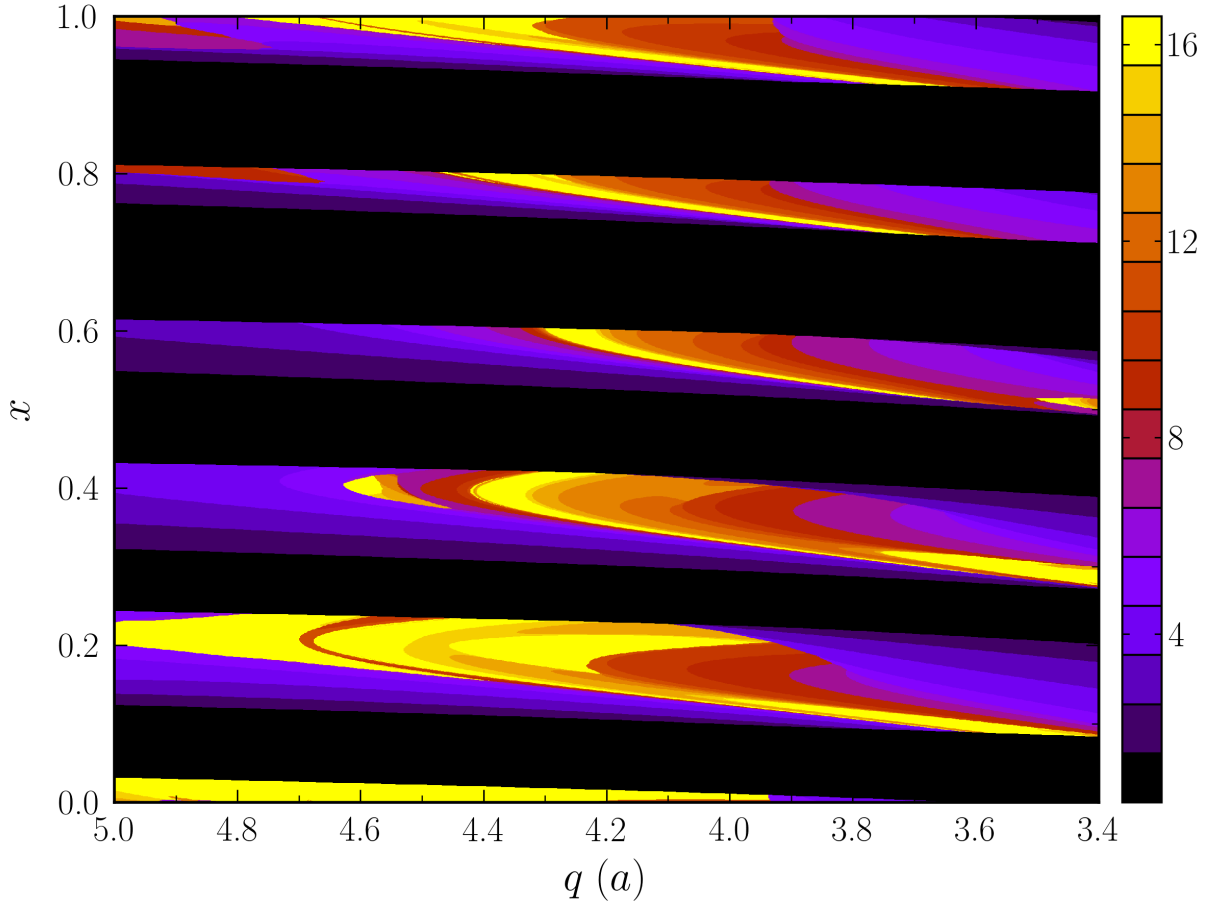


Figura 4.2: Comprimento de conexão,  $N_{cl}$ , na parede do tokamak em função de  $q(a)$ .

Após a investigação da relação entre  $q(a)$  e  $N_{cl}$ , voltamos nossa atenção para os casos isolados apresentados na Fig.(4.1). Utilizamos o cálculo do número de rotação a tempo

finito, ver Eq.(4.1), para determinar o número de rotação das linhas de campo em destaque na Fig.(4.1).

$$\omega_f = \frac{\sum_{j=1}^k (\theta_{j+1} - \theta_j)}{2\pi k} \quad (4.1)$$

O cálculo do número de rotação a tempo finito é semelhante ao definido com o uso da Eq.(3.52). A diferença está no fato de considerarmos a trajetória da linha de campo em partes. Dada uma linha caótica, ao invés de considerarmos  $N_{cl}$  como o limite da somatória, consideramos  $k < N_{cl}$  iterações consecutivas. É justificável o uso do cálculo do número de rotação a tempo finito, já que linhas de campo caóticas não possuem um número de rotação bem definido e, portanto, o uso de Eq.(3.52) não faria sentido.

Na Fig. (4.3), está representado o número de rotação a tempo finito para cada intervalo contendo  $k = 500$  iterações da trajetória selecionada (a linha em vermelho, ligando os pontos, serve apenas para guiar os olhos durante a leitura dos resultados). Isso permitiu identificar em qual cadeia de ilhas a órbita fica ‘presa’ — são as regiões onde há a formação de patamares. — Permitiu também estimar o momento em que a linha de campo é aprisionada — primeiro ponto obtido no patamar. — Assim como o momento em que ela escapa do aprisionamento — último ponto obtido no patamar.

Na Fig.(4.3a) a linha fica presa pela cadeia de ilhas 5/1, leva menos que 1000 iterações para alcançar o entorno da cadeia e quando de lá escapa, rapidamente atinge a parede do tokamak. Os resultados para as Figs.(4.3b) e (4.3c) são parecidos. As diferenças são apenas o menor número de iterações gastas, até que ocorra o aprisionamento das linhas, e o fato do aprisionamento acontecer na cadeia 21/5, para a Fig.(4.3c).

Porém, na Fig.(4.3d) a dinâmica é significativamente diferente dos demais casos. Pois, tanto a atração quanto o escape demoram mais a acontecer e em comparação com os casos anteriores, a trajetória demora mais para atingir a cadeia responsável pelo seu aprisionamento, por volta de 18000 iterações, e quando escapa leva um tempo, também, maior para atingir a parede do tokamak, que nos exemplos anteriores. Além disso, entre a iteração da primeira atração (aprisionamento) até o seu retorno à parede do tokamak, a linha ora está circundando a cadeia de ilhas 4/1, ora não.

Para auxiliar na interpretação dos resultados obtidos com o número de rotação a tempo finito, criamos isoladamente a seção de Poincaré para a trajetória correspondente à Fig.(4.3a) e destacamos alguns de seus pontos durante a evolução toroidal. Os pontos em vermelho representam as primeiras iterações e os em amarelo uma pequena fração da região com aprisionamento.

Por fim, nesta última parte da seção apresentamos como os comprimentos de conexão das linhas de campo estão distribuídos ao longo da parede do tokamak e por quais regiões essas linhas escapam.

Para obter os gráficos mostrados na Fig.(4.5),  $10^5$  condições iniciais foram definidas na



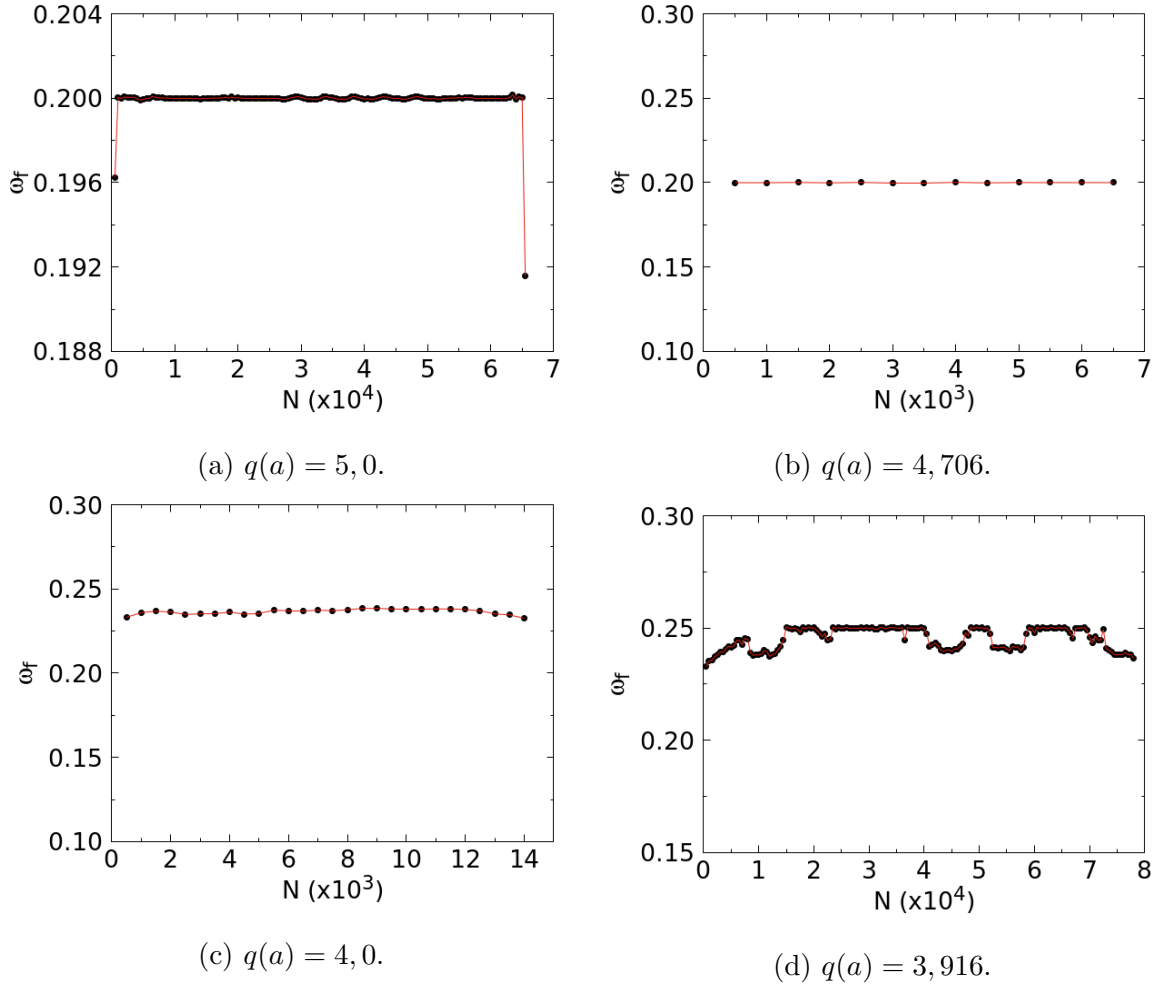


Figura 4.3: Número de rotação a tempo finito, calculado a cada 500 iterações, para as linhas em destaque da Fig.(4.1).

parede do tokamak. Essas condições foram escolhidas de forma homogênea, e cada uma delas foi iterada até que retornasse à parede do tokamak. No eixo vertical está registrado o comprimento de conexão para cada uma dessas condições iniciais.

Conforme o valor definido para  $q(a)$ , mais ou menos regiões apresentaram condições iniciais com grandes comprimentos de conexão. Por exemplo, na Fig.(4.5a) há apenas um pico na região próximo a  $x = 0, 2$ , mas nas Figs.(4.5c) e (4.5d) há cinco regiões com picos. Nota-se também que, nas quatro situações apresentadas, as regiões com  $N_{cl} = 1$ , ou seja, casos em que a linha de campo escapa na primeira volta toroidal, são basicamente as mesmas. Há ainda pequenas regiões onde o comprimento de conexão é constante para certos intervalos de  $x$ .

Uma ampliação da Fig.(4.5c) foi feita na região em torno do segundo pico, contado da direita para a esquerda. Apesar dessa região com grande comprimento de conexão ser pequena, quando fizemos ampliações percebemos a existência de uma estrutura, ver Fig.(4.6).

Na Fig.(4.2) vimos como o comprimento de conexão na parede do tokamak muda

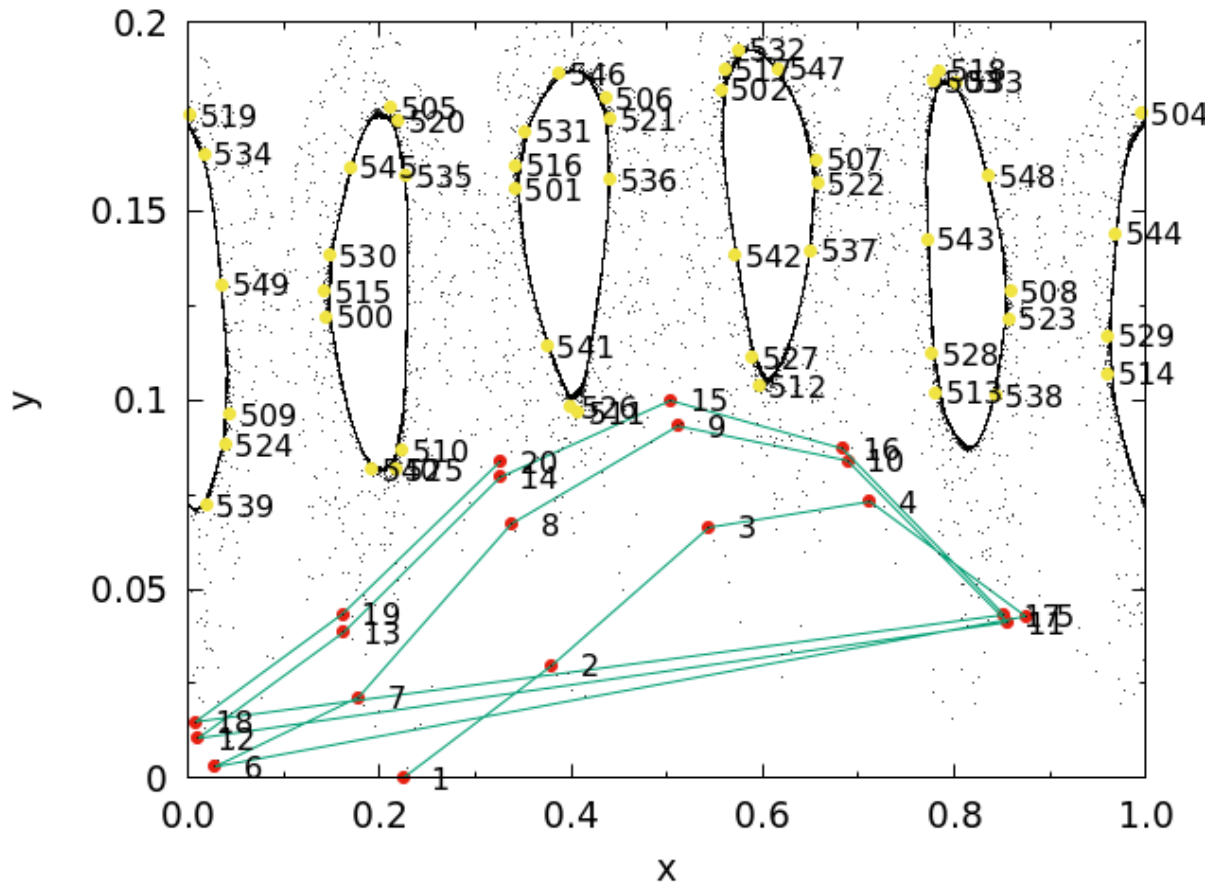


Figura 4.4: Linha de campo em destaque da Fig.(4.1a). Os pontos em vermelho e amarelo são, respectivamente, os pontos das primeiras iterações e alguns dos pontos aprisionados pela cadeia de ilhas 5/1.

com  $q(a)$ . Fizemos o mesmo procedimento na Fig.(4.7), só que agora não olhamos para o comprimento de conexão, mas sim para a região de saída de cada linha de campo magnético. Para isso, dividimos o perímetro circular do raio menor do tokamak em 10 partes iguais e associamos uma cor a cada uma dessas saídas. A saída pela qual certa região de condições iniciais escapa, modifica-se conforme  $q(a)$  varia.

Investigamos nesta seção a existência de órbitas com grande  $N_{cl}$  e sua relação com  $q(a)$ . Verificamos como a variação de  $q(a)$  pode influenciar no escape dessas linhas de campo. Na próxima seção, examinaremos como ocorre o escape das linhas em toda a região de influência do limitador ergódico e seus padrões de escape. O assunto sobre transições de cadeias de ilhas, comentado brevemente aqui, voltará a ser discutido na parte final deste capítulo.

## 4.2 Padrões de escape

Na seção anterior, apesar de interessados na influência do limitador ergódico sobre as linhas de campo, restringimos a nossa atenção somente às linhas de maior comprimento de

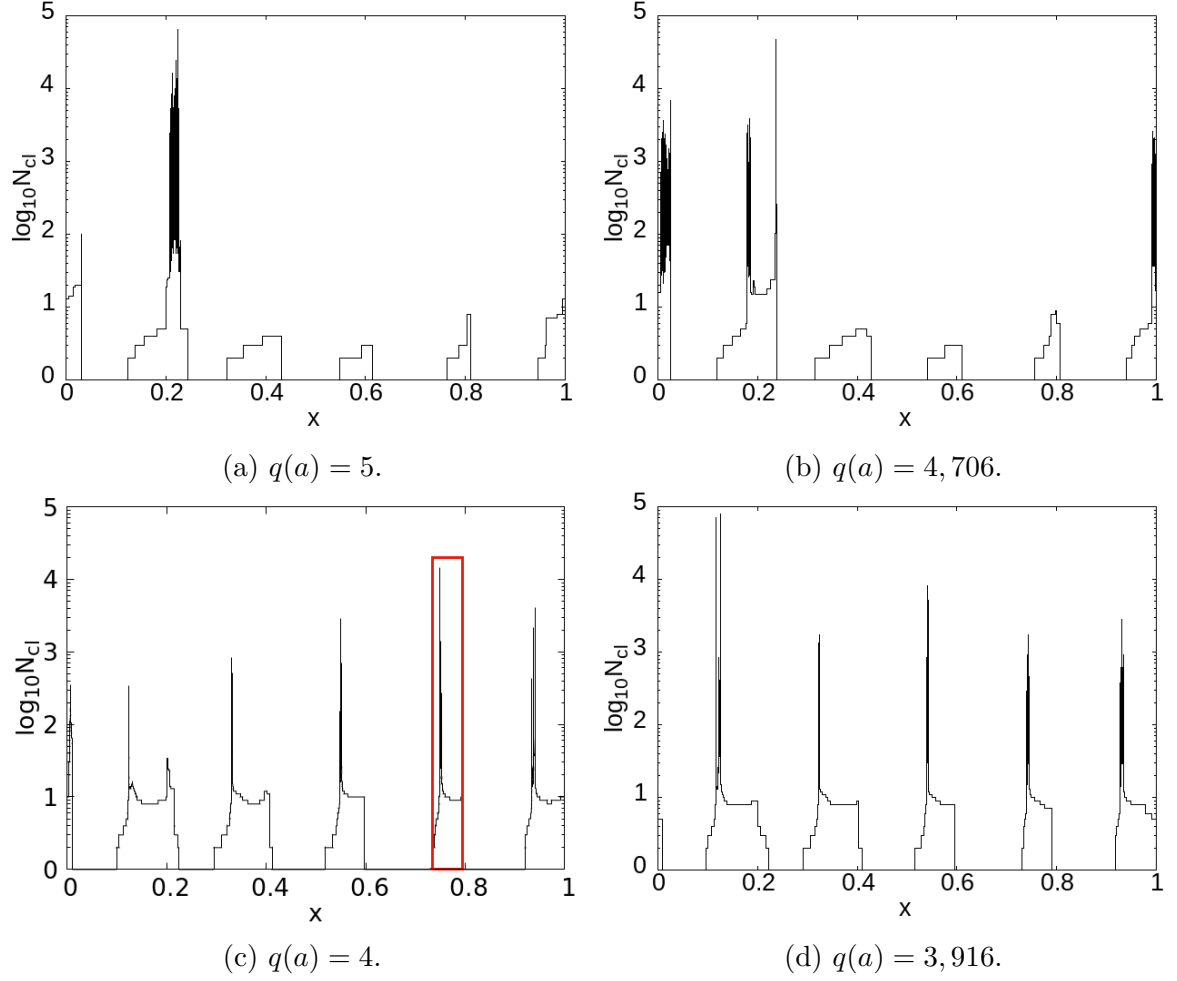


Figura 4.5: Distribuição dos comprimentos de conexão, para diferentes valores de  $q(a)$ , com condições iniciais na parede do tokamak.

conexão. Diferentemente, nesta seção apresentaremos os resultados relacionados com toda a região caótica próxima à parede do tokamak. Essa região, como já citada anteriormente, é fortemente influenciada pela atuação do limitador ergódico.

Por isso, das seções de Poincaré mostradas na Fig.(4.1), selecionamos os casos  $q(a) = 5,0$  e  $q(a) = 4,0$  para mostrar por qual região da parede do tokamak cada condição inicial escapa e qual o tempo de escape para cada uma das condições iniciais. Isso possibilitou um primeiro entendimento tanto do padrão de escape quanto da distribuição dos comprimentos de conexão sobre a parede interna do tokamak.

Damos o nome de tempo de escape  $\tau_e$  ao número de iterações necessárias para que uma linha de campo, com condição inicial na região interna à parede do tokamak, atinja a parede. Ao longo dessa seção faremos referências diversas vezes a  $\tau_e$  grande e pequeno. Como isso queremos dizer que a ordem de grandeza é de  $10^2$  para  $\tau_e$  pequeno e  $10^3$ , ou mais, para  $\tau_e$  grande.

As bacias de saída (*conjunto de condições iniciais na seção de Poincaré com linhas de campo escapando por uma mesma região do tokamak*) apresentadas na Fig.(4.8) foram

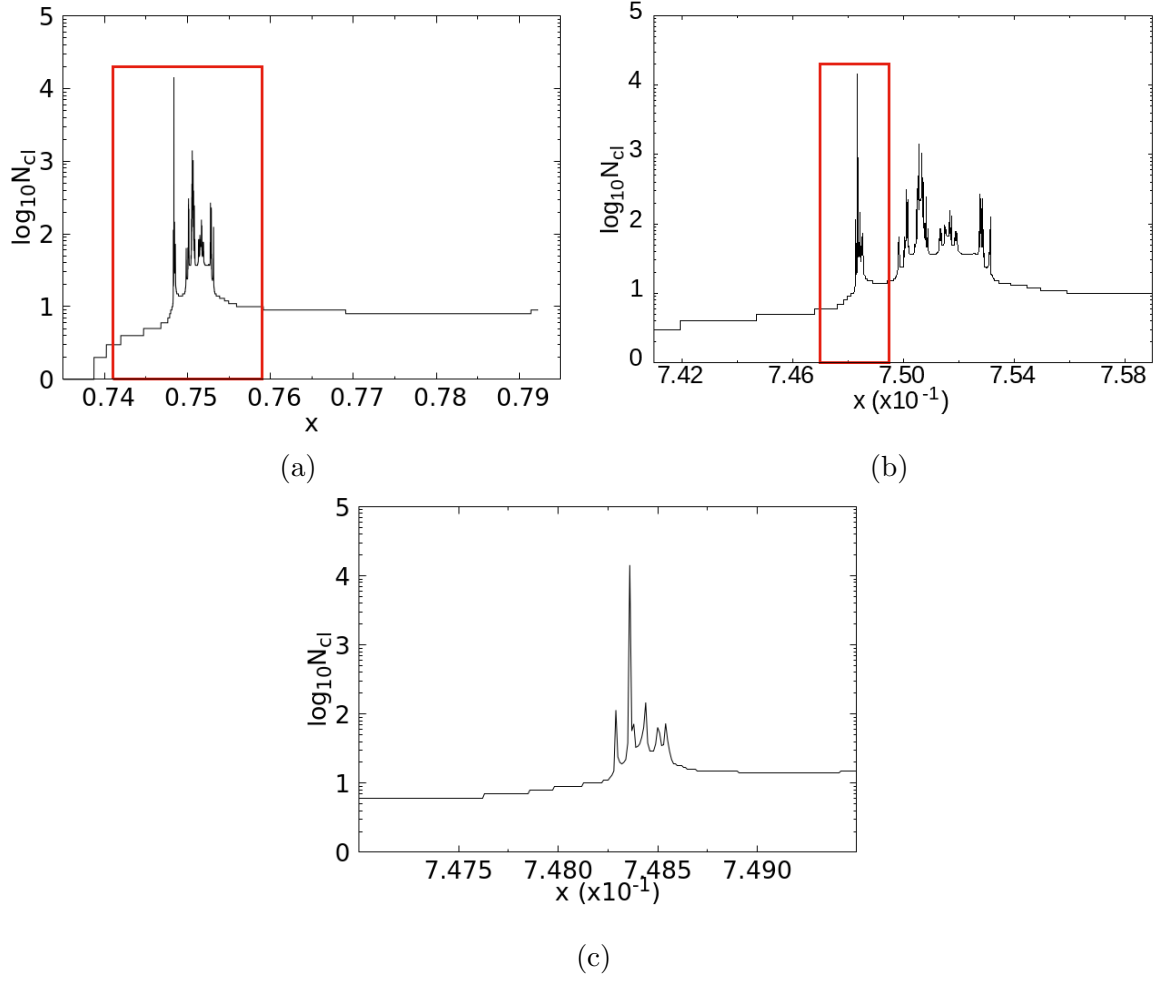


Figura 4.6: Ampliações sucessivas de uma parte da Fig. (4.5c).

criadas ao tomarmos uma grade de condições iniciais, contendo  $10^6$  pontos, na região entre a parede do tokamak e a primeira superfície magnética não destruída. Para cada condição inicial, iteramos o mapa até a linha de campo escapar ou atingir o máximo de 6000 iterações. Em amarelo estão tanto as trajetórias que escaparam na iteração de número 6000, quanto aquelas que não escaparam. Já para as órbitas que escaparam, outras cores foram atribuídas conforme a região da parede do tokamak. As regiões de saída para as linhas de campo foram definidas por meio da divisão da parede em três arcos de circunferência idênticos, com uma cor representando cada região.

Os resultados obtidos exemplificam as situações mais comuns encontradas, por nós, ao explorarmos as bacias de saída das linhas de campo. São duas as situações. Uma representada pela Fig.(4.8a), onde há a existência de duas regiões com estruturas diferentes. Uma região, a mais próxima à parede do tokamak, as fronteiras entre as bacias são bem definidas. A outra, mais distante da parede do tokamak e mais próxima à cadeia de ilhas mais interna, possui uma estrutura mais complexa e sem fronteiras bem definidas. Adiante faremos uma exploração maior dessa última região.

A segunda situação, representada pela Fig.(4.8b), difere da primeira apenas pelo fato

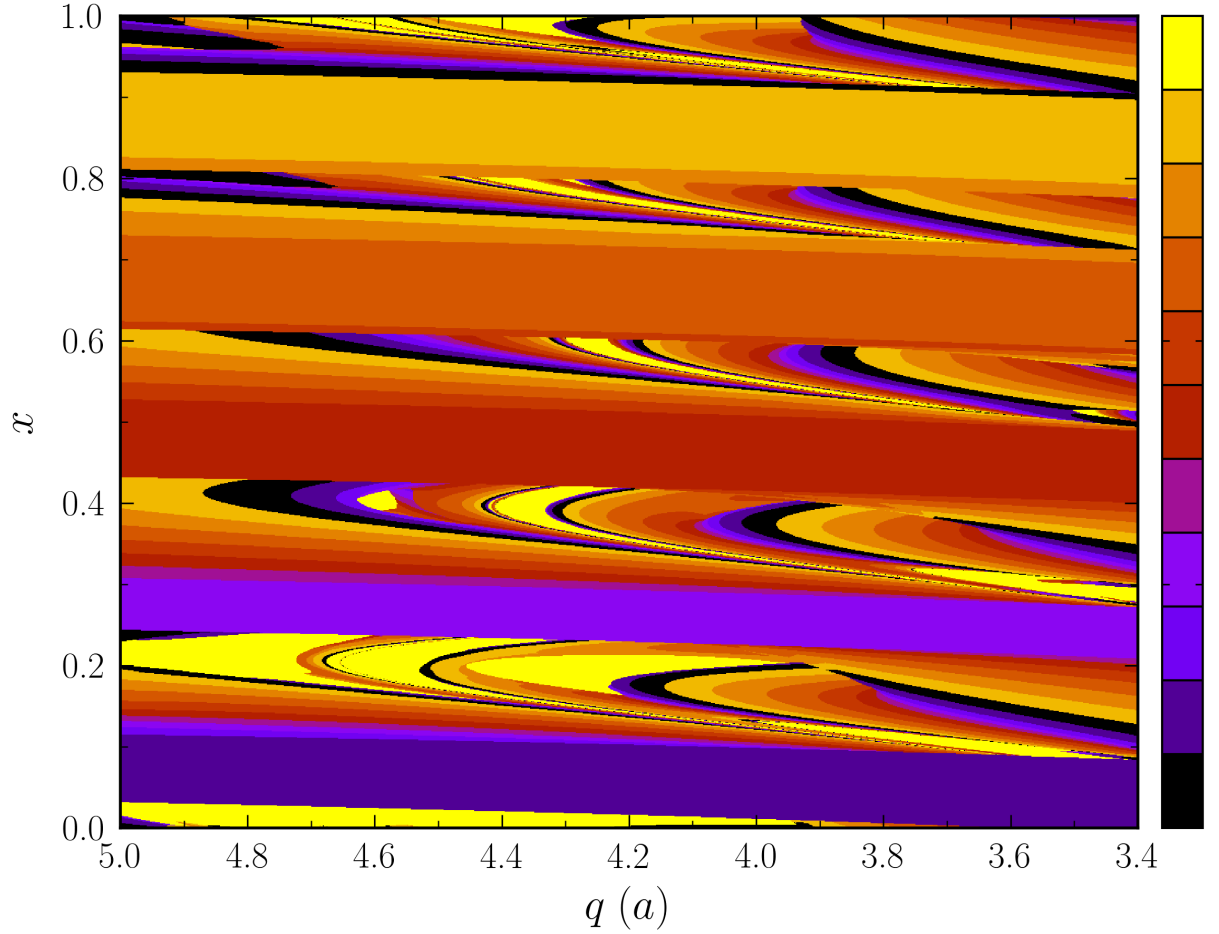


Figura 4.7: Bacias de saída, com 10 intervalos de escape indicados na escala de cores, para linhas de campo com condições iniciais ( $x$ ) na parede tokamak. Em amarelo estão as órbitas que não escaparam.

da região mais interna, onde a perda de linhas de campo que ocorre por diferentes bacias para o caso da Fig. (4.8a), passa a ocorrer por uma única bacia.

Retornando à região sem fronteiras bem definidas da Fig.(4.8a), mencionada anteriormente, definimos nela um retângulo e fizemos ampliações sucessivas da área por ele delimitada, ver Fig.(4.9). Pelos resultados obtidos e em comparação com os resultados da referência [50], essa região aparenta possuir estrutura fractal.

Nota-se ainda que há uma mistura dessa região possivelmente fractal, com uma região similar àquela que surge próxima à parede do tokamak. Isto é, coexistem nessa região os dois tipos de estruturas. Enquanto que as regiões mais externas das Figs.(4.8b) e (4.8a) não sugerem a existência mútua de regiões com e sem fronteiras bem definidas.

Além das bacias de escape, investigamos o tempo de escape das linhas de campo na região das seções de Poincaré consideradas nos exemplos anteriores.

Novamente tomamos uma grade com  $10^6$  condições iniciais, na região entre a parede do tokamak e a primeira superfície magnética não destruída, onde iteramos cada condição inicial por, no máximo, 6000 vezes e atribuímos uma cor conforme o valor de  $\tau_e$ . Em

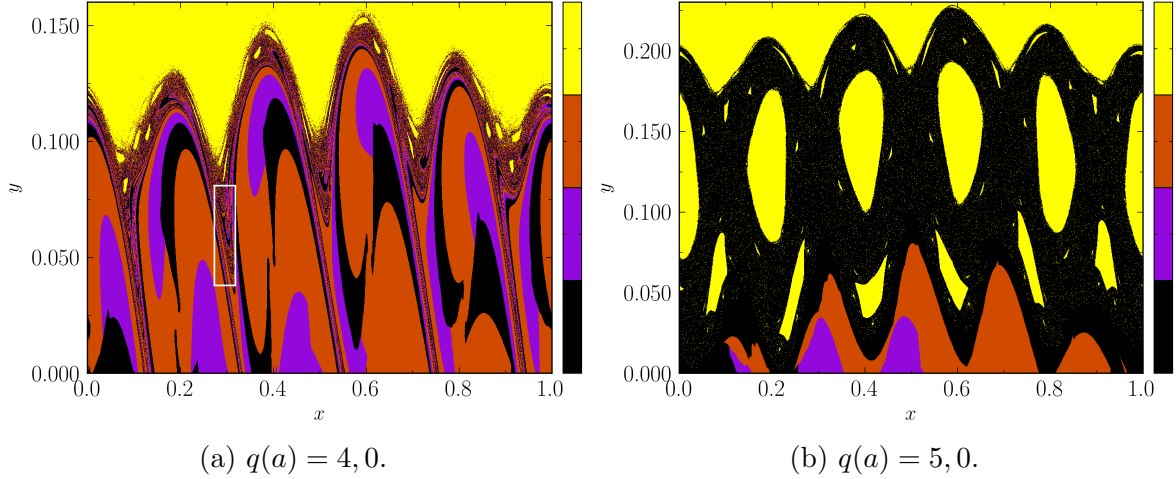


Figura 4.8: Bacias de escape para dois valores diferentes de  $q(a)$ , mostrando os padrões mais comuns encontrados. Em amarelo estão as condições que não escaparam, as outras cores representam cada um dos três intervalos em que a parede do tokamak foi dividida.

amarelo estão as condições iniciais de órbitas que não escaparam após 6000 iterações. Das Figs.(4.10a) e (4.10c) nota-se que há duas regiões bem distintas. Uma com escape rápido, localizada próxima à parede do tokamak e com fronteiras bem definidas. E outra, com escape lento, predominante na região mais próxima às primeiras superfícies magnéticas não destruídas e sem possuir fronteiras bem definidas.

Esses resultados quando comparados com as bacias de saída, sugerem que as regiões com tempo de escape pequeno estejam associadas com as regiões das bacias de saída com fronteiras bem definidas. Enquanto as regiões com tempo de escape grande, com as regiões de fronteiras complexas, aquelas possivelmente fractais.

Devido à grande diferença que pode haver entre os tempos de escape de duas órbitas na região de atuação do limitador ergódico, em um primeiro momento a região com escape rápido parece não apresentar nenhum tipo de estrutura. Como se nessa região, todas as condições iniciais possuíssem o mesmo comprimento de conexão, ver região em escuro nas Figs.(4.10a) e (4.10c). Entretanto, se reduzirmos o número máximo de iterações para 15, veremos que nessa região também há uma estrutura, onde as regiões com números de escapes diferentes possuem fronteiras bem definidas, ver Figs.(4.10b) e (4.10d).

Em seguida, fizemos uma ampliação nas regiões com escape rápido e lento das figuras anteriores. O padrão em relação às fronteiras se mantém. Mas somente com as ampliações foi possível perceber que, mesmo na região onde as linhas escapam lentamente, Figs.(4.11a) e (4.11c), há também regiões com escape rápido. Porém, o mesmo não acontece com a região de escape rápido. Apesar de ampliarmos a imagem, não vimos o aparecimento de condições iniciais com grande tempo de escape, ver Figs.(4.11b) e (4.11d).

Para melhor visualizar as regiões com escape rápido que aparecem nas Figs.(4.11a) e (4.11c), refizemos as simulações utilizando valores menores para o limite de iterações.



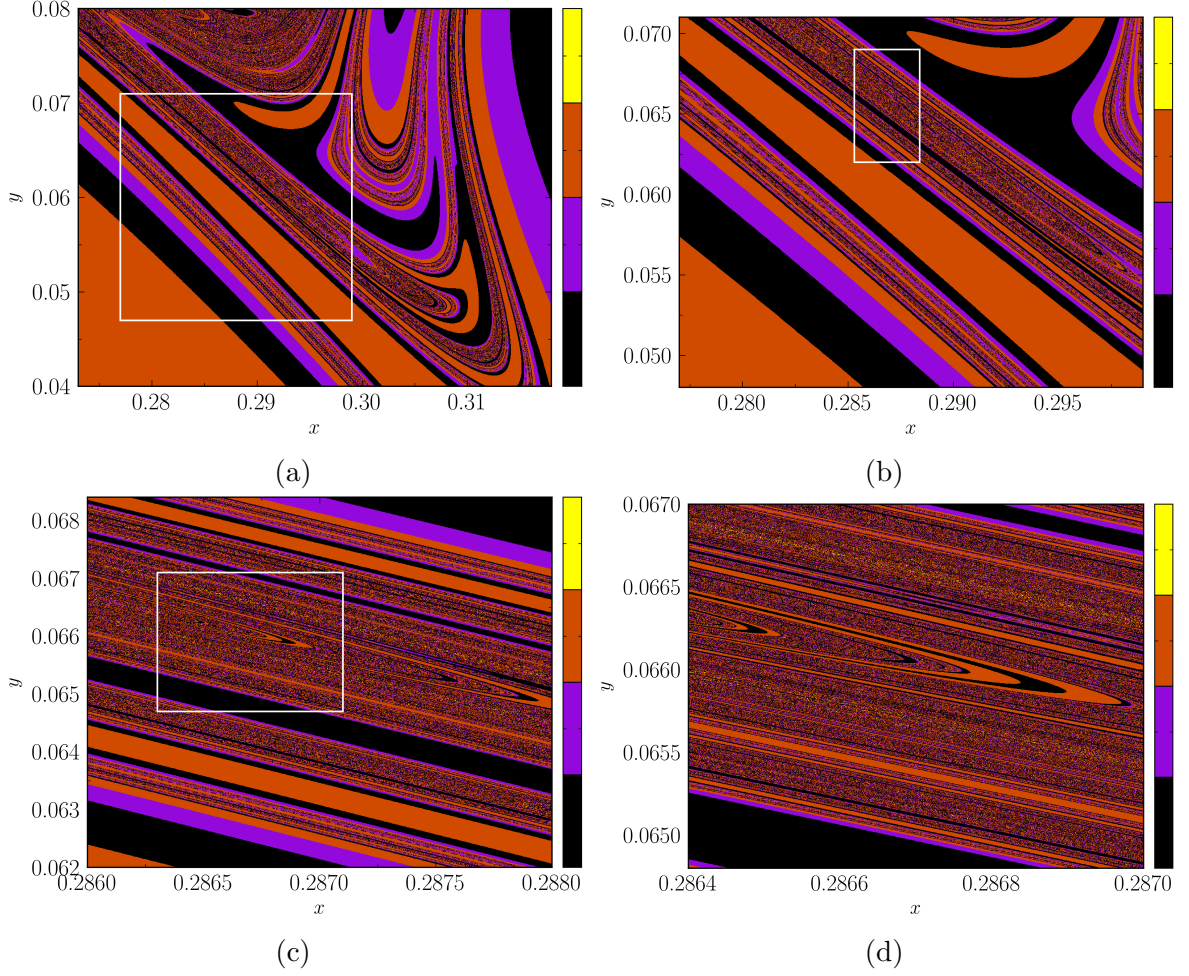


Figura 4.9: Ampliações sucessivas das bacias de escape da Fig. (4.8a) numa região sem fronteiras bem definidas.

Permitindo, assim, visualizar as regiões com pequeno  $\tau_e$  existentes na região onde o escape é predominantemente lento, ver Fig.(4.12).

Os últimos resultados voltam a reforçar a ideia de duas regiões distintas na região caótica, uma contemplada por escape rápido, sem a presença de estrutura fractal. E outra dominada majoritariamente, mas não unicamente, por condições iniciais com grande tempo de escape e possivelmente com estrutura fractal.

Motivados pelo efeito prejudicial que as linhas de campo caóticas com valores grandes de  $\tau_e$  podem exercer sobre o confinamento do plasma, investigamos isoladamente o escape dessas linhas na região em que ficam aprisionadas pelas cadeias de ilhas.

Na Fig.(4.13), cerca de 1000 condições iniciais foram escolhidas em um retângulo muito pequeno, formado por pontos em vermelho, na região onde há aprisionamento para as seções de Poincaré com  $q(a) = 4,706$  e  $q(a) = 4,0$ , Figs.(4.1b) e (4.1c), cada condição inicial foi iterada até atingir a parede do tokamak. Isso permitiu visualizar que o escape dessas linhas de campo ocorre, somente, em certas regiões da parede.

Portanto, a fuga das linhas de campo com grande tempo de escape, em geral, não estão

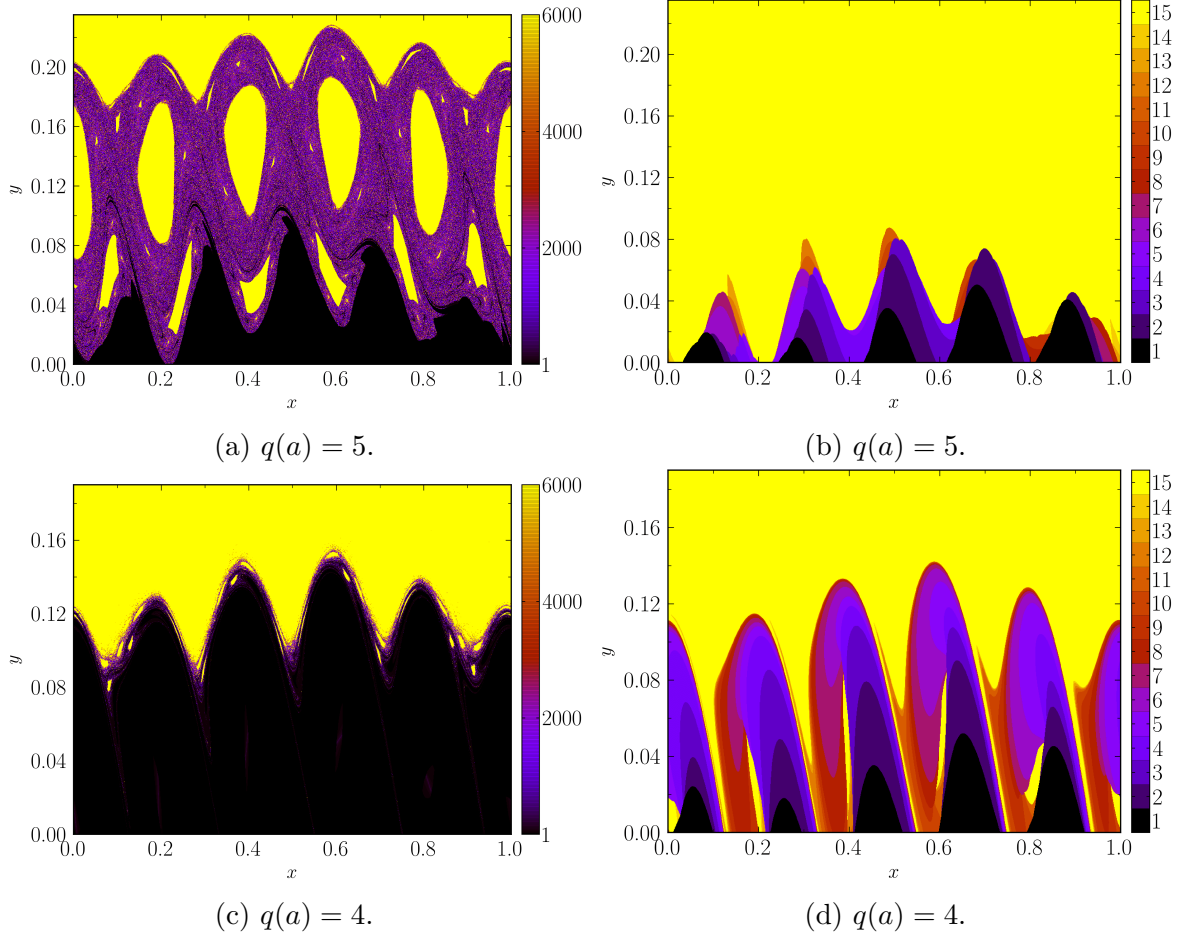


Figura 4.10: Relação entre o comprimento de conexão e as fronteiras formadas.

permitidas a ocorrer por qualquer lugar do tokamak. A região com perda rápida das linhas de campo funciona como um obstáculo, impedindo a fuga das linhas com stickiness em certas regiões do parede.

Até este ponto as análises, feitas sobre as linhas de campo sob influência do limitador ergódico magnético, foram de caráter qualitativo. Porém, nesta última parte da seção fizemos uma abordagem quantitativa da distribuição das linhas que atingem a parede do tokamak e do tempo de escape dessas linhas. Pois, se tivermos informações da porcentagem de linhas que estão escapando por certa região e quais os possíveis valores de  $\tau_e$  que podem ocorrer nessa região, podemos determinar se o padrão de escape causado pelo limitador é mais ou menos desfavorável.

Assim, utilizamos os casos  $q(a) = 4,706$  e  $q(a) = 4,0$  para obtermos informações da distribuição de  $\tau_e$  e da porcentagem das linhas que escaparam. Nas Figs.(4.14a) e (4.14c), para cada condição inicial das seções de Poincaré com  $q(a) = 4,706$  e  $q(a) = 4,0$ , foi determinado um número muito grande de condições iniciais na região entre a parede do tokamak e a primeira superfície magnética não destruída. Para cada condição inicial o mapa foi iterado por, no máximo, até 20000 vezes. Do conjunto de linhas de campo que escaparam, calculamos a porcentagem daquelas que atingiram cada um dos 360 setores



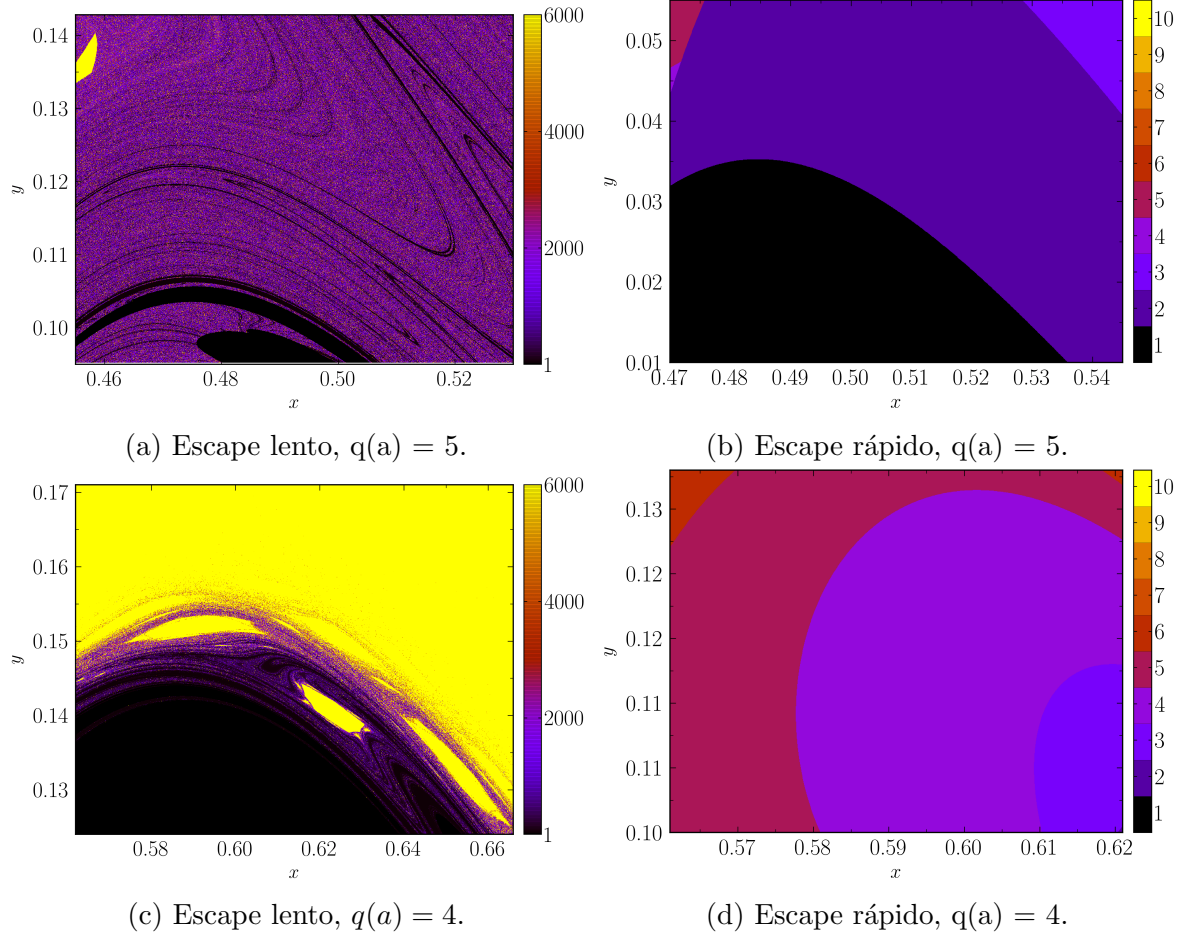


Figura 4.11: Ampliação das Figs. (4.10a) e (4.10c), nas regiões com grande e pequeno comprimentos de conexão.

circulares em que foi dividido a seção circular do vaso toroidal.

Os resultados mostram que os locais de fuga das linhas de campo ficam concentrados em certas regiões da parede, que coincidem com os canais de escape. Basta comparar a localização dos picos no eixo  $x$  das Figs.(4.14a) e (4.14c), com a região em que os canais de escape interceptam o eixo  $x$  nas Figs.(4.13a) e (4.13b). Um outro resultado, até certo ponto inusitado, foi o fato de haver regiões da parede do tokamak onde o escape é nulo.

Em seguida, sempre buscando relacionar as regiões de escape com os tempos de escape, olhamos para os valores de  $\tau_e$  das linhas que escapam por cada um dos 360 setores, Figs.(4.14b) e (4.14d). Vimos que os maiores tempos de escape coincidem com as regiões onde acontecem os picos nos gráficos das porcentagens. Reafirmando a constatação de que as linhas de campo, que são aprisionadas pelas cadeias, escapam somente por certas regiões da câmara.

As figuras mostram ainda que as regiões por onde saem as linhas com os maiores  $\tau_e$  são as regiões com maior incidência de linhas de campo. Enquanto, as regiões com pequeno  $\tau_e$  são melhores distribuídas.

Nesta seção analisamos as regiões de fuga e o tempo de escape das linhas de campo

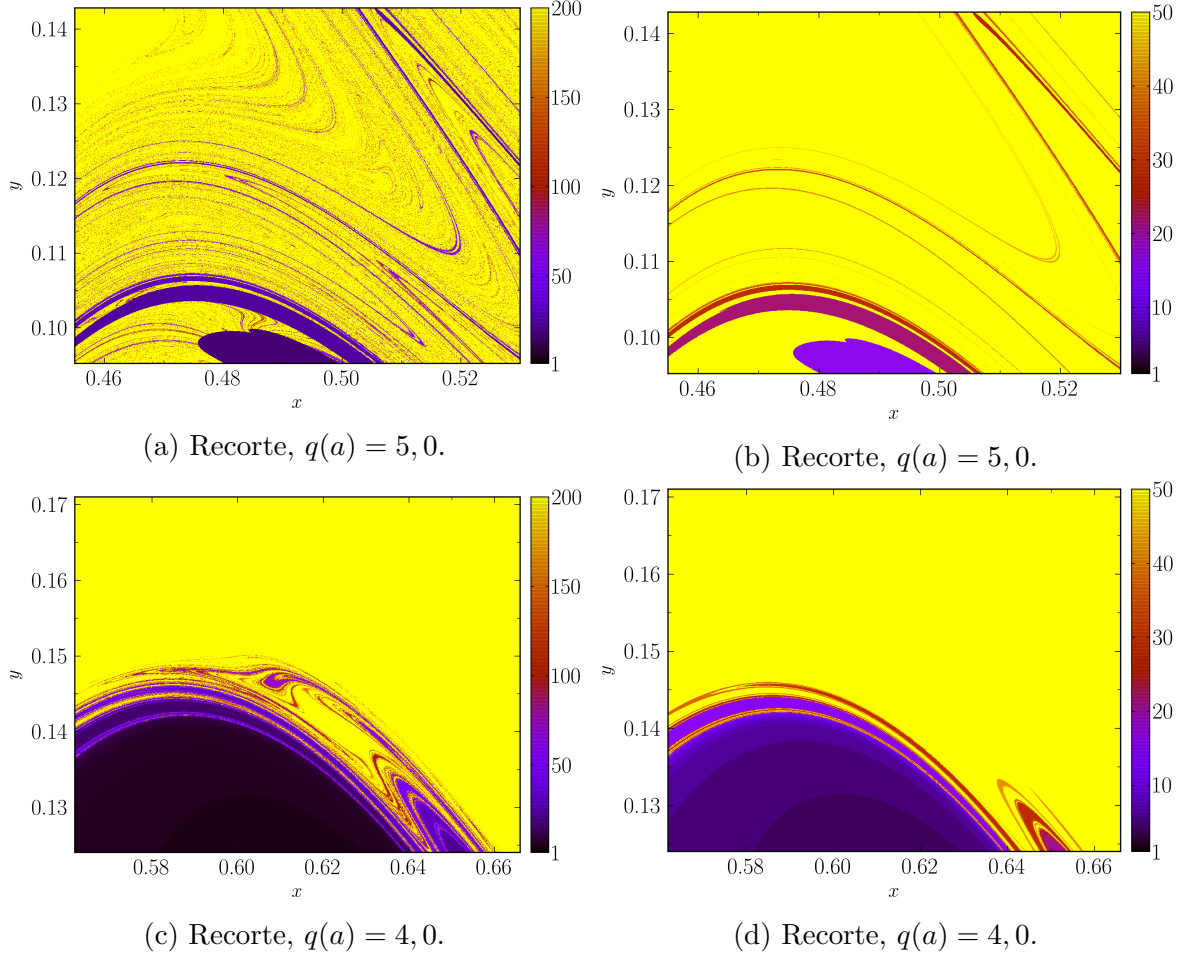


Figura 4.12: Reprodução das figuras (4.11a) e (4.11c) considerando um valor menor de iteração máxima.

entre a parede do tokamak e a primeira superfície magnética não destruída. Foi observado a existência de duas regiões diferentes no mar de caos. Uma com escape rápido que forma bacias de fronteiras bem definidas. E outra com escape lento, formando bacias com estrutura aparentemente fractal. Observou-se, também, que as linhas de campo na região com aprisionamento escapam somente por certas regiões da câmara toroidal. Conhecidas na literatura como canais de escape [15]. A análise qualitativa da influência do limitador no escape das partículas evidencia que, do ponto de vista do acúmulo de partículas altamente energizadas na parede do tokamak, configurações dos parâmetros do mapa de Ullmann podem levar a situações com influência negativa maior ou menor, por parte do limitador ergódico.

### 4.3 Conjectura de Kroetz

As seções de Poincaré mostradas no início da primeira seção deste capítulo, leva-nos a supor que exista uma relação entre as linhas de campo com grande comprimento de conexão, as cadeias de ilhas na região caótica, próximas às primeiras superfícies magnéticas

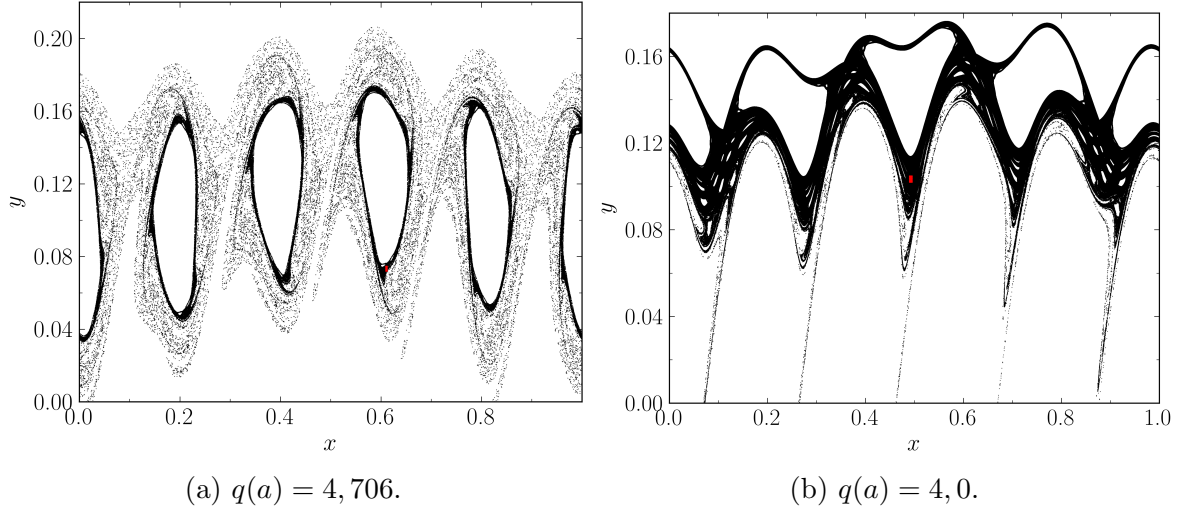


Figura 4.13: Canais de saída para as órbitas com origem (pontos em vermelho) na região com aprisionamento.

não destruídas, e o fator de segurança na borda do plasma  $q(a)$ .

Por isso, para cada  $q(a)$  no intervalo que consideramos nas simulações anteriores, selecionamos a linha com maior comprimento de conexão, entre  $10^5$  condições iniciais, igualmente distribuídas, na parede do tokamak. Em seguida calculamos seu espectro de potência, plotando no eixo vertical a frequência  $\omega$  correspondente ao maior valor do seu espectro.

Obtivemos, assim, o diagrama apresentado na Fig.(4.15). A distribuição dos pontos em patamares está relacionada com a existência de certas cadeias de ilhas magnéticas. Para comprovar essa relação, selecionamos algumas linhas de campo correspondentes aos principais patamares. A origem de cada uma das flechas, na figura, marca os pontos selecionados. Enquanto os valores, para os quais as flechas apontam, são o inverso do número de rotação das cadeias de ilhas onde essas trajetórias ficam aprisionadas. Para os casos considerados houve equivalência entre o número de rotação da cadeia de ilhas e a frequência máxima do espectro de potência. Para fazer essa comparação é preciso lembrar que  $\omega = 1/q$ .

As seções de Poincaré para os casos considerados são mostradas na Fig.(4.16). Em destaque, na cor vermelha, aparecem as órbitas selecionadas pelo método.

Por meio do diagrama, podemos afirmar que em geral as linhas com grande comprimento de conexão, encontradas nas investigações ocorrem devido à existência de cadeias de ilhas magnéticas que aprisionam as trajetórias por várias voltas toroidais.

Os patamares no diagrama surgem porque, para várias das trajetórias suas frequências, correspondentes ao maior espectro de potência, coincidem. Porém, isso acontece quando há uma mesma cadeia de ilhas aprisionando essas linhas por um longo tempo, fazendo com que seus espectros tenham um pico máximo na frequência que coincide com o número de rotação da cadeia de ilhas.

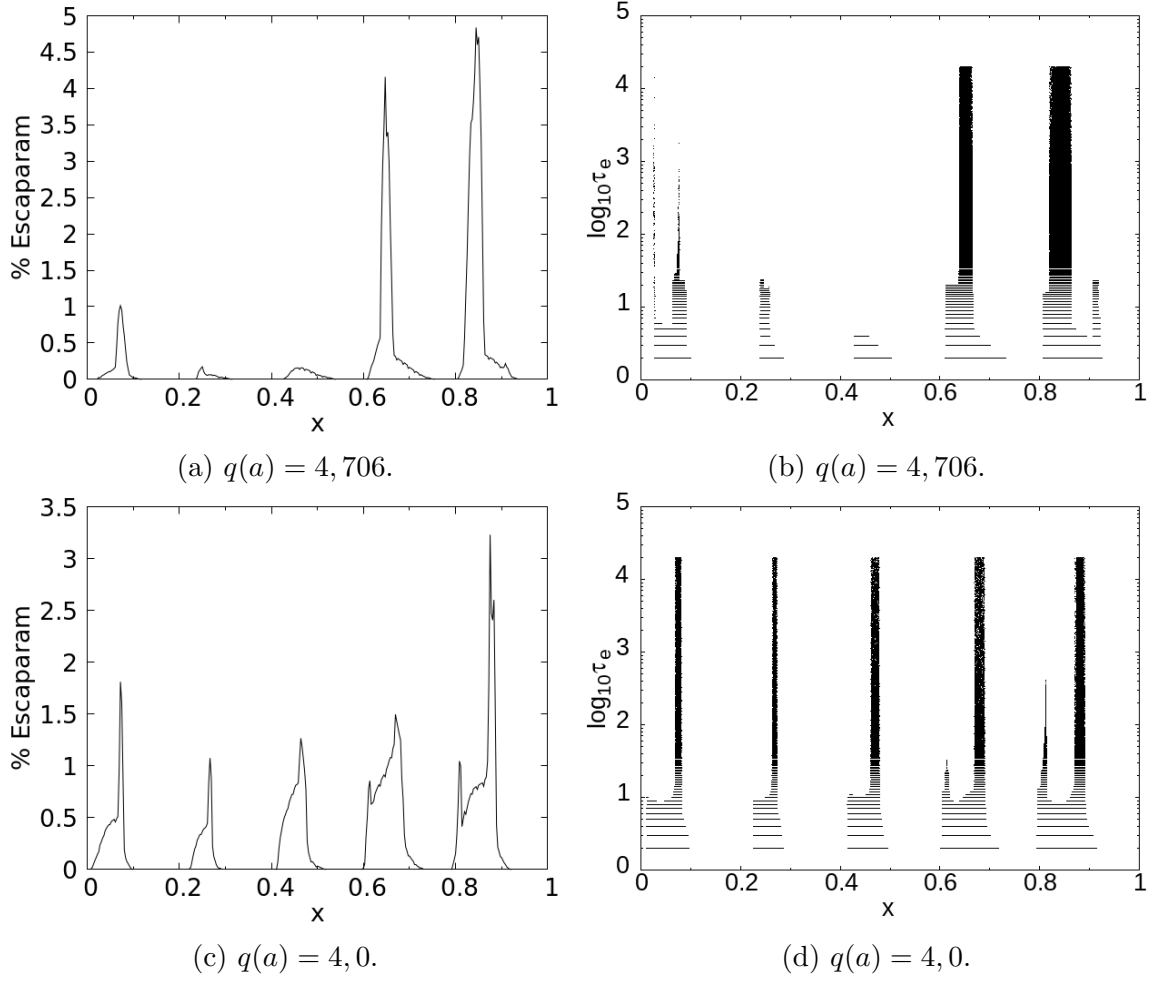


Figura 4.14: As figuras (a) e (c) mostram a porcentagem de linhas de campo que escaparam por cada região da parede do tokamak. Já as figuras (b) e (d) mostram os diferentes valores de comprimentos de conexão das linhas de campo que por essas regiões escaparam. Cada condição inicial foi iterada, por no máximo, 20000 vezes.

O diagrama também mostra que dependendo do intervalo em que  $q(a)$  é variado, a cadeia responsável pelo aprisionamento alterna-se com uma outra. É o caso de  $q(a)$  no intervalo  $[4, 4, 5]$  para as cadeias (5/1) e (13/3).

Na referência [15], Kroetz interessado em diferenciar as cadeias de ilhas responsáveis pelo aprisionamento daquelas responsáveis pelos canais de escape, apresentou o método utilizado nesta seção, mostrando resultados, semelhantes com aqueles por nós obtidos, para o caso de um perfil de fator de segurança não monotônico.

Enfim, nesta última seção mostramos o papel fundamental das cadeias de ilhas, próximas às superfícies magnéticas, no aprisionamento das trajetórias caóticas.

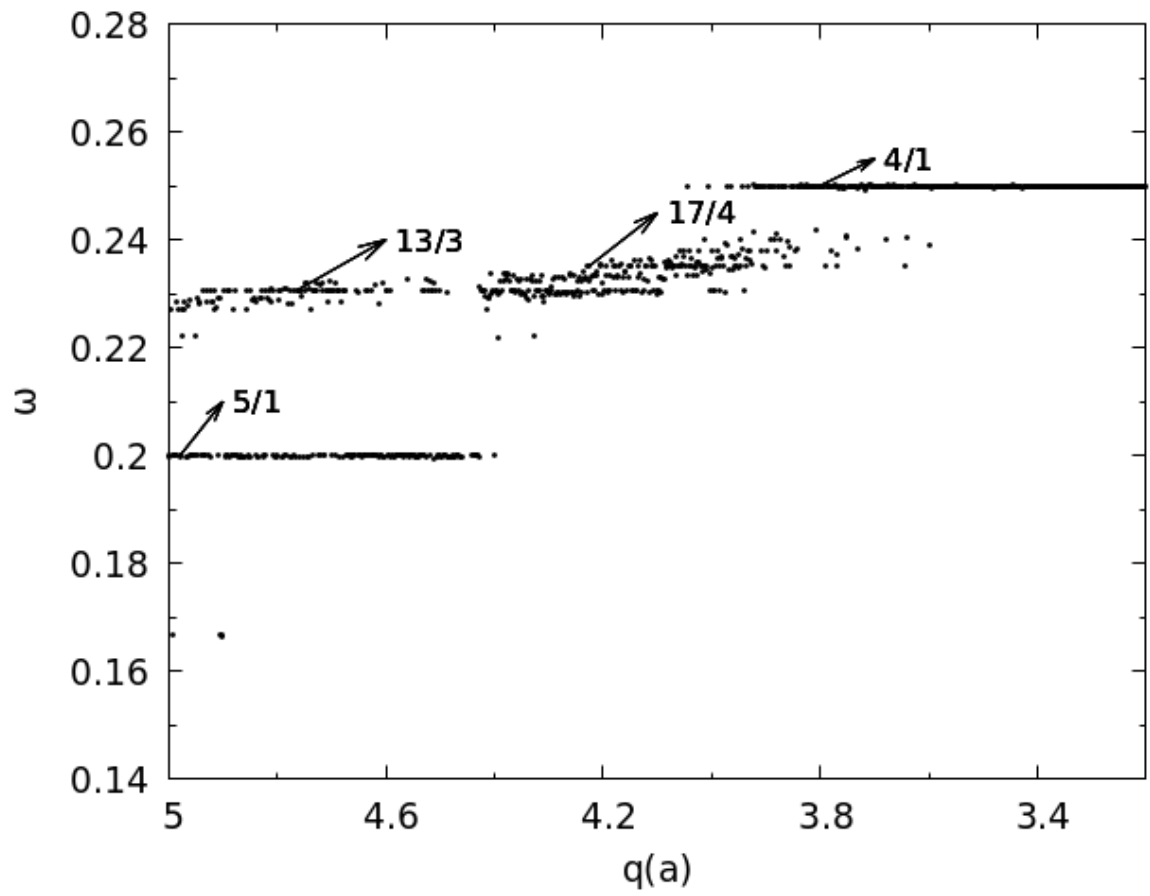
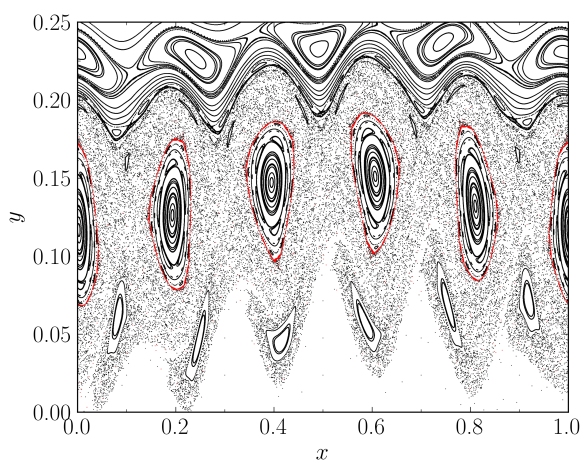
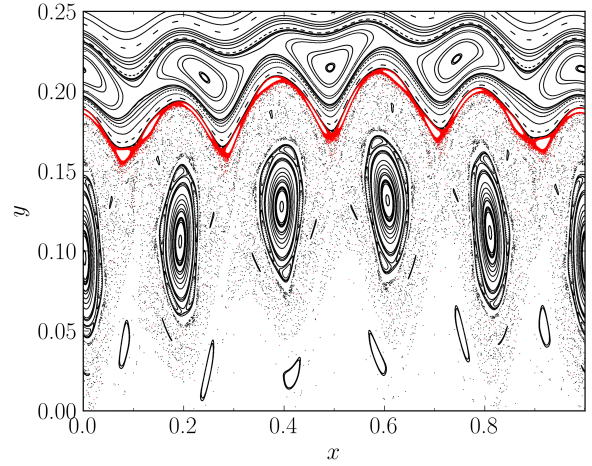


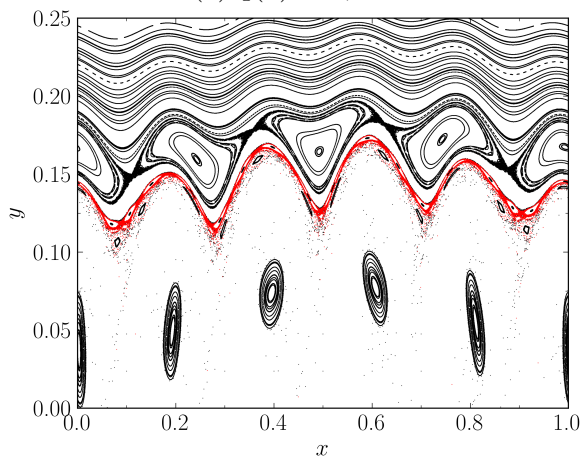
Figura 4.15: Frequência  $\omega$  da componente dominante do espectro de potência para a órbita com maior  $N_{cl}$  com origem na parede do tokamak.



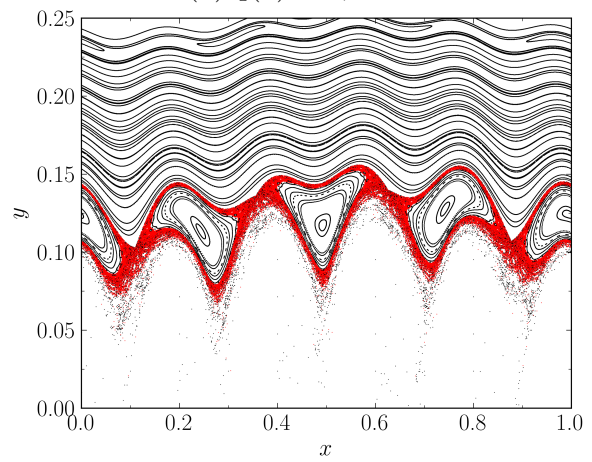
(a)  $q(a) = 4,98$ .



(b)  $q(a) = 4,762$ .



(c)  $q(a) = 4,224$ .



(d)  $q(a) = 3,8$ .

Figura 4.16: Seções de Poincaré com valores de  $q(a)$  correspondentes aos pontos selecionados na figura 4.15. Em vermelho estão representadas as órbitas que tiveram seu espectro de potência calculado.

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesta dissertação, analisamos os padrões de escape, em tokamaks, das linhas de campo magnéticas decorrentes da ação de um campo perturbativo, sobreposto ao campo de equilíbrio na borda do plasma. Como perturbação, consideramos o campo gerado por uma corrente elétrica de um limitador ergódico, formado por anéis de largura muito menor que o comprimento do tokamak.

Em nossas simulações, o campo de equilíbrio esteve sob efeito ressonante de um limitador composto de dois anéis. Essa configuração magnética foi descrita por uma adaptação do mapa simplético de Ullmann, que gera as intersecções das linhas de campo magnético com uma seção do tokamak perpendicular ao eixo magnético, a cada volta toroidal. Neste modelo, cada linha percorre o espaço entre os anéis do limitador apenas sob a ação do campo magnético de equilíbrio. Mas ao atingir a posição de um anel, sofre uma perturbação impulsiva causada pelo campo magnético perturbativo.

O cerne da pesquisa é exposto ao longo dos capítulos três e quatro. No capítulo três, propomos uma extensão do mapa de Ullmann, originalmente proposto para um anel, para simular as linhas de campo sob ação de um limitador ergódico formado por dois anéis. Essa modificação permitiu selecionar um modo perturbativo  $(m, n)$ , diferentemente do caso para um único anel, com um número poloidal  $m$ , mas sem número toroidal  $n$  definido.

Ainda neste capítulo, discutimos como escolher a expansão de primeira ordem da função geratriz, que descreve a correção toroidal na aproximação de tokamaks com grande razão de aspecto.

No capítulo 4, apresentamos os resultados das simulações em três seções. Na primeira discutimos a existência de órbitas caóticas com grande comprimento de conexão. Vimos que, em geral, elas estão relacionadas com cadeias de ilhas, na borda do plasma, próximas às primeiras superfícies magnéticas externas não destruídas. Observamos que a variação de  $q(a)$ , fator de segurança na borda do plasma, dentro do intervalo considerado, influencia o comprimento de conexão das linhas de campo com origem na parede do tokamak. Nesta parte da pesquisa conseguimos visualizar as estruturas em formato “bumerangue” já discutidas na literatura [12] [14] [15]. Em seguida apresentamos o número de rotação



a tempo finito, um método que permite estimar o momento de aprisionamento e escape da linha na cadeia de ilhas. Investigamos a distribuição do comprimento de conexão e descobrimos que as regiões com grande comprimento de conexão, com ordem de grandeza de  $10^4$ , estão restritas a pequenas regiões da parede do tokamak e que essas regiões se modificam, em posição e número, com a mudança de  $q(a)$ . Por fim, vimos que as bacias de saída, para as condições iniciais na parede, do tokamak são modificadas por  $q(a)$  em uma estrutura geométrica semelhante àquela para o comprimento de conexão.

Na segunda seção lidamos com o padrão de escape das linhas de campo considerando toda a região caótica entre a parede do tokamak e a primeira superfície magnética não destruída. Notamos que as regiões de escape dividem-se em duas, uma com escape rápido e fronteiras entre as bacias (de escape ou comprimento de conexão) bem definidas e outra onde as fronteiras não são bem definidas e sugerem fractalidade.

Com base nos exemplos selecionados, a região da seção de Poincaré, onde há o aprisionamento das linhas de campo, tem como escape regiões bem definidas da parede do tokamak, sugerindo a existência de canais de escape.

As simulações das pegadas magnéticas permitiram observar que as linhas de campo, com maior comprimento de conexão, escapam pelas regiões onde também há maior incidência de linhas na parede do tokamak.

Finalmente, na seção 3, confirmamos a conjectura de Kroetz [15], sobre a predominância de aprisionamento das linhas caóticas, ao redor das ilhas principais, próximas às superfícies magnéticas não destruídas, para o nosso modelo de confinamento (perfil do fator de segurança monotônico).

Quando  $q(a)$  é utilizado como fator de variação, verificamos que uma ou mais cadeias de ilhas são responsáveis, em geral, pelo aprisionamento das linhas de campo. Com a variação de  $q(a)$  notamos a alteração das cadeias dominantes. Essas são também responsáveis pelo escape das linhas de campo e pela formação do padrão de escape. Dependendo do valor de  $q(a)$ , o modo perturbativo  $(5, 1)$  pode provocar um depósito de linhas concentrado em apenas uma fração da parede.

O mapa de Ullmann, deduzido a partir de um modelo simplificado que considera o plasma confinado numa geometria cilíndrica com correção toroidal, facilmente implementado e modificado (por exemplo: parâmetros dimensionais do tokamak, densidade de corrente e campo perturbativo), mostrou-se capaz de reproduzir resultados similares àqueles apresentados por mapas mais sofisticados ou por experiências realizadas em tokamaks.

Como continuidade ao trabalho apresentado poderíamos calcular as variedades estáveis e instáveis para complementar a explicação do aprisionamento e escape das linhas magnéticas. Os resultados relacionados com a distribuição dos comprimentos de conexão e as fronteiras das bacias de escape poderiam ser verificadas se, realmente, apresentam estrutura fractal.

O parâmetro de variação, no nosso caso  $q(a)$ , poderia ser trocado pela corrente de



perturbação  $I_h$ , permitindo investigar a influência desta sobre o aprisionamento das linhas de campo na borda do tokamak. Poderíamos, também, explorar a melhor escolha para os modos perturbativos.

# Apêndice A

## Derivadas da função de fluxo

Vamos determinar as derivadas primeira e segunda da função de fluxo  $\psi_0$ , então discutiremos o sinal de  $\psi_0''(r_{m/n})$ .

Dado que

$$\psi_0(r) = \frac{nB_0r^2}{2R_0} - m \int_0^r B_\theta(r')dr', \quad (\text{A.1})$$

então

$$\psi_0'(r) = \frac{nB_0r}{R_0} - mB_\theta(r). \quad (\text{A.2})$$

Como

$$q(r) = \frac{rB_0}{R_0B_\theta}, \quad (\text{A.3})$$

podemos reescrever a expressão (A.2) da seguinte maneira

$$\psi_0'(r) = \frac{B_0r}{R_0} \left[ n - \frac{m}{q(r)} \right]. \quad (\text{A.4})$$

A derivada segunda de  $\psi_0$  é

$$\psi_0'' = \frac{B_0}{R_0} \left[ n - \frac{m}{q(r)} \right] + \frac{B_0r}{R_0} \left[ \frac{m}{q^2(r)} \frac{dq}{dr} \right] \quad (\text{A.5})$$

e como  $q(r_{m/n}) = m/n$ , então

$$\psi_0''(r_{m/n}) = \frac{mB_0r_{m/n}}{R_0} \frac{1}{q^2(r_{m/n})} \frac{dq}{dr} \Big|_{r=r_{m/n}}. \quad (\text{A.6})$$

Já que para o fator de segurança, por nós adotado, sempre vale a desigualdade  $dq/dr > 0$ , então  $\psi_0''(r_{m/n}) > 0$ .

# Referências

- [1] C. W. Horton e S. Benkadda, *ITER Physics* (World Scientific, 2015).
- [2] W. Horton, *Turbulent Transport in Magnetized Plasmas* (World Scientific, 2012).
- [3] H. P. Furth, *Nuclear Fusion* **15**, 487 (1975).
- [4] A. H. Boozer, *Reviews of Modern Physics* **76**, 1071 (2005).
- [5] R. D. Hazeltine e J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison Wesley, 1992).
- [6] J. R. Cary e R. G. Littlejohn, *Annals of Physics* **151**, 1 (1983).
- [7] D. C. Taborda, MHD Equilibrium in Tokamaks with Reversed Current Density, Dissertação de Mestrado, IFUSP, São Paulo, 2012.
- [8] F. Karger e K. Lackner, *Physics Letter A* **61**, 385 (1977).
- [9] Ph. Ghendrih, A. Grosman e H. Capes, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **38**, 1653 (1996).
- [10] C. J. A. Pires, E. A. O. Seattone, M. Y. Kucinski, A. Vannucci e R. L. Viana, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **47**, 1609 (2005).
- [11] T. E. Evans, R. K. W. Roeder, J. A. Carter e B. I. Rapoport, *Contributions to Plasma Physics* **44**, 235 (2004).
- [12] A. Wingen, M. Jakubowski, K. H. Spatschek, S. S. Abdullaev, K. H. Finken e M. Lehnen, *Physics of Plasmas* **14**, 042502-1 (2007).
- [13] I. Joseph, T. E. Evans, A. M. Runov, M. E. Fenstermacher, M. Groth, S. V. Kasilov, C. J. Lasnier, R. A. Moyer, G. D. Porter, M. J. Schaffer, R. Schneider e J. G. Watkins, *Nuclear Fusion* **48**, 045009 (2008).
- [14] T. Kroetz, F. A. Marcus, M. Roberto, I. L. Caldas, R. L. Viana e E. C. Silva, *Computer Physics Communications* **180**, 642 (2009).
- [15] T. Kroetz, M. Roberto, E. C. Silva, I. L. Caldas e R. L. Viana, *Physics of Plasmas* **15**, 092310-1 (2008).
- [16] K. H. Finken, S. S. Abdullaev, M. W. Jakubowski, M. F. M. Bock, S. Bozhnikov, C. Busch, M. Hellermann, R. Jaspers, Y. Kikuchi, A. Krämer-Flecken, M. Lehnen, D. Schega, O. Schimitz, K. H. Spatschek, B. Untenberg, A. Wingen, R. C. Wolf e O. Zimmermann, *Physical Review Letters* **98**, 065001-1 (2007).

- [17] K. Ullmann e I. L. Caldas, *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 2129 (2000).
- [18] G. Contopoulos e M. Harsoula, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **Vol.20, No. 7**, 2005 (2010).
- [19] K. Nishikawa e M. Wakatani, *Plasma Physics*, 2nd ed. (Springer, 2000).
- [20] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, 3rd ed. (Springer, 2004).
- [21] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (Wiley, 1999).
- [22] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 3rd ed. (Springer, 2018).
- [23] J. Wesson, *Tokamaks* (Oxford University Press, 1987).
- [24] R. A. Cairns, *Plasma Physics* (Springer, 1985).
- [25] J. P. Freidberg, *Reviews of Modern Physics* **Vol.54, No.3**, 801 (1982).
- [26] B. F. Bartoloni, Mapas Simpléticos com Correntes Reversas em Tokamaks, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 2016.
- [27] W. M. Stacey, *Fusion: An introduction to the Physics and Technology of Magnetic Confinement Fusion*, 2nd ed. (Wiley-VCH, 2010).
- [28] E. A. S. Olschewski, Construção e Utilização de um Limitador Ergódico Magnético no Tokamak TCABR, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 2004.
- [29] I. L. Caldas, J. M. Pereira, K. Ullmann e R. L. Viana, *Chaos, Solitons & Fractals* **Vol. 7. No. 7**, 991 (1996).
- [30] E. C. Silva, I. L. Caldas e R. L. Viana, *Brazilian Journal of Physics* **Vol. 32, No. 1**, 39 (2002).
- [31] G. R. C. Almeida, Método dos Mapas para Estudo de Tokamaks com Desviadores Poloidais, Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 2017.
- [32] R. L. Viana, Problemas Não-lineares com Perturbação Impulsiva e Aplicações em Física de Plasmas, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 1991.
- [33] I. L. Caldas, R. L. Viana, M. S. T. Araujo, A. Vannucci, E. C. Silva, K. Ullmann e M. V. A. P. Heller, *Brazilian Journal of Physics* **Vol. 32, No. 4**, 980 (2002).
- [34] W. Feneberg, *Proceedings of the Eighth European Conference of Controlled Fusion and Plasma Physics*. **1**, 3 (1977).
- [35] P. J. Morrison, *Physics of Plasmas* **7**, 2279 (2000).
- [36] R. Balescu, M. Vlad e F. Spineanu, *Physical Review E* **Vol. 58, No. 1**, 951 (1998).
- [37] A. S. Fernandes e I. L. Caldas, Campos Ressonantes Criados por Correntes Elétricas em Tokamaks, Publicações IFUSP, 539 (1985).
- [38] A. M. Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica* (2019).  
<https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/notas-de-aulas/>.

- [39] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos: conservative classical systems and quantum manifestations*, 2en ed. (Springer, 2004).
- [40] K. Ullmann, Métodos de Análise de Mapeamentos Não-lineares com Aplicações à Física de Plasmas, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 1998.
- [41] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. (Addison Wesley, 2000).
- [42] M. C. R. Andrade, Formulação para Superfícies Magnéticas, Dissertação de Mestrado, IFUSP, São Paulo.
- [43] A. S. Fernandes, M. V. A. Heller e I. L. Caldas, Plasma Physics and Controlled Fusion **Vol. 30, No. 10**, 1203 (1988).
- [44] C. V. Abud, Transporte em Sistemas Hamiltonianos Não-twist, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo, 2013.
- [45] G. M. Zaslavsky, Physics Reports **371**, 461 (2002).
- [46] C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, N. Voglis e R. Dvorak, Journal of Physics A: Mathematical and General **30**, 8167 (1997).
- [47] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: an introduction* (Wiley, 1989).
- [48] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2002).
- [49] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed. (Elsevier Academic, 2005).
- [50] E. C. Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana e M. A. F. Sanjuán, Physics of Plasmas **9**, 4917 (2002).
- [51] T. Kroetz, Transporte em Sistemas Caóticos Descritos por Mapas com Aplicações em Plasmas de Fusão, Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, 2010.