



Movimento de partículas.

Francisco Alberto Marcus

(albertus@if.usp.br)

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Livro

Esta apresentação é a primeira de uma série do Grupo de Estudos Plasmáticos.

Baseada no capítulo 2 do livro:

INTRODUCTION TO
PLASMA PHYSICS AND
CONTROLLED FUSION

Vol. 1: Plasmas Physics

2^a edição (1984), de Francis F. Chen

Resumo da Apresentação

- Campos \vec{E} e \vec{B} uniformes.
 - $\vec{E} = \vec{0}$
 - E finito e constante
 - Campo Gravitacional
- Campo Magnético não uniforme.
 - Deriva pelo $\nabla \vec{B}$
 - Deriva por curvatura de \vec{B}

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Admite-se que os campos \vec{E} e \vec{B} não são modificados pela presença das partículas carregadas.

■ $\vec{E} = \vec{0}$.

A partícula carregada possui apenas a rotação ciclotrônica.
Equação de movimento:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

Adotando $\vec{B} = B\hat{z}$, temos $m\dot{v}_x = qBv_y$ $m\dot{v}_y = -qBv_x$ $m\dot{v}_z = 0$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Derivando as equações,

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m} \dot{v}_y = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x \quad \ddot{v}_y = \frac{qB}{m} \dot{v}_x = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y \quad (2)$$

Estas equações descrevem o oscilador harmônico cuja frequência ciclotronica é dada por

$$\omega_c = \frac{|q| B}{m} \quad (3)$$

a solução das equações (2) é dada por

$$v_{x,y} = v_{\perp} e^{\pm \omega_c t} \quad (4)$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

onde v_{\perp} é a velocidade positiva no plano perpendicular à \vec{B} .
Então

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \quad (5)$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y} \quad (6)$$

integrando novamente temos

$$x - x_0 = -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cdot e^{i\omega_c t} \quad y - y_0 = \pm i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cdot e^{i\omega_c t} \quad (7)$$

Definimos o raio de Larmor como

$$r_L \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{m v_{\perp}}{|q| B} \quad (8)$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

Temos como resultado

- Órbita circular em torno de um *centro de guia* (x_0, y_0).
- A direção de rotação da partícula é sempre no sentido a criar um campo magnético oposto ao campo magnético externo (figura 1). Portanto, o plasma é *diamagnético*.

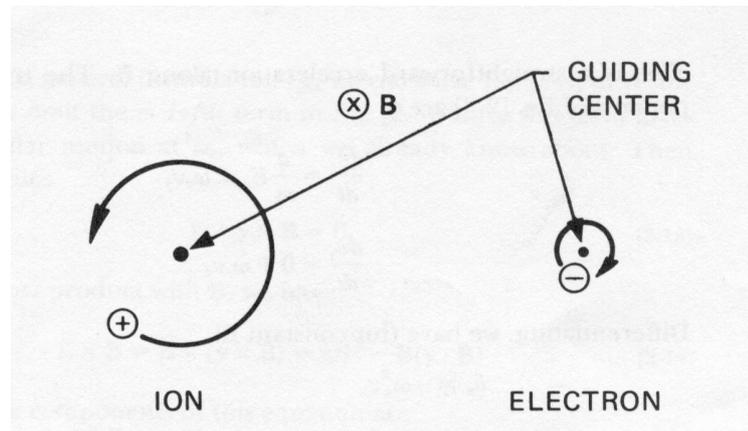


Figura 1: Rotação das partículas em relação ao centro de guia.

$$\vec{E} = \vec{0}$$

- A trajetória descrita é uma hélice cilíndrica (figura 2).

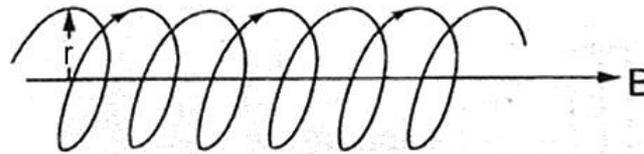


Figura 2: Rotação das partículas em relação ao centro de guia.

Campo elétrico finito.

O movimento será a composição do movimento circular de Larmor com a deriva dos centro de guia.

Escolhemos \vec{E} estando no plano x - z de modo que $E_y = 0$.

Como no item anterior, a componente z não está relacionada com as componentes transversas e pode ser tratada separadamente.

Equação de movimento:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (9)$$

Temos como soluções:

$$v_x = v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \quad (10)$$

$$v_y = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} \quad (11)$$

Campo elétrico finito.

$$v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0} \quad (12)$$

Como antes, temos o movimento circular de Larmor, mas sobreposta à velocidade de deriva \vec{v}_{gc} do centro de guia na direção $-y$, isto para o campo $E_x > 0$ conforme mostra a figura abaixo.

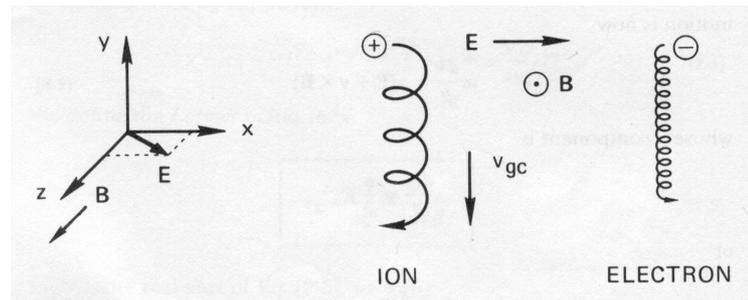


Figura 3: Movimento do centro de guia.

Campo elétrico finito.

Obtendo \vec{v}_{gc} através da expressão vetorial.

Omitimos $m \frac{d\vec{v}}{dt}$ na equação 9, por este termo tratar apenas do movimento circular ω_c , já conhecido.

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (13)$$

Tomando o produto vetorial com \vec{B} e utilizando a propriedade $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ temos:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}B^2 - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) \quad (14)$$

Campo elétrico finito.

A componente transversa desta equação é

$$\vec{v}_{\perp gc} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv \vec{v}_E \quad (15)$$

Definimos \vec{v}_E como velocidade de deriva dos centros de guia pelo campo elétrico.

\vec{v}_E é independente de q , m e \vec{v}_{\perp} . Tridimensionalmente, temos o aspecto mostrado na figura 4.

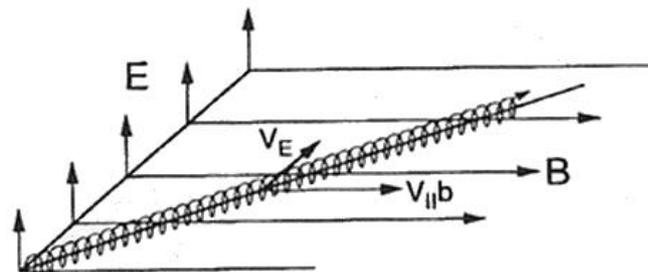


Figura 4: Órbita do centro de guia.

Campo Gravitacional.

O resultado anterior pode ser aplicado a outras forças trocando $q\vec{E}$ na equação 9 por uma força qualquer \vec{F} . Esta \vec{F} causa um movimento de deriva do centro de guia dado por:

$$\vec{v}_f = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \quad (16)$$

Em particular, se \vec{F} é a força gravitacional $m\vec{g}$

$$\vec{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (17)$$

Campo Gravitacional.

Sob a força gravitacional, os ions e os eletrons movimentam-se em direções opostas, então haverá uma corrente resultante no plasma dado por

$$\vec{J} = n(M + m) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} \quad (18)$$

A razão física para esta deriva (figura 5) é novamente a mudança no raio de Larmor pelo fato da partícula ganhar e perder energia no campo gravitacional.

Campo Gravitacional.

O sentido de rotação continua sendo diferente para ions e eletrons, mas a força sobre eles atua na mesma direção, e portanto a deriva é no sentido oposto.

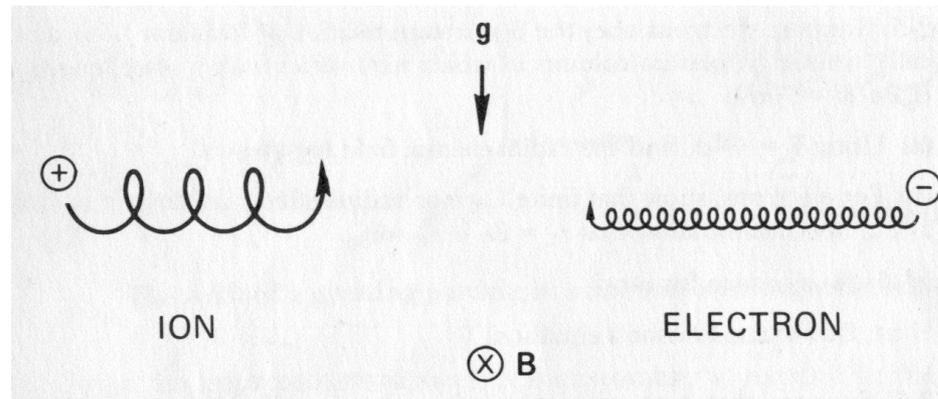


Figura 5: Órbita do centro de guia sob influência do campo gravitacional.

Deriva pelo $\nabla \vec{B}$.

Introdução.

Dada a complexidade com que as equações são escritas, devido à introdução da inomogeneidade, torna-se difícil obter expressões exatas para descrever o movimento dos centros de guia.

Para obter uma solução aproximada, é comum expandir as expressões em um raio de convergência na ordem de r_L/L , onde L é a escala de comprimento da inomogeneidade.

Este tipo de teoria é chamado de *Teoria Orbital*.

Deriva pelo gradiente de \vec{B}

Neste caso, as linhas de campo magnético são retilíneas, mas sua densidade aumenta, por exemplo, na direção y (figura 6).

Deriva pelo $\nabla \vec{B}$.

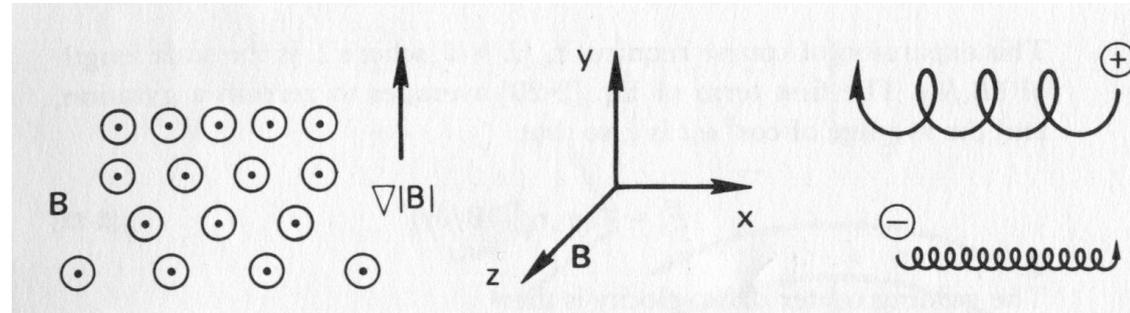


Figura 6: Órbita do centro de guia em um campo magnético não uniforme.

Modelo esquemático.

O gradiente de B faz com que o raio de Larmor seja maior na parte inferior, onde as linhas de campo são menos densas, e menor na parte superior, proporcionando a deriva em direções opostas para íons e elétrons, perpendicular ao \vec{B} e ∇B .

- $v_{\nabla B} \propto r_L / L \cdot v_{\perp}$

Deriva pelo $\nabla \vec{B}$.

Considerando $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$, e tomando a média sobre um ciclo de rotação.

Temos $\bar{F}_x = 0$.

Desejamos calcular \bar{F}_y .

Usaremos os resultados das expressões (4) e (7). Temos:

$$F_y = -qv_x B_z(z) = -qv_{\perp} (\cos \omega_c t) \left[B_0 \pm r_L (\cos \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} \right] \quad (19)$$

Deriva pelo $\nabla \vec{B}$.

Tomando Taylor de \vec{B} :

$$B_z = B_0 + y \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right) + \dots \quad (20)$$

para $r_L/L \ll 1$ onde L é a escala de comprimento de $\frac{\partial B_z}{\partial y}$.

A média do primeiro termo é zero, para $\cos \omega_c t$ é $1/2$, de modo que

$$\bar{F}_y = \pm q v_{\perp} r_L \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \quad (21)$$

Deriva pelo $\nabla \vec{B}$.

Então a velocidade do centro de guia é

$$\vec{v}_{gc} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_y}{|B|} \hat{x} = \pm \frac{v_{\perp} r_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{x} \quad (22)$$

Pode ser generalizado

$$\vec{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^2} \quad (23)$$

- Íons e elétrons deslocam-se em direções opostas produzindo um corrente transversa a \vec{B} .

Deriva por curvatura de \vec{B} .

Assumimos inicialmente, que as linhas de campo magnético tem curvatura constante com raio \vec{R}_c , figura 7.

A deriva do centro de guia aparece devido à força centrífuga resultante do movimento das partículas ao longo das linhas de campo curvas.

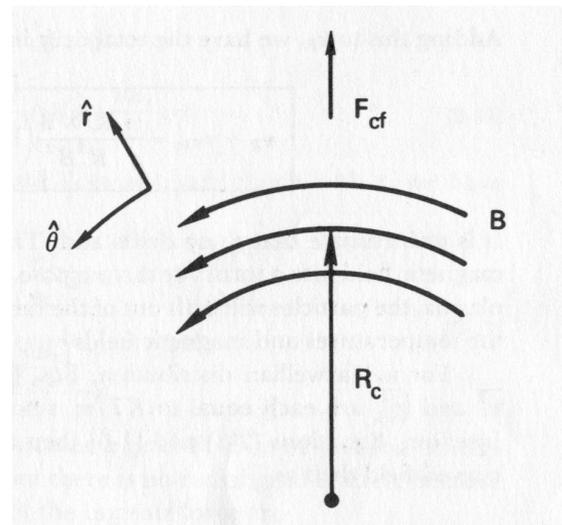


Figura 7: Campo magnético de curvatura constante.

Deriva por curvatura de \vec{B} .

Se v_{\parallel}^2 o quadrado da componente randômica da velocidade ao longo de \vec{B} , a força centrífuga média é dada por:

$$\vec{F}_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \hat{r} = mv_{\parallel}^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (24)$$

De acordo com a eq.16,

$$\vec{v}_R = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_c \times \vec{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2} \quad (25)$$

\vec{v}_R é chamado de deriva por curvatura.

Deriva por curvatura de \vec{B} .

Calculemos o gradiente de B devido à variação de $|B|$ quando levamos em conta o raio.

No vácuo $\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$.

Em coordenadas cilíndricas $\nabla \times \vec{B}$ tem apenas a componente z , desde que \vec{B} tem apenas a componente θ e $\nabla \vec{B}$ apenas a r .

Temos então,

$$\left(\nabla \times \vec{B}\right)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) = 0 \quad B_\theta \propto \frac{1}{r} \quad (26)$$

Deriva por curvatura de \vec{B} .

Portanto

$$|B| \propto \frac{1}{R_c} \quad \frac{\nabla |B|}{|B|} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2} \quad (27)$$

Usando a equação (23) montamos

$$\vec{v}_{\nabla B} = \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_L}{B^2} \vec{B} \times |B| \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} \quad (28)$$

Deriva por curvatura de \vec{B} .

Adicionando este resultado a \vec{v}_R , temos que a deriva total resultante do campo magnético curvo é

$$\vec{v}_R + \vec{v}_{\nabla B} = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2 B} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \quad (29)$$

Isto significa que curvar o campo magnético para confinar o plasma, causa a deriva das partículas na direção radial.



Deriva por curvatura de \vec{B} .

Conseqüências:



Deriva por curvatura de \vec{B} .
