Plasmas como Fluidos

Jefferson Stafusa Elias Portela, Gustavo Zampier dos Santos Lima e Antonio Marcos Batista

(ibere@if.usp.br)

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Livro

Esta apresentação é baseada em parte de uma série do Grupo de Estudos Plasmáticos.

Ela é essencialmente baseada no capítulo 3 do livro:

INTRODUCTION TO
PLASMA PHYSICS AND
CONTROLLED FUSION
Vol. 1: Plasmas Physics

2ª edição (1984), de Francis F. Chen

Resumo da Apresentação

- Introdução
- Equações de Maxwell
- Permeabilidade Magnética
- Permissividade Elétrica
- Equação de Movimento do Fuido
- Derivada Convectiva
- Equação do Fluido
- Colisões
- Equação da Continuidade
- Equação de Estado
- Conjunto Completo das Equações do Fluido
- Deriva do Fluido Perpendicular a B
- Deriva do Fluido Paralelo a B

Introdução

O capítulo 3 introduz o estudo de *plasmas como fluidos*, e ele se inicia com noções de como se poderia aplicar aos plasmas o eletromagnetismo de meios materiais.

Conclui-se que não é possível atribuir uma *permeabilidade magnética* μ (constante) a um plasma, e que sua *permissividade elétrica* ϵ depende do campo magnético $\mathbf{B}$ mesmo em um caso particular muito simples - sendo extremamente complicada no caso geral.

De modo que, usualmente, utilizam-se as equações de Maxwell *no vácuo* ao se trabalhar com plasmas.

Equações de Maxwell

No vácuo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sigma/\epsilon_0, & (1) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, & (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (3) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}), & (4) \end{aligned}$$

sendo:

- $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ os campos elétrico e magnético, respectivamente;
- σ e $\mathbf{j}$ as densidades de carga e corrente, respectivamente;
- ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo;
- μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo.

Equações de Maxwell (*cont.*)

Em um meio material:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \sigma_{\mathrm{f}}, && (5) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, && (6) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, && (7) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \dot{\mathbf{D}}, && (8) \end{aligned}$$

sendo:

- $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ o campo elétrico efetivo no meio [a];
- $\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ o campo magnético "efetivo" no meio;
- σ_{f} e $\mathbf{j}_{\mathrm{f}}$ as densidades de carga e corrente *livres*;
- ϵ e μ_{m} a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do meio.

[a] **P** é a polarização: densidade de momento de dipolo elétrico.

Permeabilidade Magnética

A magnetização **M** é a densidade de momento magnético,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V}\sum_i \boldsymbol{\mu}_i, \tag{9}$$

sendo $\boldsymbol{\mu}_i$ o momento magnético do i-ésimo “domínio” (e. g. um íon em órbita circular).
Pode considerar-se **M** gerado pela densidade de corrente “confinada” (*bound*) $\mathbf{j}_\mathrm{b}$ dada por

$$\mathbf{j}_\mathrm{b} = \nabla \times \mathbf{M}. \tag{10}$$

Nas equações de Maxwell no vácuo, além de $\mathbf{j}_\mathrm{b}$ devemos considerar também a densidade de corrente livre (i. e., aplicada externamente),$\mathbf{j}_\mathrm{f}$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_\mathrm{f} + \mathbf{j}_\mathrm{b} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}). \tag{11}$$

Permeabilidade Magnética (*cont.*)

Queremos escrever esta última equação de modo mais simples:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_\mathrm{f} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \tag{12}$$

o que pode ser feito do modo usual, incluindo $\mathbf{j}_\mathrm{b}$ em $\mathbf{H}$ usando as definições $\mathbf{j}_\mathrm{b} = \nabla \times \mathbf{M}$ e

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{M}. \tag{13}$$

Definição esta útil assumindo-se um relação linear $\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\mathbf{H}$, em que χ_m é a susceptibilidade magnética, que leva a conhecida relação

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_\mathrm{m})\mathbf{H} \equiv \mu_\mathrm{m}\mathbf{H}. \tag{14}$$

No entanto temos que $|\boldsymbol{\mu}_i| = \frac{mv_{i\perp}^2}{2B} \propto 1/B \;\; \Rightarrow \;\; M \propto 1/B$ e, portanto, a relação linear $\mathbf{B} = \mu_\mathrm{m}\mathbf{H}$ não é válida.

Assim, não é útil considerar um plasma como um meio magnético.

Permissividade Elétrica

A polarização **P**, densidade de momento de dipolo elétrico, origina uma densidade de carga "confinada" σ_b dada por

$$\sigma_\mathrm{b} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \qquad (15)$$

Nas equações de Maxwell no vácuo devemos considerar também as cargas livres:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\sigma_\mathrm{f} + \sigma_\mathrm{b})/\epsilon_0, \qquad (16)$$

que, com $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \epsilon \mathbf{E}$, pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_\mathrm{f}. \qquad (17)$$

Onde fizemos $\epsilon = (1 + \chi_\mathrm{e})\epsilon_0$, supondo que valha a relação linear

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_\mathrm{e} \mathbf{E}. \qquad (18)$$

Permissividade Elétrica (*cont.*)

Segundo o Cap. 2, plasmas só exibem efeitos de polarização na presença de campo elétrico variável - que dá origem à corrente de polarização $\mathbf{j}_{\mathrm{p}}$.

De posse de $\mathbf{j}_{\mathrm{p}}$, torna-se mais fácil trabalhar com a quarta equação de Maxwell do que com a primeira:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \mathbf{j}_{\mathrm{p}} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}). \tag{19}$$

Queremos escrever essa equação na forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_{\mathrm{f}} + \epsilon \dot{\mathbf{E}}), \tag{20}$$

o que é possível, se $\mathbf{j}_{\mathrm{p}} \parallel \dot{\mathbf{E}}$, escolhendo a permissividade

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{j_{\mathrm{p}}}{\dot{E}}. \tag{21}$$

Permissividade Elétrica (*cont.*)

Há pelo menos uma situação em que $\mathbf{j}_\mathrm{p} \parallel \dot{\mathbf{E}}$ (Cap. 2), que é a de $\mathbf{E}$ lentamente variável (em relação à freqüência ω_c) e ortogonal a $\mathbf{B}$, caso em que ela é dada por

$$\mathbf{j}_\mathrm{p} = \frac{\rho}{B^2}\dot{\mathbf{E}}, \tag{22}$$

o que nos leva a

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2} \qquad \text{ou} \qquad \epsilon_\mathrm{R} \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\mu_0 \rho c^2}{B^2} \tag{23}$$

em que ϵ_R é "constante dielétrica de baixas freqüências do plasma para movimentos tranversos" e ρ é a densidade de massa do plasma.

Numa descarga típica do TCABR temos $\mathbf{B} = 0,5\mathrm{T}$, $n = 7 \cdot 10^{18}$ e, portanto, $\epsilon_\mathrm{R} \approx 5290$, um valor alto, que indica forte blindagem a campos oscilantes (assim como um pequeno λ_D indica a blindagem usual de campos estáticos).

Equação de Movimento do Fluido

- Na aproximação de um fluido, podemos considerar o plasma como sendo composto de dois ou mais *interpenetrating fluids*, um de cada espécies. Num caso simples, quando há somente uma espécie de íons, necessitamos de suas equações de movimento, uma para o fluido carregado positivamente e outra pra o fluido carregado negativamente.
- Num gás ionizado parcialmente necessitamos também de uma equação para os átomos neutros. Num fluido neutro a interação com íons e elétrons se dá somente através de colisões.
- Os fluidos de íons e de elétrons interagem um com o outro mesmo na ausência de colisões, devido ao campo magnético e elétrico gerados por eles.

Derivada Convectiva

A equação de movimento de uma partícula é dada por:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{24}$$

assumiremos que:

- Não há colisões e não há movimentos térmicos:
- Logo todas as partículas no fluido movem-se juntas e a velocidade média $\mathbf{u}$ do elemento de fluido é a mesma que a velocidade individual da partícula $\mathbf{v}$.

se multiplicando n na equação temos então:

$$mn\frac{d\mathbf{u}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{25}$$

Esta fórmula, entretanto, não é conveniente para ser usada, pois a derivada temporal é tomada na posição da partícula e esperamos ter uma equação dos elementos de fluido para um ponto fixo no espaço.

Derivada Convectiva *cont.*

- Para fazer a transformada de variáveis num referencial fixo, consideraremos $\mathbf{G}(x,t)$ sendo qualquer propriedade do fluido, neste caso unidimensional, sendo a mudança de $\mathbf{G}$ com o tempo, num referencial móvel com o fluido, a soma dos dois termos:

$$\frac{d\mathbf{G}(x,t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{u_x}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} \tag{26}$$

- Observamos que o primeiro termo do lado direito representa a mudança de $\mathbf{G}$ em um ponto fixo no espaço, e o segundo termo representa a mudança de $\mathbf{G}$ conforme o observador move-se junto com o referencial em 3 dimensões temos:

$$\frac{d\mathbf{G}(x,t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{G} \tag{27}$$

Esta é a derivada convectiva.

Derivada Convectiva: *exemplos*

A figura abaixo mostra um resistor aquecendo a água. Seja $\mathbf{G}(x,t)$ a temperatura T, temos ∇G positivo na direção ascendente.

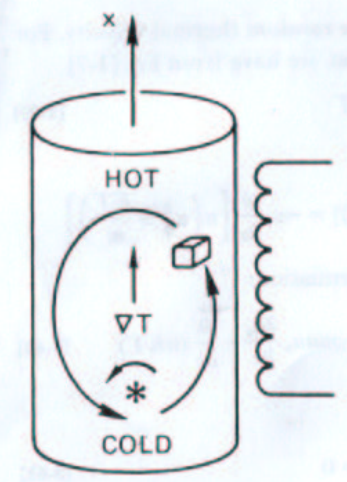


FIGURE 3-1 Motion of fluid elements in a hot water heater.

Se o aquecedor está ligado então o elemento de fluido se moverá e teremos $\frac{dT}{dt} > 0$. Se a roda estiver ligada haverá um processo convectivo instalado e $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} > 0$ e $u_x > 0$, logo $\mathbf{u}.\nabla T > 0$. Logo temos

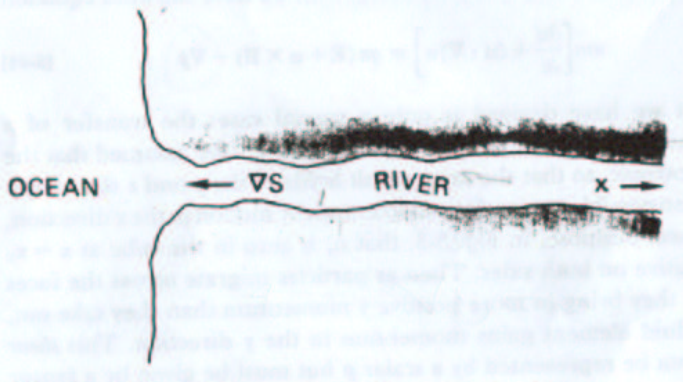
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla T) \tag{28}$$

Derivada Convectiva: (*exemplos*)

Como um segundo exemplo tomaremos **G** como sendo a salinidade S nas proximidades da foz do rio, x positivo está na direção do rio acima, há normalmente um gradiente de de S no qual $\partial S/\partial x < 0$. Se a maré sobe, a interfase entre o sal e a água doce se move rio acima, e $u_x > 0$. Então:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (\mathbf{u_x} \cdot \nabla S) \tag{29}$$

que significa que a salinidade cresce para qualquer ponto. É lógico que se chover teremos uma diminuição da salinidade em qualquer parte e o termo negativo de $\frac{dT}{dt}$ deverá ser incluido na equação.



Direction of the salinity gradient at the mouth of a river.

Derivada convectiva:

No caso do Plasma, tomaremos **G** como sendo a velocidade do fluido **u** e escrito como:

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})\right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u}x\mathbf{B}) \tag{30}$$

Onde $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ é a derivada temporal num referencial fixo.

Equação do Fluido

De acordo com o livro temos que a força do gradiente de pressão é dada por:

$$mn\left[\frac{\partial u_x}{\partial t}+(u_x\cdot\nabla u_x\right]=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{31}$$

Adicionando as forças eletromagnéticas e generalizando para 3 dimensões temos que o equação do fluido é:

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla \mathbf{u}\right]=qn(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})-\nabla p \tag{32}$$

Colisões

- Se há um gás neutro, o fluido carregado trocará momento através de colisões. Este momento perdido será proporcional a uma velocidade relativa $\mathbf{u} - \mathbf{u_0}$, onde u_0 é a velocidade do fluido neutro. Se τ, o tempo livre médio entre colisões, for aproximadamente constante,o termo da força resultante pode ser escrito como: $-mn(\mathbf{u} - \mathbf{u_0})/\tau$. Logo a equação do fluido (9) pode ser generalizada incluindo a pressão anisotrópica e colisões neutras como:

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{mn(\mathbf{u} - \mathbf{u_0})}{\tau} \qquad (33)$$

Comparação com a Hidrodinâmica Ordinária.

- Fluidos Ordinários obedecem à equação de Navier-Stokes.

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{34}$$

- Esta equação é a mesma que a equação do plasma (10) exceto pela ausência das forças eletromagnéticas e colisões entre espécies de partículas.

Equação da Continuidade.

- A conservação de matéria requer que o número total de partículas N num volume V mudará somente se se houver um fluxo resultante de partículas atravessando a superfície S que contorna este volume V. Sendo a densidade do fluxo de partícula igual a $n\mathbf{u}$, nós temos, pelo teorema do divergente que:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \int_v \frac{\partial n}{\partial t} dV = -\oint n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = -\int_v \nabla \cdot (n\mathbf{u}) dV \tag{35}$$

Esta integral é igual a:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \tag{36}$$

- Qualquer fonte ou sumidouro de partículas que existir, deverá ser acrescentada no lado direito da equação (13).

Equação de Estado.

- Mais uma relação é preciso para fechar o sistema de equações. Para isso precisamos usar a equação de estado da termodinâmica relacionando p com n:

$$p = C\rho^{\gamma} \tag{37}$$

Onde C é uma constante e γ é a razão entre os calores específicos a pressão e a temperatura constante $\gamma = C_p/C_v$. Se N for o grau de liberdade, então γ é dado por:

$$\gamma = (2 + N)/N \tag{38}$$

- A validade da equação de estado requer que o fluxo de calor seja insignificante; Isto é, a condutiidade de calor seja pequena.

Equação do Fluido.

- Por simplicidade, vamos considerar o plasma como sendo somente constituido de 2 espécies: íons e elétrons. A carga e a densidade de corrente é dada por:

$$\sigma = n_i q_i + n_e q_e \tag{39}$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{v_i} + n_e q_e \mathbf{v_e} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} &= n_i q_i + n_e q_e && (41)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} && (42)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (43)\\
\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{B} &= n_i q_i \mathbf{v_i} + n_e q_e \mathbf{v_e} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} && (44)\\
mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \right] &= qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} x \mathbf{B}) - \nabla p && (45)
\end{aligned}$$

Equação do Fluido.

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v_j}) = 0 \qquad (46)$$

$$p = C\rho^{\gamma} \qquad (47)$$

Deriva do Fluido Perpedicular a B

Uma vez que um elemento de fluido é composto por muitas partículas individuais, esperarararíamos que o fluido tem um deriva perpendicular a B se o centro de guia individual tem tal deriva. Portanto, uma vez que o termo ∇B aparece somente nas equações de fluido, há um deriva associado que os elementos do fluido tem mas as partículas não tem.

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p) \tag{48}$$

Considerando a razão entre o primeiro termo do lado esquerdo com o primeiro termo no lado direito:

$$\left| \frac{mni\omega v_p}{qnv_pB} \right| = \frac{\omega}{\omega_c} \tag{49}$$

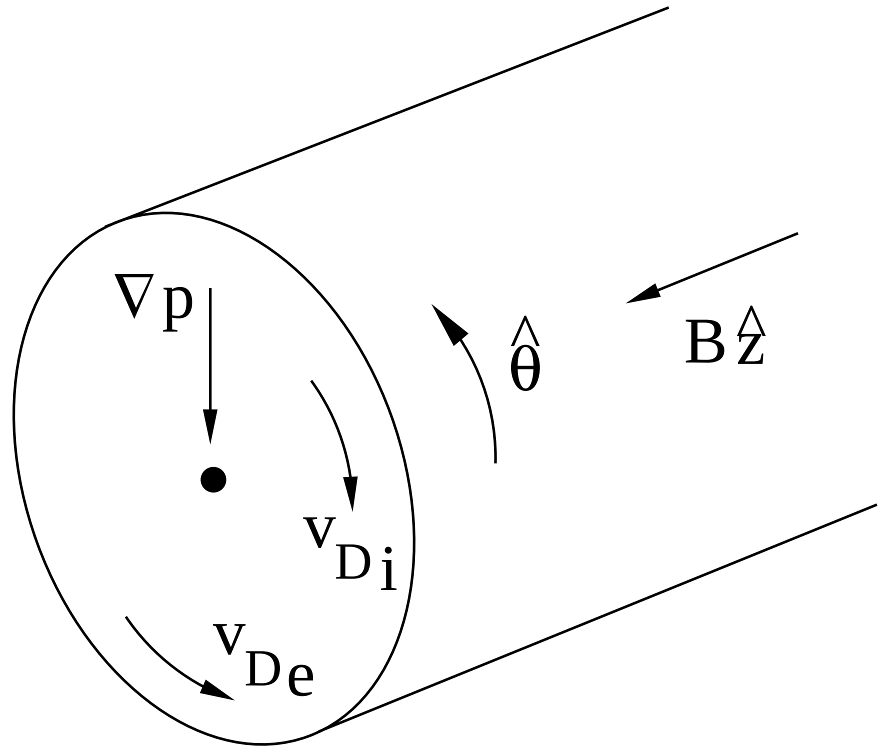
Foi considerado $\partial/\partial t = i\omega$. Para derivas lentas comparadas com a escala de tempo de ω_c podemos desprezar o primeiro termo do lado esquerdo. Também podemos desprezar o segundo termo do lado esquerdo. Logo

$$0 = qn[\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p \times \mathbf{B} \tag{50}$$

portanto

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D \tag{51}$$

$\mathbf{v}_E$ deriva, $\mathbf{v}_D$ deriva diamagnética.


∇p
θ̂
B ẑ
v Di
v De

Com a equação (3-52) podemos escrever a deriva diamagnética como

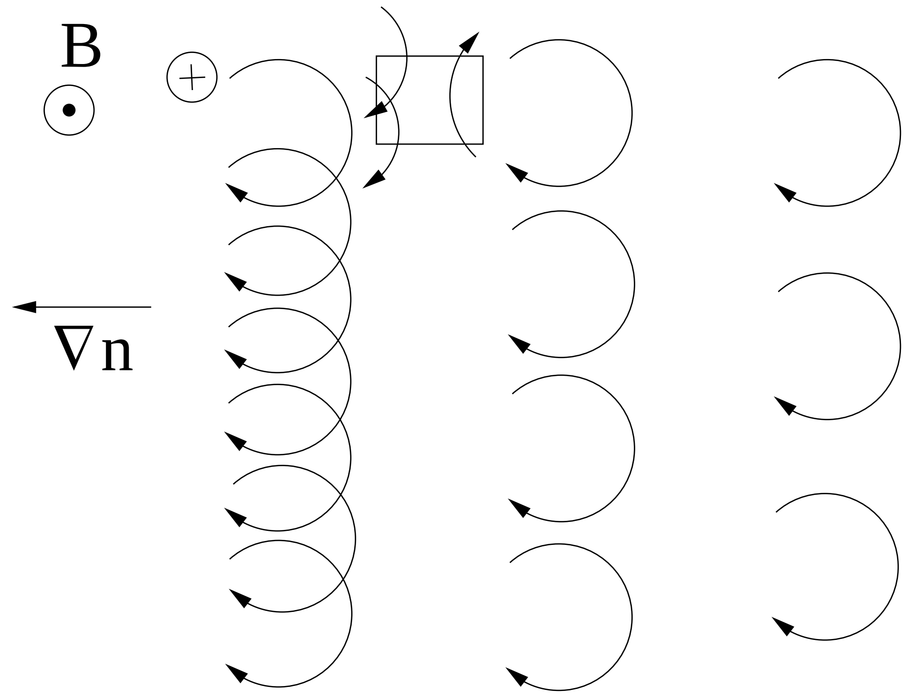
$$\mathbf{v}_D = \pm \frac{\gamma KT}{eB} \frac{\mathbf{z} \times \nabla n}{n} \tag{52}$$

Em particular para um plasma isotérmico in the geometria da figura. Temos a seguinte fórmula para os experimentais que tem trabalhado com Q-machines

$$\mathbf{v}_{Di} = \frac{KT_i}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\theta} \tag{53}$$

$$\mathbf{v}_{De} = -\frac{KT_i}{eB} \frac{n'}{n} \hat{\theta} \tag{54}$$

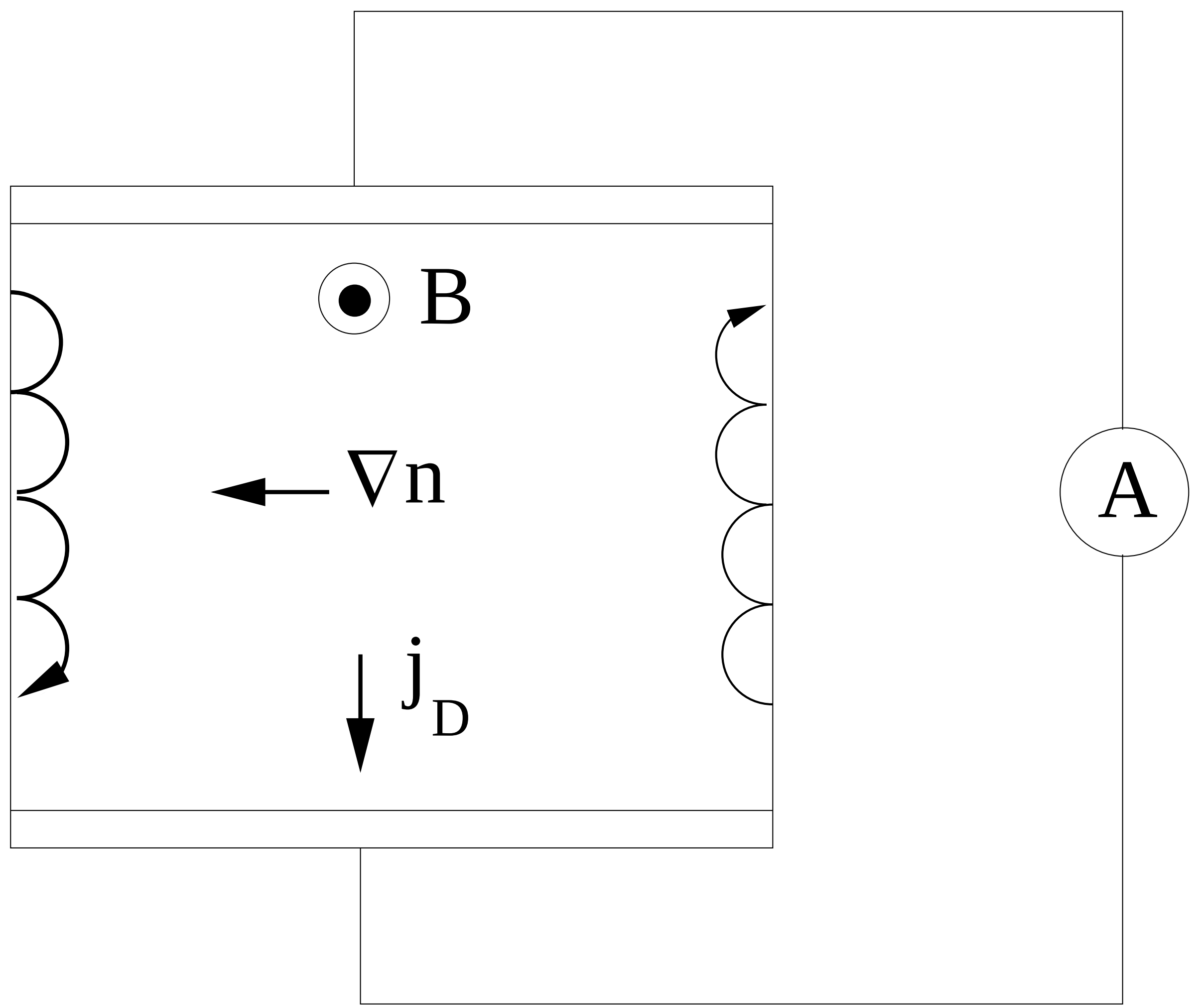
A magnitude de $\mathbf{v}_D$ não depende da massa.



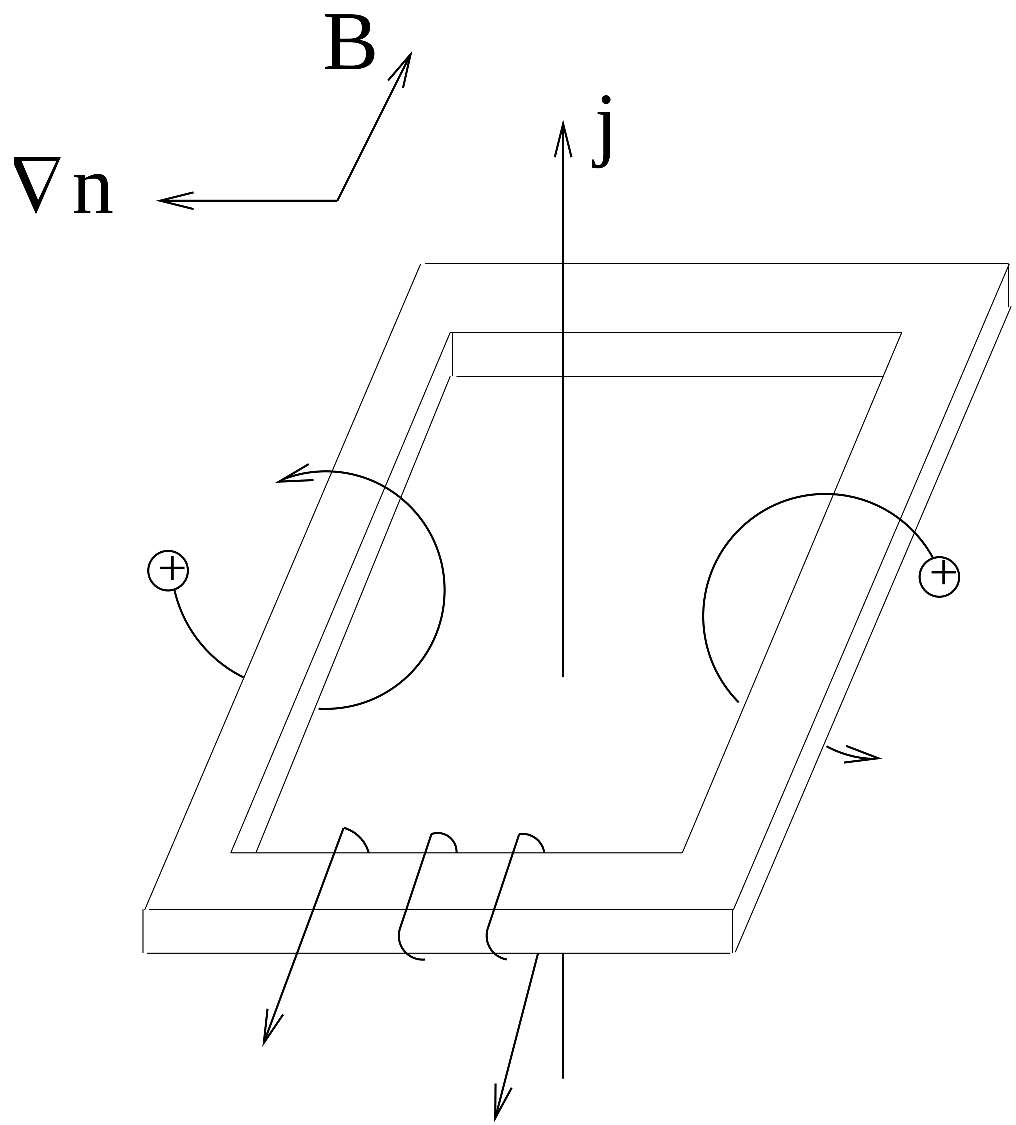
Como ions e elétrons desviam em direções opostas, há uma corrente diamagnética. Para $\gamma = Z = 1$, é dada por

$$\mathbf{j}_D = ne(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De}) = (KT_i + KT_e)\frac{\mathbf{B} \times \nabla n}{B^2} \tag{55}$$

Derivas das partículas em um plasma limitado.



Medindo a corrente diamagnética em um plasma não homogêneo.



Deriva do Fluido Paralela a B

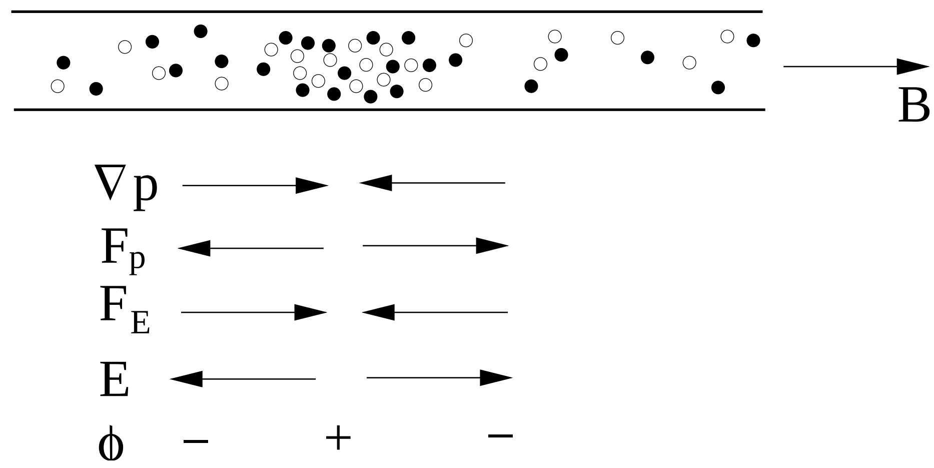
A componente z da equação do movimento do fluido é

$$mn\left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)v_z\right] = qnE_z - \frac{\partial p}{\partial z} \tag{56}$$

O termo convectivo pode ser negligenciado porque é menor que o termo $\partial v_z/\partial t$. Usando (3-52) temos

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{q}{m}E_z - \frac{\gamma KT}{mn}\frac{\partial n}{\partial z}. \tag{57}$$

Isto mostra que o fluido é acelerado ao longo de **B** sobre a combinação eletrostática e gradiente de forças de pressão.



A figura mostra o que ocorre quando há uma densidade local no plasma. Considerando o gradiente de densidade em direção do centro e KT constante. Há um gradiente de pressão em direção do centro. Como o plasma é quase neutro o gradiente existe para os fluidos de elétrons e íons. Consideramos o gradiente de força de pressão $\mathbf{F}_p$ sobre o fluido de elétron. Ele guia os elétrons para o centro, deixando os íons atrás. O resultado das cargas positivas gera um campo $\mathbf{E}$ cuja força $\mathbf{F}_E$ sobre os elétrons opõem-se a $\mathbf{F}_p$. ϕ pode ser maior no centro, onde n é maior.