

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Barreiras de transporte para o mapa de ondas de
deriva com dois modos

Luis Fernando Bernardi de Souza

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio
Claro

LUIS FERNANDO BERNARDI DE SOUZA

**BARREIRAS DE TRANSPORTE PARA O MAPA DE
ONDAS DE DERIVA COM DOIS MODOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro – SP

2022

S729b Souza, Luis Fernando Bernardi de
Barreiras de transporte para o mapa de ondas de deriva
com dois modos / Luis Fernando Bernardi de Souza. --
Rio Claro, 2022
70 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Egidio de Carvalho

1. Ondas de Deriva. 2. Dois Modos. 3. Barreiras de
Transporte. 4. Curva Shearless. 5. Stickiness. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio
Claro

LUIS FERNANDO BERNARDI DE SOUZA

BARREIRAS DE TRANSPORTE PARA O MAPA DE ONDAS DE DERIVA COM DOIS MODOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do
Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

DEMAC / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

DF / UFPR / Curitiba (PR)

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

IFUSP / USP / São Paulo (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 28 de novembro de 2022.

Agradecimentos

À minha família e amigos, pelo apoio e companhia.

A todos os professores, pela paciência e ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, pelo suporte e ensinamentos durante todo esse trabalho. Pela oportunidade de trabalhar em seu grupo de pesquisa e confiança. De quem a sabedoria e postura servem de exemplo para mim e para todos.

A todos os funcionários da UNESP Rio Claro, pelo trabalho árduo diário.

Resumo

A presença de barreiras de transporte em experimentos de confinamento magnético de plasma está associada a melhora no transporte das partículas. Através da aplicação de um potencial elétrico externo, chamado de *bias*, pode-se criar uma barreira de transporte bastante robusta conhecida como curva *shearless*. Anteriormente, essas barreiras de transporte foram identificadas em um modelo de ondas de deriva descrito por uma mapa simplético bidimensional obtido aproximando o modelo ideal de infinitos modos espaciais por um modo dominante, permitindo assim o estudo das órbitas das partículas carregadas por um longo tempo. Neste trabalho, adicionamos um segundo modo espacial ao modelo e derivamos um mapa tridimensional modificado. Fixando os parâmetros relacionados ao primeiro modo e variando a amplitude do segundo modo, mostramos, para dois valores diferentes de *bias*, que a existência das barreiras de transporte dependem da amplitude do segundo modo. Perfis de número de rotação e tempos de recorrência foram usados para as investigações sobre o transporte de partículas e cálculo dos valores críticos do parâmetro da destruição curva *shearless*. Foi observado que após a destruição da *shearless*, formação de *stickiness* atuando como barreira de transporte, na vizinhança das curvas invariantes *spannings* destruídas. Assim, para avaliar a robustez das barreiras, calculamos a razão das condições iniciais que cruzaram as barreiras em termos dos parâmetros relacionados aos modos e usando o espaço dos parâmetros destacamos a sensibilidade das barreiras de transporte às perturbações.

Palavras-chave: Ondas de Deriva. Dois Modos. Barreiras de Transporte. Curva Shearless. Stickiness.

Abstract

The presence of transport barriers in plasma magnetic confinement experiments is associated with improved particle transport. Through the imposition of an external electrical potential, bias, a very robust transport barrier known as a shearless curve can be created. Previously, these transport barriers were identified in a drift wave model described by a two-dimensional symplectic map derived by considering one dominant spatial mode for the ideal infinite spatial modes, allowing the study of the motion of charged particles for a long time. In this work, we added a second spatial mode to the model and derived a modified three-dimensional map. Fixing the parameters related to the first mode and varying the amplitude of the second mode, we show, for two different values of bias, that the existence of transport barriers depends on the amplitude of the second mode. Rotation number profiles and recurrence times were used for investigations into particle transport and for the computation of critical values of parameters for the shearless destruction. It was observed that after shearless destruction, the presence of stickiness acting as a transport barrier, about the destroyed invariant curves. Thus, to evaluate the effectiveness of the barriers, we calculate the ratio of the initial conditions that crossed the barriers in terms of the parameters related to the modes and, using the parameter space, we highlight the sensitivity of the transport barriers to perturbations.

Keywords: Drift Waves. Two Modes. Transport Barriers. Shearless Curve. Stickiness.

Lista de Ilustrações

Figura 1: Representação esquemática de um Tokamak.	21
Figura 2: Desenho esquemático do Texas Helimak.....	22
Figura 3: Ilustração de uma trajetória sendo marcada na seção de Poincaré.	27
Figura 4: Espaço de fases do MPT. Em (a) $K = 1 \times 10^{-5}$; (b) $K = 0.09$; (c) $K = 0.14$; (d) $K = 0.2$	32
Figura 5: Espaço de fases do MPNT para $a = 0.345$ e em (a) $b = 1 \times 10^{-5}$; (b) $b = 0.15$; (c) $b = 0.$; (d) $b = 0.7$	34
Figura 6: Em (a) o espaço de fases do MPNT para os parâmetros $a = 0.345$ e $b = 0.35$. Em vermelho a curva shearless. Em (b) Perfil do número de rotação, com condições iniciais sobre $\chi_0 = 0.5$, o ponto em vermelho identifica uma condição em cima da shearless.....	35
Figura 7: Em (a) espaço de fase do MPNT para os valores críticos dos parâmetros da destruição da shearless, $a = 0.345$ e $b = 0.825252525$. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a).....	38
Figura 8: O perfil do número de rotação para vários valores de I, o ponto vermelho ($I = 0,4308, \Omega = 1,2532$) permite escolher uma condição inicial na curva shearless para bias de 4 Volts.....	47
Figura 9: Perspectivas no espaço (I, χ, φ) . Em preto as iterações da condição inicial; em vermelho a curva shearless no espaço de fase projetado (χ, I) mostrando o; em azul o espaço de fase (φ, I) e em verde o espaço de configuração (φ, χ) . A curva sem cisalhamento aparece apenas na projeção (χ, I) . Fonte: [43]	48
Figura 10: O espaço de fase (I, χ) com $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = 0$, para bias de 4 Volts. A curva shearless está em vermelho.....	49
Figura 11: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -3 \times 10^{-3}$, destacada em vermelho a curva shearless. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a). Em (c) o perfil do número de rotação para os mesmo valores de parâmetros, ponto em vermelho indica a condição inicial sob a shearless $I_0 = 0.42966966966967$	50
Figura 12: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -1 \times 10^{-2}$, destacada em vermelho a curva shearless. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a). Em (c) o perfil do número de rotação para os mesmo valores de parâmetros, ponto em vermelho indica a condição inicial sob a shearless $I_0 = 0.426663663663664$	51
Figura 13: Espaços de fase com $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.01633$ (bias 4 Volts), $\varphi_0 = 0.5$ e $\chi_0 \in [0,1]$. Em (a) foram representadas em vermelho as órbitas das condições iniciais $I_0 >$	

0.42899999999999997 , em verde de $I_0 < 0.42899999999999997$ e em preto $I_0 =$	
0.42899999999999997 Em (b) é apresentada uma ampliação de uma região em (a) , mesmo	
com a destruição do shearless, as regiões caóticas parecem não se conectar devido ao	
stickiness.....	52
Figura 14: Espaço de fases para $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.25$ com as seguintes condições	
iniciais $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = [0,1]$ e $I_0 = [0,1]$	53
Figura 15: Em (a) o espaço de fase (I, χ) com $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = 0$, para bias de 8	
Volts. A curva shearless está em vermelho. Em (b) O perfil do número de rotação para vários	
valores de I , o ponto vermelho ($I = 0.4115, \Omega = 1.6810$) permite escolher uma condição	
inicial na curva shearless para bias de 8 Volts.	54
Figura 16: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -3 \times 10 - 3$, destacada em	
vermelho a curva shearless. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a) . Em (c) o perfil do	
número de rotação para os mesmo valores de parâmetros, ponto em vermelho indica a	
condição inicial sob a shearless $I_0 = 0.42966966966967$	55
Figura 17: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -7 \times 10 - 3$, destacada em	
vermelho a curva shearless. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a) . Em (c) o perfil do	
número de rotação para os mesmo valores de parâmetros, ponto em vermelho indica a	
condição inicial sob a shearless $I_0 = 0.410258258258258$	56
Figura 18: Espaços de fase com $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.01082$ (bias 8 Volts), $\varphi_0 = 0.5$	
e $\chi_0 \in [0,1]$. Em (a) foram representadas em vermelho as órbitas das condições iniciais $I_0 >$	
0.4120000000000001 , em verde de $I_0 < 0.4120000000000001$ e em preto $I_0 =$	
0.4120000000000001 Em (b) é apresentada uma ampliação de uma região em (a) , mesmo	
com a destruição do shearless, as regiões caóticas parecem não se conectar devido ao	
stickiness.....	58
Figura 19: Espaço de fases para $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.25$ com as seguintes condições	
iniciais $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = [0,1]$ e $I_0 = [0,1]$	58
Figura 20: Espaço de parâmetros (α_2, α_1) . representados em uma escala de cores	
representando a razão das condições iniciais que cruzaram a posição da barreira de transporte.	
A cor roxo significa que a barreira ainda está atuando, enquanto não existe para a região	
vinho. As condições iniciais utilizadas foram, $I_0 = [0.65, 1.0]$, $\chi_0 = [0, 1]$ e $\varphi_0 = 0.5$. (a)	
caso de bias de 4 Volts; (b) caso de bias de 8 Volts.....	61
Figura 21: Espaço de parâmetros (α_2, α_1) . Representados para a mesma escala de cores da	
Figura 20 representando a razão das condições iniciais que cruzaram a posição da barreira de	

transporte. Em **(a)** caso do bias de 4 Volts. Em **(b)** caso do bias de 8 Volts. Os pontos em vermelho e verde representam os pares de parâmetros anterior e crítico para a destruição da curva shearless, respectivamente, de acordo com as **Tabela 6.1** e **Tabela 6.2**..... 62

Lista de Tabelas

Tabela 4.1: Tempos de recorrência do MPNT para três diferentes valores de b e $a = 0.345$. Quando $b = 0.825252525$ o toro shearless foi destruído.....	37
Tabela 6.1: Tempos de Recorrência para três valores diferentes de α_2 e $\alpha_1 = -0.09423$ fixo. Quando $\alpha_2 = -0.01633$ o toro shearless é destruído. As condições iniciais utilizadas para cada valor de α_2 foram $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = 0.5$ e $I = [0.42, 0.43]$	51
Tabela 6.2: Tempos de Recorrência para três valores diferentes de α_2 e $\alpha_1 = -0.09423$ fixo. Quando $\alpha_2 = -0.01082$ o toro shearless é destruído. As condições iniciais utilizadas para cada valor de α_2 foram $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = 0.5$ e $I = [0.39, 0.415]$	57

Sumário

1.	INTRODUÇÃO.....	12
2.	CONFINAMENTO MAGNÉTICO DE PLASMA.....	15
2.1.	PLASMAS	15
2.2.	CONFINAMENTO MAGNÉTICO.....	17
2.2.1.	TEORIA MHD.....	17
2.2.2.	TEORIA DE ÓRBITAS.....	18
3.	TEXAS HELIMAK.....	21
3.1.	PROPRIEDADES DO TEXAS HELIMAK.....	21
3.2.	DESCRIÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO.....	23
3.3.	DESCRIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO E O BIAS	24
4.	SISTEMAS HAMILTONIANOS E MAPAS	25
4.1.	SISTEMAS HAMILTONIANOS.....	25
4.2.	SEÇÃO DE POINCARÉ	26
4.3.	SISTEMAS QUASE-INTEGRÁVEIS	27
4.4.	MAPAS SIMPLÉTICOS	28
4.5.	NÚMERO DE ROTAÇÃO.....	29
4.6.	MAPA PADRÃO TWIST	30
4.7.	MAPA PADRÃO NÃO TWIST.....	33
4.8.	CURVA SHEARLESS	35
4.9.	TEMPOS DE RECORRÊNCIA E STICKINESS	36
5.	MAPA DE ONDAS DE DERIVA	39
5.1.	MODELO DE HORTON (ONDAS DE DERIVA).....	39
5.2.	APROXIMAÇÃO DE DOIS MODOS PARA O MODELO DE ONDAS DE DERIVA	40
6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	46
6.1.	RESULTADOS.....	46

6.2. ESPAÇO DE FASES.....	47
6.3. BIAS 4 VOLTS.....	48
6.4. BIAS 8 VOLTS.....	53
6.5. EFETIVIDADE DAS BARREIRAS DE TRANSPORTE.....	59
7. CONCLUSÕES.....	63
REFERÊNCIAS.....	66
APÊNDICE A - VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO SIMPLÉTICA PARA O MAPA DE ONDAS DE DERIVA COM DOIS MODOS.....	69

1. INTRODUÇÃO

Plasma condiz a um estado da matéria em que os elétrons e os íons de um gás ionizado formam um sistema próximo de neutro, mas sujeito as interações de Coulomb e de Lorentz [1]. Uma possível aplicação de plasmas é a termofusão nuclear com intenção de se obter energia das reações resultantes [1,2]. O confinamento de plasmas em máquinas do tipo tokamak ocorre através da imposição de campos magnéticos externos, entretanto observa-se transporte anormal de partículas na região de borda do plasma com origem no termo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ causada por flutuações eletrostáticas, que leva à perda de energia do sistema [3,4]. Modelos/teorias foram propostos a fim de interpretar o transporte turbulento das partículas em experimentos de confinamento magnético de plasma. Neste trabalho são apresentados dois modelos: a teoria magneto-hidrodinâmica e a teoria de órbitas.

As investigações em relação ao transporte anômalo das partículas são dificultadas pela geometria toroidal dos tokamaks e às altas temperaturas (entre 50 e 150 milhões graus Celsius) envolvidas [1,5]. Em alternativa aos tokamaks, foi desenvolvida a máquina Texas Helimak (TH daqui em diante) com geometria mais simples em relação aos Tokamaks e caracterizada por linhas de campos helicoidais e menores temperaturas, além de fornecer uma aproximação experimental de um plasma unidimensional. O TH tem como um dos seus diferenciais a capacidade de modificar o perfil do campo elétrico radial através da imposição de um potencial elétrico externo (*bias*) [3]. Essa capacidade permite investigar a influência do perfil radial do campo elétrico no transporte das partículas, uma vez que é verificado experimentalmente conexão entre alterações no perfil do campo elétrico na borda do plasma e a criação de barreiras que reduzem o transporte [6,7]. Esse potencial elétrico (*bias*) altera as propriedades espectrais para uma banda de amplas frequências do plasma [8], por outro lado, a turbulência pode ser descrita por múltiplas ondas de deriva [9].

Um modelo [9], conhecido como modelo de Horton ou de ondas de deriva, foi proposto considerando a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ como mecanismo de turbulência, pois estabelece que a perturbação do sistema é motivada pelas flutuações eletrostáticas do plasma descritas através um potencial elétrico flutuante [9,10]. O modelo apresenta a perturbação de tal forma que proporciona uma aproximação Hamiltoniana levando a um mapa não linear de ondas de deriva dependente do perfil radial do campo elétrico. Portanto, investigações acerca da estabilidade

das órbitas e regiões disponíveis ao movimento são diretas, fornecendo uma avaliação acerca da influência do bias e das perturbações sobre o transporte no espaço de fases.

O modelo de ondas de deriva é composto por infinitos modos espaciais e de um amplo espectro de frequências, compondo assim, um modelo ideal de infinitas ondas. O mapa é obtido aproximando os infinitos modos espaciais por um modo dominante, descrito nas variáveis de ângulo e ação com dois parâmetros de controle, um proporcional a amplitude da onda e outro dependente do perfil radial do campo elétrico [9]. Trabalhos anteriores introduziram o mapa de ondas de deriva para a geometria do TH e fizeram estudos acerca do efeito do *bias* e da aproximação radial do campo elétrico de equilíbrio sobre o transporte e a influência da amplitude das perturbações no plasma. [11-13].

Para este estudo, consideramos um segundo modo espacial ao modelo proposto por Horton e como resultado foi obtido um mapa simplético tridimensional. Ele possui quatro parâmetros adimensionais de controle relacionados às grandezas físicas do sistema, sendo dois deles proporcionais à amplitude da perturbação, outro dependente do perfil radial do campo elétrico de equilíbrio, que varia para cada valor de *bias* e o último relacionada às grandezas da máquina. Foram utilizados dados experimentais do TH obtidos por [7,8] para estimar os valores dos parâmetros de controle. A aproximação radial para o campo elétrico de equilíbrio altera as propriedades do mapa, sendo que utilizando uma aproximação radial não monotônica, atribui-se ao mapa a propriedade não *twist*. Em sistemas não *twist* pode ocorrer o aparecimento da curva *shearless*, uma estrutura regular no espaço de fases bastante resistente a perturbações que opera como barreira de transporte em sistemas bidimensionais [14].

O objetivo deste trabalho é examinar efeito do segundo modo nas barreiras de transporte, na perspectiva de aprimorar o estudo já reportado para um único modo. Rotinas numéricas foram desenvolvidas em Fortran 90, uma linguagem simples, porém bastante eficiente para cálculos longos. O texto desta dissertação está estruturado como descrito a seguir.

O Capítulo 2 faz um resumo dos principais conceitos de física de plasmas. Serão discutidos o conceito de confinamento magnético através da perspectiva de duas teorias: a magneto-hidrodinâmica (MHD) e de órbitas. Primeiro é apresentada a teoria MHD que aproxima o plasma como sendo um fluido condutor. Em seguida, a teoria de órbitas é apresentada onde são deduzidas as equações do movimento do centro de guia de um campo magnético (ou onda magnética), considerando a deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que mais à frente no trabalho será utilizada como mecanismo de turbulência no modelo de Horton.

No Capítulo 3, o Texas Helimak é apresentado. Lá, são estudadas suas principais características, como sua simetria e as configurações dos campos magnéticos e elétricos para estudos sobre fusão de plasmas e suas vantagens no confinamento em relação às máquinas do tipo Tokamak. Abordaremos seu principal mecanismo de controle de turbulência: a aplicação do potencial elétrico externo (*bias*), apresentando sua influência na redução do transporte irregular das partículas.

No Capítulo 4 é feita uma revisão de conceitos fundamentais sobre sistemas Hamiltonianos e mapas que serão usados ao longo do trabalho, tais como, integrabilidade, seção de Poincaré, variáveis ação e ângulo, distinção entre órbitas caóticas, periódicas e quase periódicas de acordo com sua dinâmica no espaço de fases. Ainda, serão discutidas as principais propriedades e dinâmica de mapas simpléticos, através dos conceitos da matriz jacobiana, número de rotação, condição *twist*, tempos de recorrência, teorema de Slater e barreiras de transporte. Todos esses conceitos são exemplificados através de dois mapas bastante conhecidos na literatura: o mapa padrão *twist* (MPT) e o mapa padrão não *twist* (MPNT), de acordo com as características de seus espaços de fases e as correspondentes propriedades de transporte.

No Capítulo 5 é discutido e apresentado o modelo de ondas de deriva para o estudo do transporte de partículas no Texas Helimak. Aproveitando as equações do movimento deduzidas no Capítulo 2, incorpora-se à deriva elétrica causada pelas flutuações eletrostáticas como mecanismo de turbulência, essa responsável pela perturbação do sistema. Lá, desenvolve-se um novo mapa com dois modos espaciais dominantes, viabilizando investigações sobre a influência do segundo modo no transporte e sobre as barreiras de transporte.

No Capítulo 6 são apresentadas as investigações e interpretações acerca dos espaços de fases através da competição dos parâmetros das perturbações. Foram avaliados os valores críticos dos parâmetros na destruição da curva *shearless*. Por fim, discutimos a efetividade das barreiras de transporte através do espaço dos parâmetros.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e perspectivas de estudos com a finalidade de contribuir para uma melhor aproximação do modelo de ondas de deriva.

2. CONFINAMENTO MAGNÉTICO DE PLASMA

Neste capítulo são tratados conceitos fundamentais a respeito da física de plasma, conceitos estes que serão usados de base teórica ao longo deste trabalho. Inicialmente, na seção 2.1, são apresentados os critérios para definir o que conhecemos como plasma através dos conceitos de comprimento de Debye e frequência de plasma. Na seção seguinte 2.2 discute-se os conceitos de confinamento e transporte de plasma em experimentos magnéticos por meio de duas abordagens distintas: a teoria magneto-hidrodinâmica e a teoria de órbitas. Esta última alude a ideia deriva elétrica, com origem no termo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, que desempenha o papel de mecanismo de turbulência no modelo utilizado neste trabalho.

2.1. PLASMAS

Para distinguirmos um gás ionizado de um plasma é necessário a introdução de dois conceitos: O comprimento de Debye e a frequência de plasma [1]. O comprimento de Debye para os elétrons é definido como sendo [15]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \kappa_b T_e}{n e^2}}, \quad (2.1)$$

onde ϵ_0 , κ_b , T_e , n e e são, respectivamente a permissividade elétrica do vácuo, a constante de Boltzmann, a temperatura dos elétrons, a densidade de partículas e a carga do elétron. No equilíbrio, os campos das cargas que formam o plasma se anulam mutuamente, de forma que uma região macroscópica do plasma permanece neutra. A energia térmica das partículas tende a desequilibrar a neutralidade do sistema, porém a energia potencial eletrostática resultante da separação das cargas restabelece a neutralidade. Portanto, o comprimento de Debye descreve as distâncias em que ocorrem as alterações de neutralidade no sistema. Se define a blindagem de Debye como sendo o efeito das partículas se movendo livremente para neutralizar regiões com alta densidade de carga, desse modo blindando o campo eletrostático nesta região que tem dimensões da ordem do comprimento de Debye [15].

Enquanto a frequência de plasma dos elétrons é dada por:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n e^2}{m_e \epsilon_0}}, \quad (2.2)$$

onde m_e é a massa dos elétrons. Na ocasião em que um plasma em equilíbrio experimenta a ação de uma perturbação, a separação entre seus íons e elétrons cria um campo elétrico que aceleram os elétrons. Devido à inércia dos elétrons, aparece um movimento oscilatório dos elétrons em torno dos íons, sendo a força restauradora sustentada pela atração de Coulomb (elétron-íon), cuja frequência deste movimento é dada pela equação (2.2).

Assim, o primeiro critério para a definição de plasma é a dimensão característica do sistema, expressa por L , a qual deve satisfazer a condição:

$$L \gg \lambda_D, \quad (2.3)$$

O segundo critério é dado por:

$$\omega_{pe} \tau > 1, \quad (2.4)$$

onde τ é o tempo médio entre colisões das partículas neutras com os elétrons, ocorrência que amortece as oscilações dos elétrons e tende estabelecer equilíbrio térmico entre elétrons e partículas neutras. Logo, para manter o plasma a frequência de colisão entre elétron e partícula neutra deve ser menor que a colisão de plasma dos elétrons.

O terceiro e último critério,

$$n\lambda_D \gg 1, \quad (2.5)$$

A desigualdade acima expressa que a quantidade de elétrons dentro da chamada esfera de Debye, de raio λ_D , seja muito grande, viabilizando a blindagem. Outra grandeza pode ser definida, chamada de parâmetro de plasma,

$$g = \frac{1}{n\lambda_D}, \quad (2.6)$$

De tal modo que a condição $g \ll 1$ é denominada de aproximação de plasma.

Através da teoria cinética dos gases, sabemos que a velocidade térmica v_T , de um gás tridimensional de massa m e temperatura T pode ser obtida pela equipartição da energia:

$$\frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{3}{2} \kappa_b T, \quad (2.7)$$

Essa energia, dada pela equação (2.7), pode ser comparada à energia de ionização do gás que compõe o plasma [1], logo é muito habitual usar elétron Volt (eV) para expressar a energia térmica do gás ou sua temperatura. O plasma pode existir sob diversos valores de densidade e temperatura de acordo com a finalidade de seu uso, em especial para obtenção de energia por termofusão nuclear, requer que o plasma seja confinado a elevadas temperaturas.

2.2. CONFINAMENTO MAGNÉTICO

Uma propriedade interessante dos plasmas é a interação de suas partículas com campos magnéticos externos, dando origem a vários fenômenos e comportamentos específicos. Assim, foram desenvolvidos mecanismos de confinamento do plasma baseados na interação dos íons e/ou elétrons através da aplicação de campos magnéticos externos, resultando em várias aplicações, experimentos e estudos sobre o comportamento das partículas confinadas. Diferentes abordagens teóricas foram concebidas com a finalidade de descrever os fenômenos em plasma. Aqui duas abordagens são discutidas: a teoria magneto-hidrodinâmica e a teoria de órbitas.

2.2.1. TEORIA MHD

Considere um fluido condutor movendo-se com a velocidade \mathbf{v} em um campo magnético \mathbf{B} variável. Devido a lei de Faraday, esta variação induz um campo elétrico \mathbf{E} que exerce força elétrica nas partículas carregadas dando origem a uma corrente elétrica. A equação do movimento para o gás de elétron, com densidade n_e , é escrita como:

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -n_e e \mathbf{E} + m_e n_e \nu (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - e n_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{v}_e a velocidade dos elétrons, \mathbf{v}_i velocidade dos íons e ν a frequência de colisão entre elétrons e íons. Como o elétron tem uma massa muito pequena em comparação com a dos íons, podemos ignorar o lado esquerdo da equação (2.8) para escrever:

$$\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J}, \quad (2.9)$$

onde usamos a definição da densidade de corrente elétrica \mathbf{J} , e $\sigma = n_e e^2 / m_e \nu$ a condutividade elétrica. A equação (2.9) também pode ser escrita equivalentemente como:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad (2.10)$$

onde $\eta = \sigma^{-1}$ é a resistividade elétrica. A teoria MHD aproxima o plasma como sendo um único fluido condutor que se move sem resistividade elétrica, formado pelo conjunto de elétrons e íons, logo a equação (2.10) se torna:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.11)$$

Aplicando o rotacional em (2.11) e contando com a lei de indução magnética de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

Chegamos em:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

Se considerarmos um elemento de área A que se move ao longo do fluido, o fluxo magnético, dado por:

$$\Phi_M = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.14)$$

Através desta área é constante. Assim,

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

Logo,

$$B_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad (2.16)$$

equação (2.16) exprimi o fato que o fluxo das partículas fica confinado em um movimento ao longo da superfície do fluxo magnético Φ_M .

Apesar da teoria MHD ser bastante robusta e explicar vários fenômenos do plasma confinado, ela tem suas limitações. A principal delas é considerar o plasma como sendo um fluido condutor, não fazendo distinção entre os movimentos dos elétrons e dos íons [16], o que pode levar a fenômenos importantes. Portanto, outras abordagens teóricas para o transporte das partículas foram propostas.

2.2.2. TEORIA DE ÓRBITAS

Contrário à teoria MHD, na teoria de órbitas explora o movimento individual das partículas ao invés do comportamento coletivo do plasma. Partindo da ideia de uma partícula teste, no plasma, sujeita a ação de campos eletromagnéticos. A equação do movimento de uma partícula com carga q_j e massa m_j , onde o índice j designa a espécie de partícula (íon ou elétron), é dado como:

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}), \quad (2.17)$$

É possível separar o movimento em termos das componentes paralela e perpendicular ao campo magnético:

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{E}_{\parallel}, \quad (2.18)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}), \quad (2.19)$$

onde dispensamos o índice j para facilitar a notação. A equação (2.18) apresenta que a aceleração direção de \mathbf{B} é constante e o centro deste movimento é chamado de centro de guia (CG), integrando equação (2.18) obtemos a velocidade na direção de \mathbf{B} :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t) = \left(\frac{q\mathbf{E}_{\parallel}}{m}\right)t + \mathbf{v}_{\parallel}(0) \equiv v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad (2.20)$$

Na equação (2.19), é possível escrever a componente perpendicular do campo elétrico \mathbf{E}_{\perp} da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}}{B} \times \left(\mathbf{E}_{\perp} \times \frac{\mathbf{B}}{B}\right) = -\left(\frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}\right) \times \mathbf{B}, \quad (2.21)$$

Mudando o referencial para um sistema de coordenadas que se move com velocidade uniforme

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{v}_E é a velocidade de deriva elétrica, ou seja:

$$\mathbf{v}'_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{\perp}(t) - \mathbf{v}_E, \quad (2.23)$$

Substituindo as Equações (2.22) e (2.23) em (2.19), obtemos:

$$m \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt} = q \left(\mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}_E - \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) \times \mathbf{B} = q(\mathbf{v}'_{\perp} \times \mathbf{B}), \quad (2.24)$$

O que indica que, nesse sistema de coordenadas, a partícula descreve apenas um movimento ciclotrônico, pois integrando equação (2.24),

$$\mathbf{v}'_{\perp} = \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}_c, \quad (2.25)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_c = |q|\mathbf{B}/m$ é a frequência ciclotrônica e $\mathbf{r}_c = m\mathbf{v}_{\perp}/qB$ o raio da trajetória. Logo, o movimento da partícula é circular no plano perpendicular a \mathbf{B} com velocidade constante \mathbf{v}_E e

paralelo a \mathbf{B} possui uma aceleração constante $q\mathbf{E}_{\parallel}/m$. Assim, a solução geral para equação (2.17),

$$\mathbf{v}(t) = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \boldsymbol{\Omega}_c \times \mathbf{r}_c + \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.26)$$

Como abordamos anteriormente, essa teoria é uma descrição microscópica de uma partícula teste na região de um campo eletromagnético uniforme, portanto termos que descrevem efeitos macroscópicos podem ser ‘descartados’. Logo a trajetória das partículas é descrita através da seguinte equação

$$\mathbf{v}(t) = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.27)$$

A equação (2.27) apresenta dois aspectos do movimento de acordo com cada um dos dois termos. Do primeiro termo temos que a partícula se move com velocidade constante paralela a direção do campo magnético, já o segundo termo informa que o movimento da partícula possui uma deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Em experimentos de confinamento magnético de plasma [5] observa-se um transporte anômalo das partículas na borda do plasma, relacionada as ondas de deriva, cuja velocidade é dada por equação (2.23). Mais à frente introduziremos um modelo que assume o fenômeno das ondas de deriva como mecanismo de turbulência.

3. TEXAS HELIMAK

Neste capítulo é apresentado uma categoria de máquina de confinamento magnético de plasma, o *helimak*. Discutiremos as principais propriedades dos *helimaks* através de uma máquina em particular, o Texas Helimak (TH). Aqui são apresentadas sua simetria e aspectos relacionados ao confinamento, detalhando a composição dos seus campos elétricos e magnéticos. Por fim vamos abordar a influência do potencial de *bias* no controle da turbulência do plasma.

3.1. PROPRIEDADES DO TEXAS HELIMAK

Existem vários tipos de máquinas para o confinamento magnético de plasma, a mais conhecida é o Tokamak. Os Tokamaks são caracterizados por sua simetria toroidal e linhas de campo magnético helicoidais **Figura 1**, porém seu confinamento é dificultado pelo transporte anômalo das partículas observado na região da borda do plasma [17,18]. A razão desse transporte turbulento é associada às flutuações eletrostáticas do plasma causadas pelas ondas de deriva que conduzem as partículas para a parede do dispositivo.

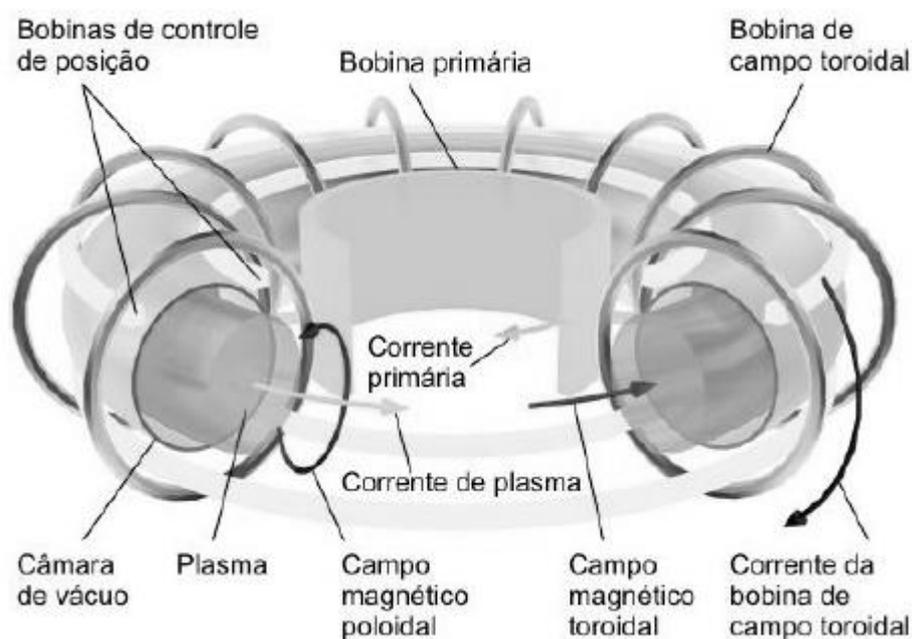


Figura 1: Representação esquemática de um Tokamak. ¹

¹Fonte: http://www.plasma.inpe.br/LAP_Portal/LAP_Sitio/Texto/Tokamaks.htm. Acessado em julho de 2022.

Por esses motivos, o Texas Helimak foi desenvolvido dispondo de geometria e configuração de campos diferentes daquelas dos Tokamaks com o objetivo de reproduzir e facilitar os estudos do plasma turbulento na borda dos tokamaks [19]. Como resultado de sua construção, o TH funciona com plasmas de baixas temperaturas e densidade, tornando as investigações do transporte mais viáveis em comparação com os Tokamaks neste contexto.

O TH consiste em um cilindro de base circular com altura $H = 2$ metros, raio interno $R_{int} = 0.6$ metros e raio externo $R_{ext} = 1.6$ metros. O campo magnético \mathbf{B} é formado por uma componente vertical B_z e uma angular B_ϕ , resultando em linhas de campo helicoidais, como ilustrado em azul na **Figura 2**. Essa geometria das linhas de campo sugere o uso de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) no tratamento teórico sobre o TH. As componentes do campo magnético, angular e vertical, são gerados através de bobinas, de modo que a razão B_z/B_ϕ entre as suas magnitudes podem ser ajustadas através das resistências adicionadas às bobinas. Portanto, de acordo com valores experimentais B_z pode atingir até 10% do valor de B_ϕ [19]. Na **Figura 2** apresentamos um desenho esquemático do TH.

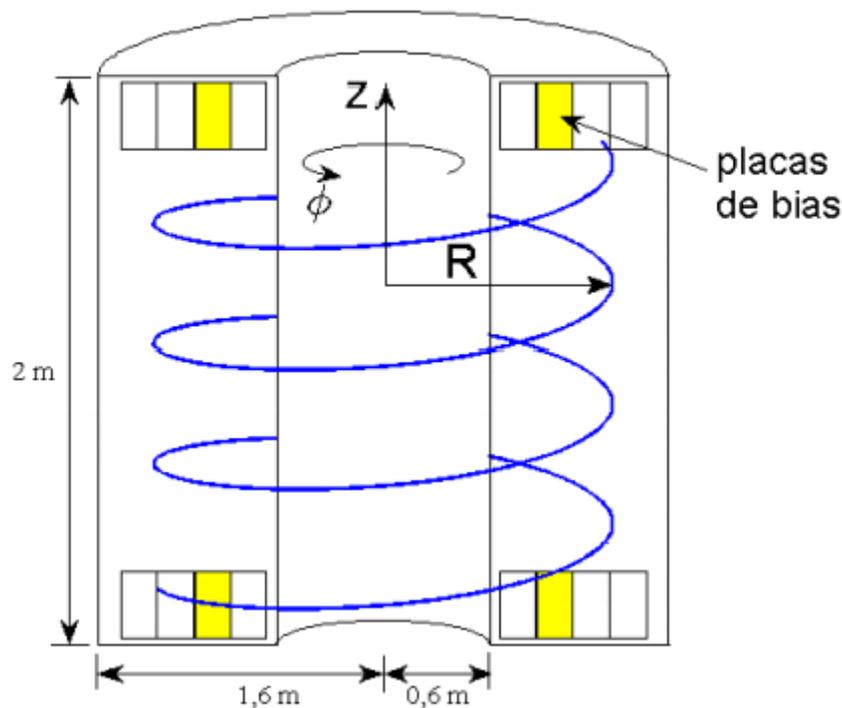


Figura 2: Desenho esquemático do Texas Helimak. ²

² Fonte: [6]

A composição do campo magnético do TH viabiliza a presença de equilíbrio (MHD), fornecendo uma boa aproximação unidimensional para o plasma, visto que suas principais propriedades variam apenas na direção radial [8]. Porém é uma aproximação válida para a faixa $1.10 \leq r \leq 1.25$ metros, pois fora deste intervalo as propriedades do plasma passam a depender das outras coordenadas (φ, z) [7,19]. Uma vez que as principais características do plasma ocorrem exclusivamente na direção radial no TH, temos que sua principal vantagem é a possibilidade de controlar a contribuição radial do perfil campo elétrico através da imposição de um potencial elétrico externo. No interior do TH, existem placas de *bias* em amarelo, como mostrado em amarelo na **Figura 2**, utilizadas para aplicar o potencial (*bias*) no plasma, podendo assumir valores positivos ou negativos.

3.2.DESCRICÃO DO CAMPO MAGNÉTICO

Devido à geometria das linhas de campo magnético, surgem as velocidades de deriva devidas à sua curvatura v_C e ao seu gradiente v_G . Em razão da componente angular do campo, a direção resultante da soma de v_G e v_C é vertical e o sentido dependente da carga q da partícula do plasma, resultando na separação das cargas negativas e positivas [16]. Isso leva no surgimento de um campo elétrico \mathbf{E} na direção vertical, causando uma velocidade de deriva elétrica nas partículas, dada por

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (3.1)$$

Como \mathbf{B} possui uma componente angular, \mathbf{v}_E apresenta um termo na direção radial responsável por deslocar o plasma na direção das paredes, causando perda de energia das partículas. Desta forma, para neutralizar a influência da componente radial de \mathbf{v}_E , fez-se necessário a existência de uma componente vertical no campo magnético para que tanto as cargas negativas quanto as positivas possam se deslocarem na direção vertical e com isso o fluxo de cargas nos dois sentidos anule o campo elétrico vertical, tornando possível o equilíbrio MHD.

Logo, o campo magnético do TH é expresso como

$$\mathbf{B}(\varphi, z) = B_\varphi(r)\hat{\varphi} + B_z(r)\hat{z}, \quad (3.2)$$

Já o fator de segurança é dado por [8]:

$$q(r) = \frac{HB_\varphi}{2\pi r B_z}, \quad (3.3)$$

No TH, o módulo B_φ é obtido através da lei de Ampère, $2\pi B_\varphi = \mu_0 I_\varphi$, onde I_φ é a corrente elétrica nas bobinas que geram o campo angular, de ordem de 10 kA e B_z é aproximadamente 0,1 B_φ . A corrente de plasma é da ordem de 100 A, dessa forma, pode ser desprezada, logo o campo magnético de vácuo é predominante [5]. Em linhas gerais, o campo magnético no TH consiste em linhas helicoidais e pode ser descrito através de duas componentes: uma angular e uma vertical de menor intensidade.

3.3. DESCRIÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO E O BIAS

As placas de *bias* permite alterar o perfil radial do campo elétrico e, desta maneira, investigar a sua influência no transporte turbulento de partículas no plasma. Como aludido previamente, o *bias* pode assumir valores negativos ou positivos, que podem variar durante o disparo. Neste trabalho, iremos utilizar dados em que o valor do *bias* permanece constante durante os disparos. Portanto, para diferentes valores de *bias*, se obtém diferentes perfis radiais do campo elétrico.

Estudos sobre o sinal do *bias* mostram que para valores negativos, o plasma apresenta uma frequência dominante enquanto para valores positivos o plasma apresenta um largo espectro de frequências [8]. Outro resultado importante é que para os valores positivos de *bias*, observa-se uma redução do transporte em uma região do plasma [7,8], essa redução pode ser associada ao aparecimento de barreiras de transporte e em especial: a barreira *shearless*, que mais a frente será definida e investigada. Em função disso, nós pretendemos investigar os efeitos *bias* positivos no problema de transporte no TH.

4. SISTEMAS HAMILTONIANOS E MAPAS

Neste capítulo, é realizada uma revisão dos princípios fundamentais referentes a sistemas Hamiltonianos e mapas que serão aplicados no desdobramento do trabalho. Primeiro, são introduzidas as equações do movimento de Hamilton, em seguida o conceito de integrabilidade e sua relação com as constantes do movimento junto com a introdução de termos perturbativos a um sistema integrável. Em seguida, é apresentado o conceito de seção de Poincaré como ferramenta de análise da dinâmica e discutiremos algumas propriedades de mapas simpléticos através de conceitos como condição twist, número de rotação, teorema de Slater e tempos de escape. Em particular, são analisados o mapa padrão twist (MPT) e o mapa padrão não-twist (MPNT), de acordo com as características de cada espaço de fases. Por fim, é apresentado o uso dos tempos de recorrência através do teorema de Slater que permite a caracterização das órbitas entre periódicas e não periódicas e por fim o fenômeno de aprisionamento (*stickiness*).

4.1. SISTEMAS HAMILTONIANOS

Define-se um sistema Hamiltoniano como sendo um conjunto regras que descrevem a evolução temporal de um estado inicial para um estado em tempo futuro no espaço de fases. Em geral, as regras podem ser um conjunto de equações diferenciais, como tempo tratado como uma variável contínua, ou um conjunto de relações recursivas, chamado de mapa, com o tempo tratado como uma variável discreta [20]. Assim sendo, mapas são transformações, T , que descrevem a evolução temporal de uma condição \mathbf{x} no espaço de fases S através de sucessivas iterações, ou seja, $\{T: S \rightarrow S | \mathbf{x}_{n+1} = T(\mathbf{x}_n)\}$.

Sistemas Hamiltonianos são aqueles descritos pela função hamiltoniana $H = H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, t)$, onde $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ são N pares de variáveis generalizadas de momento e posição, que definem o espaço de fases. A quantidade N de pares de variáveis generalizadas $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ define o número de graus de liberdade do sistema. A dinâmica do sistema é determinada pelas soluções das equações de Hamilton,

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (4.1)$$

formam um sistema de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem [21] e a função $H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$ é a Hamiltoniana do sistema.

Um sistema com N graus de liberdade é dito integrável se existirem N funções G_i tais que

$$\{H, G_i\}_{(q_i, q_i)} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

isto, é o Parênteses de Poisson entre cada uma de tais funções e a Hamiltoniana do sistema é zero. Consequentemente, $G_i(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N) = C_i$ onde C_i são constantes.

Uma transformação canônica das variáveis (\mathbf{p}, \mathbf{q}) para as variáveis ação e ângulo $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\chi})$ é interessante, pois essas costumam simplificar as equações do movimento. Uma maneira de obter essa transformação é através da solução do oscilador harmônico unidimensional, da seguinte forma

$$p = \sqrt{2I} \sin \chi \quad , \quad (4.3)$$

$$q = \sqrt{2I} \cos \chi \quad , \quad (4.4)$$

onde, por simplicidade, fizemos a massa e a frequência do oscilador iguais a um. A principal vantagem de obter as variáveis ação-ângulo é que a nova Hamiltoniana K passa a depender apenas da ação \mathbf{I} , $K = K(\mathbf{I})$, logo as equações de Hamilton nas coordenadas ação- ângulo,

$$\dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{I}} \quad (4.5)$$

com soluções: $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0$ e $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_0 + \boldsymbol{\omega}t$, onde \mathbf{I}_0 e $\boldsymbol{\chi}_0$ são as condições iniciais do problema e $\boldsymbol{\omega} = \partial K / \partial \mathbf{I}$ é a frequência natural [21]. O teorema de Arnold-Liouville afirma que se há um sistema com N constantes de movimento independentes umas das outras, ou seja, $\{G_i, G_j\} = 0$, isso implica na existência de variáveis ação-ângulo e, portanto, o sistema é integrável. [22,23]. O teorema também afirma que as trajetórias no espaço de fases residem na intersecção das superfícies definidas pelas N constantes de movimento. Desta forma, pode-se afirmar que as trajetórias repousam sob uma superfície com forma topológica a um toro N dimensional.

4.2. SEÇÃO DE POINCARÉ

Sistemas com dois ou mais graus de liberdade são difíceis de serem tratados devido à dimensão do espaço de fases. A seção de Poincaré é uma hipersuperfície Σ transversal ao fluxo de trajetórias definidas em um espaço de fases. Dessa forma um sistema de com N dimensões pode ser representado por um espaço de $N - 1$ dimensões [27,28]. Definimos o mapa de Poincaré como sendo o conjunto de pontos gerados pela intersecção de um órbita do espaço de

fases. Portanto, a dinâmica discreta que relaciona um cruzamento inicial Q_k na seção de Poincaré Σ , com o cruzamento consecutivo Q_{k+1} é chamada de mapa de Poincaré, como ilustrado na **Figura 3**.

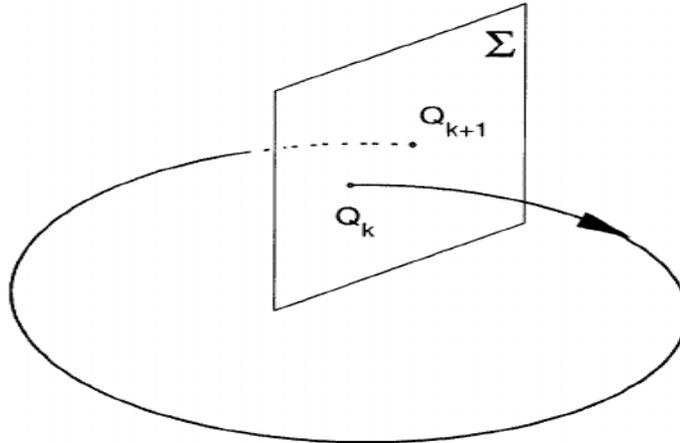


Figura 3: Ilustração de uma trajetória cruzando a seção de Poincaré gerando, assim, o mapa de Poincaré.³

Seja, por exemplo, um sistema conservativo com dois GL, governado pela Hamiltoniana, $H(I_1, I_2, \chi_1, \chi_2) = E$, onde E é a energia total do sistema. Define-se, por exemplo, a seção de Poincaré como sendo o plano $\chi_2 = 0$ ou $\chi_1 = 0$ e $\dot{I}_1 > 0$ ou $\dot{I}_2 > 0$. Caso não se conheça outra constante do movimento, além da energia, as equações do movimento (4.5) podem ser integradas numericamente e plotar os planos I_1 e χ_1 ou I_2 e χ_2 .

4.3. SISTEMAS QUASE-INTEGRÁVEIS

Por definição, sistemas quase integráveis possuem Hamiltonianas da seguinte forma,

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\chi}) = H_0(\mathbf{I}) + \epsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\chi}), \quad (4.6)$$

onde H_0 é uma Hamiltoniana integrável, H_1 é a Hamiltoniana perturbativa e ϵ é um parâmetro adimensional que controla sua amplitude. Quando $\epsilon = 0$, o sistema é integrável e para $\epsilon \neq 0$ esta perturbação pode destruir as constantes do movimento, fazendo assim o sistema não-integrável [24,25]. Portanto, a integrabilidade de um sistema pode ser destruída por uma perturbação Hamiltoniana.

Dois teoremas descrevem o quadro de soluções de sistemas não integráveis quando submetidos a valores de perturbação suficientemente pequenos: o teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) e Poincaré-Birkhoff (PB).

³ Fonte: [24]

O teorema KAM afirma que os toros de frequência irracional, sobrevivem à perturbação, desde que seja fraca o suficiente, sofrendo no máximo deformações estruturais. Porém, conforme a perturbação aumenta os toros irracionais também vão sendo destruídos e o último toro a ser destruído é aquele com número de rotação mais irracional possível, aquele dado pelo número áureo, ou média dourada, $\sqrt{5} + 1/2$. Uma das premissas do teorema KAM é a não degenerescência da Hamiltoniana integrável seja satisfeita, ou seja,

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0, \quad (4.7)$$

Já o teorema de PB diz que a ação de uma perturbação pequena em um sistema integrável causa o desaparecimento dos toros de frequência racional enquanto os toros irracionais se deformam. Dado um toro racional, a ação da perturbação produz um conjunto de pontos periódicos formado por um número par, sendo metade instáveis (pontos hiperbólicos) gerando selas hiperbólicas e metade estáveis (pontos elípticos) e dão origem as ilhas. As ilhas são separadas por um toro invariante conhecido como separatriz e com o aumento da perturbação, mais toros invariantes são quebrados e na vizinhança dos pontos hiperbólicos surgem órbitas caóticas, esse fenômeno é chamado de caos de separatriz [24].

Sistemas cuja Hamiltoniana depende periodicamente do tempo, usualmente satisfazem as hipóteses do teorema de KAM e podem ser aproximados por mapas [24]. É o caso quando a Hamiltoniana perturbativa em (4.6) é representada por uma soma de funções delta de Dirac.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(t - n\tau), \quad (4.8)$$

onde A_n são as amplitudes e τ é o período da perturbação. Diversos sistemas dinâmicos podem ser representados através de mapas e uma das vantagens da abordagem através de mapas é que não é necessário integrar as equações que descrevem a evolução temporal do sistema, com isso as investigações sobre a natureza das órbitas e o transporte ficam muito mais imediatas [20].

4.4. MAPAS SIMPLÉTICOS

A dinâmica de sistemas Hamiltonianos pode ser descrita através de mapas simpléticos. Os mapas simpléticos são caracterizados por preservar o volume do espaço de fases (Teorema de Liouville) e áreas infinitesimais. Seja um mapa T que descreve a dinâmica nas variáveis ação-ângulo, isto é:

$$\begin{pmatrix} \chi_{n+1} \\ I_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \chi_n \\ I_n \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

Neste caso a matriz Jacobiana da transformação é dado como:

$$j = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \chi_n} & \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial I_n} \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \chi_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

A condição necessária para que o mapa seja simplético é que o modulo do determinante da matriz Jacobiana seja igual a um. Caso $J < 1$ o sistema é classificado como dissipativo, de modo que o volume do espaço de fases é contraído. Por outro lado, quando $J > 1$ o sistema é dito expansivo, pois o volume do espaço de fases aumenta [29].

4.5. NÚMERO DE ROTAÇÃO

Seja um sistema Hamiltoniano bidimensional, cuja Hamiltoniana é da forma (4.6), descrito por um mapa nas variáveis ação e ângulo (I, χ) ,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \epsilon f(I_n, \chi_n) \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + 2\pi \omega(I_{n+1}) + \epsilon g(I_n, \chi_n) \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde f e g são funções associadas às perturbações introduzidas no sistema, moduladas pela constante ϵ . A forma destas funções deve ser escolhida de modo que o mapa continua sendo simplético, ou seja, $|J| = 1$. Este mapa (4.11) é útil para modelar comportamentos de sistemas Hamiltonianos quase integráveis. A função $\omega(I_{n+1})$ é conhecida como número de rotação. Dada uma condição inicial (I_0, χ_0) , define-se

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi_{n+1} - \chi_0}{n}, \quad (4.12)$$

como sendo o número de rotação associado a esta condição inicial. Em outras palavras, o número de rotação corresponde à média das variações angulares a cada iteração a partir de uma condição inicial, sendo possível assim classificar o comportamento das órbitas.

O número de rotação pode assumir valores tanto racionais quanto irracionais, sendo ele portanto um elemento caracterizador de cada toro. Quando o número de rotação corresponde a um número racional, ou seja, $\Omega = r/s$, sendo r e s primos entre si, onde s é o período da

órbita e r o número de revoluções necessárias para formar os S pontos, tem-se uma órbita periódica representada no espaço de fases por S pontos distintos, chamados de pontos fixos, mais a frente será apresentada a condição de existência dos pontos fixos para um mapa. As órbitas quase-periódicas são representadas pelos números irracionais do número de rotação. Finalmente, para órbitas que o limite em (4.12) não converge, são denominadas caóticas, portanto, o número de rotação só é definido para condições iniciais correspondentes a órbitas regulares.

As órbitas quase periódicas, se apresentam em duas formas na seção de Poincaré:

- (i) Quando a órbita abrange todo o intervalo da coordenada angular χ , ela recebe o nome de curva invariante *spanning*.
- (ii) Quando a órbita se fechar em uma curva antes de percorrer todo χ , tem-se, então, uma curva de libração, por vezes denominada de ilha de ressonância.

Para sistemas integráveis, $\epsilon = 0$, a seção irá apresentar uma série de pontos sob uma curva definindo uma órbita periódica ou quase-periódica. Para $\epsilon \neq 0$, a seção será formada por um misto de regiões caóticas e regulares. Sendo assim, a seção irá contar com órbitas periódicas levando a cadeia de ilhas, curvas invariantes *spannings* e órbitas caóticas. O aumento da perturbação leva ao aumento da região caótica do sistema e a destruição das órbitas regulares, porém a transição para o caos difere dependendo da condição *twist*, que será apresentada e discutida na próxima seção. A presença de curvas invariantes *spannings* no espaço de fases é de grande importância no estudo do transporte, uma vez que estão associadas com o confinamento de órbitas a determinadas regiões no espaço de fases, podendo atuar também como barreiras de transporte [14].

4.6.MAPA PADRÃO TWIST

Uma possível classe de mapas, cuja forma geral expressa pela equação (4.11), é a dos mapas *twist*. Os mapas *twist* são chamados assim por satisfazerem a condição twist:

$$\frac{\chi_{n+1}}{\partial I_n} \neq 0, \quad (4.13)$$

A condição twist é, para mapas, o análogo da condição de não degenerescência para sistemas Hamiltonianos [23]. Assim, o cenário das soluções dos mapas *twist* é determinado pelos teoremas de KAM e PB.

Um caso particular, quando f é periódica em χ e independente em I e $g \equiv 0$ em (4.11). Assim, tem-se o mapa padrão *twist* (MPT), também conhecido na literatura como mapa de Chirikov-Taylor [30], dado por:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + K \sin(\chi_n) \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + I_{n+1} \pmod{1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde K é o parâmetro de controle da perturbação. Para $K = 0$ o sistema é integrável, pois $I_{n+1} = I_n$ ao longo da dinâmica.

Os pontos fixos de um mapa são valores que variam periodicamente sob a ação do próprio mapa [29]. Portanto, pode haver pontos fixos de diversos períodos. Seja um mapa T , como na equação (4.9), a condição dos pontos fixos é

$$T^p \begin{pmatrix} \chi^* \\ I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^* \\ I^* \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde p é o período do ponto fixos, ou seja, p simboliza quantas iterações do mapa são necessárias para a órbita retornar à condição inicial. **Figura 4**, mostra o espaço de fases do MPT para diferentes valores de K .

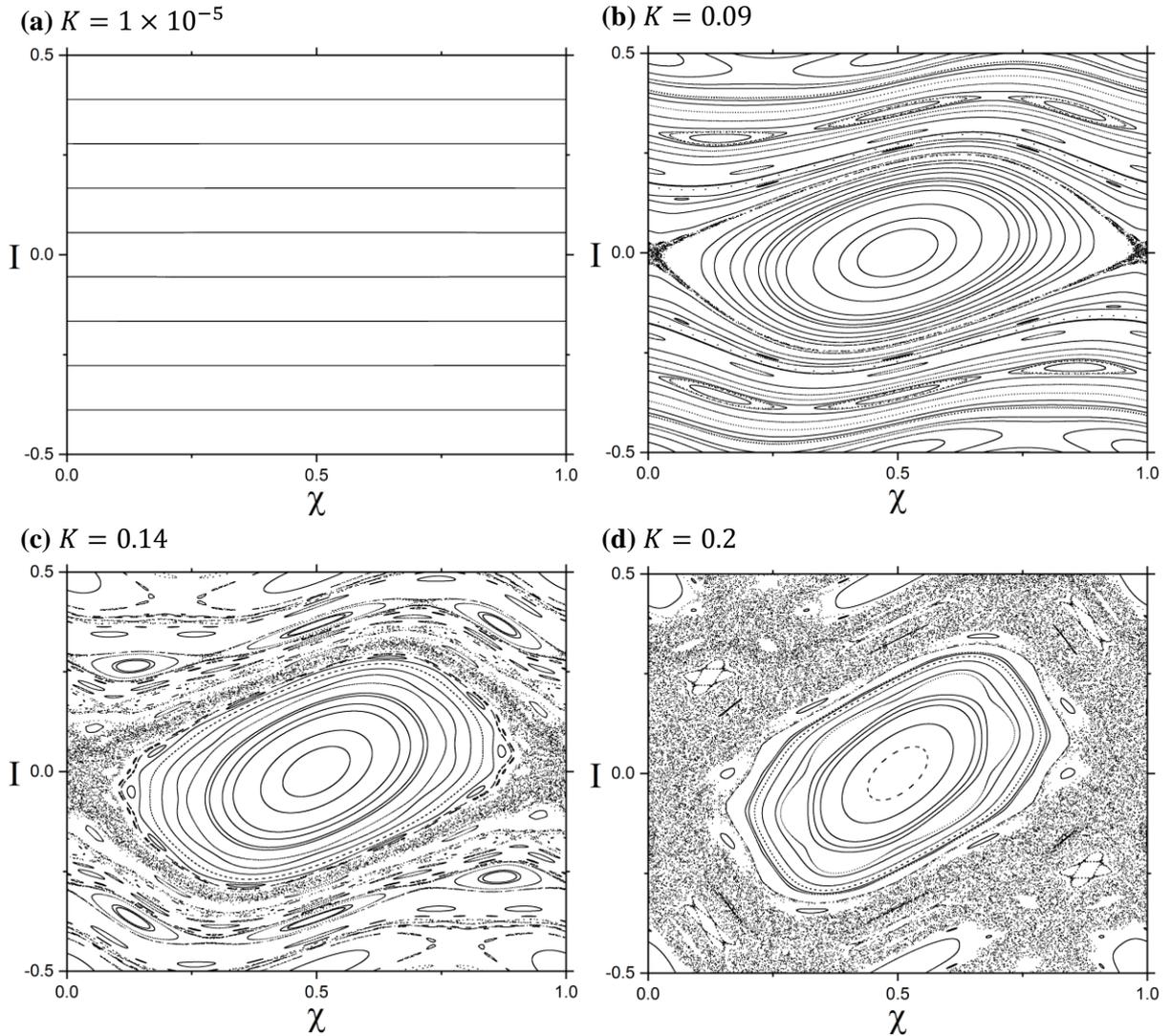


Figura 4: Espaço de fases do MPT. Em (a) $K = 1 \times 10^{-5}$; (b) $K = 0.09$; (c) $K = 0.14$; (d) $K = 0.2$.

Na figura 4(a) para $K = 1 \times 10^{-5}$ bem próximo do cenário integrável, o espaço de fases apresenta curvas invariantes correspondentes às condições iniciais (I_0, χ_0) . Aumentando-se o valor da perturbação, observa-se na figura 4(b), para $K = 0.09$, a persistência das órbitas regulares com o surgimento das ilhas no lugar dos pontos fixos, em especial uma ilha principal na região central de período um. Observa-se o caos de separatriz surgindo na ilha central. As regiões de ilhas são limitadas pelas separatrizes e em torno de seus pontos hiperbólicos observa-se o surgimento de órbitas caóticas, além de curvas invariantes *spannings*. Com $K = 0.14$, figura 4(c), podemos observar um aumento significativo das órbitas caóticas, com a destruição das órbitas regulares, porém algumas ilhas e curvas invariantes ainda resistem à perturbação. Já com $K = 0.2$, figura 4(d), grande parte das ilhas foram destruídas e mais nenhuma curva

invariante *spanning* sobreviveu, permitindo a difusão ilimitada das órbitas caóticas em ambos os sentidos da coordenada I.

4.7. MAPA PADRÃO NÃO TWIST

Uma possibilidade para definir o mapa padrão não *twist* (MPNT) é por [14]:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + b \sin(2\pi\chi_n) \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + a(1 - I_{n+1}^2) \pmod{1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $a \in (0,1)$ e $b \in \mathbb{R}$ são os parâmetros de controle. No limite de $b = 0$ o sistema é integrável. O MPNT viola a condição *twist*, uma vez que:

$$\frac{\chi_{n+1}}{\partial I_n} = 0 \quad (4.17)$$

Vários sistemas físicos podem ser modelados através do MPNT, como por exemplo, linhas de campo com cisalhamento em Tokamaks [31-33], dinâmica de fluidos [14,34] e na física molecular [36]. A condição não *twist* é necessária para a validade de resultados aplicados a sistemas *twist*, como o teorema KAM, de forma que, se um sistema físico é investigado através de mapas não *twist*, tais cenários não são aplicáveis [36]. A violação da condição *twist*, é resultado de o perfil do número de rotação ser não monotônico, com isso ocorre a presença no espaço de fases de órbitas que possuem o mesmo número de rotação [35]. Outra consequência do perfil não monotônico do número de rotação, é a presença de um extremo no perfil e a órbita correspondente a esse extremo possui uma frequência irracional e é conhecida como curva *shearless*. Mais adiante serão abordados os aspectos dessa curva especial.

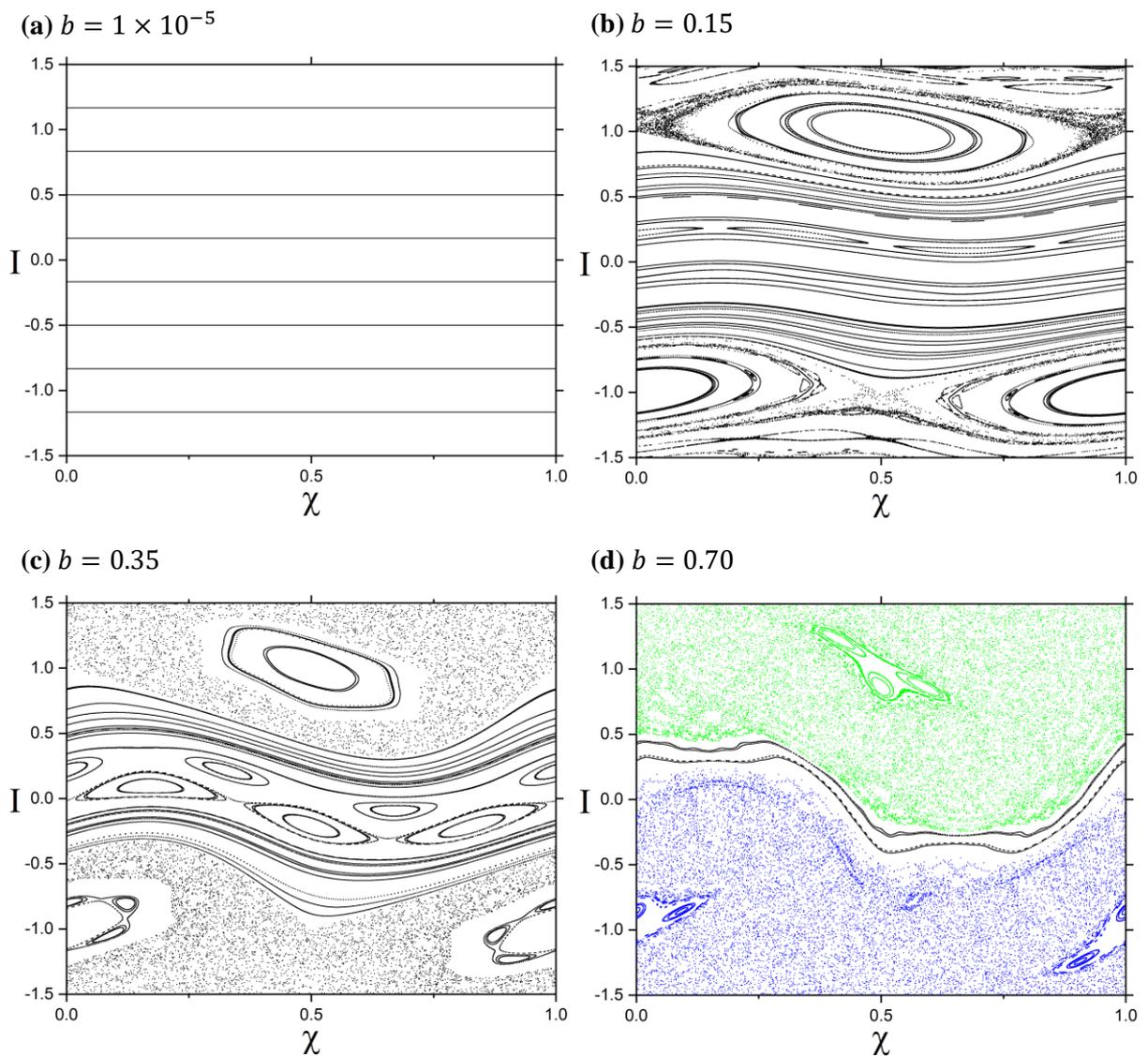


Figura 5: Espaço de fases do MPNT para $a = 0.345$ e em (a) $b = 1 \times 10^{-5}$; (b) $b = 0.15$; (c) $b = 0.35$; (d) $b = 0.7$.

A **Figura 5**, mostra o espaço de fases do MPNT (4.16) para $a = 0.345$ e diferentes valores de b . Para $b = 1 \times 10^{-5}$, figura **5(a)**, ou seja, próximo ao cenário integrável o espaço de fases apresenta apenas curvas invariantes. Com o aumento da perturbação, agora $b = 0.15$, figura **5(b)**, temos um misto de órbitas no espaço de fases, duas ressonâncias principais e curvas invariantes *spannings* na região central. Observa-se também, o surgimento de órbitas caóticas na região vizinha aos pontos hiperbólicos das duas ilhas principais, comportamento idêntico ao MPT. Com $b = 0.35$, figura **5(c)**, as curvas invariantes *spannings* próximas às duas ressonâncias principais foram destruídas caracterizando um cenário de difusão ilimitada das órbitas caóticas em ambos os sentidos de I , porém ainda na região central, em torno de $I \sim 0$, observam-se órbitas regulares como cadeia de ilhas e curvas invariantes *spannings* atuando

como barreiras de transporte, de forma que as órbitas caóticas acima e abaixo dessas estruturas ficam separadas.

Para visualizar como as curvas invariantes *spannings* atuam como barreira de transporte, o espaço de fase para $b = 0.70$, figura 5(d), apresenta algumas curvas invariantes, em preto na região central. Elas separam completamente as órbitas caóticas da região superior, mostradas em verde, daquelas na região inferior, em azul. Porém com o aumento do parâmetro perturbativo eventualmente todas as órbitas regulares serão destruídas, de forma que todo o espaço de fases poderá ser tomado por órbitas caóticas, caracterizando o caos global.

4.8. CURVA SHEARLESS

Um resultado direto de sistemas não *twist* é a presença de cadeias de ilhas com o mesmo número de rotação. Esta particularidade é devido ao perfil do número de rotação do sistema ser não monotônico, ou seja, a existência de ao menos um extremo (máximo/mínimo local). A curva *shearless* ou sem *shear* é definida como sendo a curva invariante que pertence a um extremo irracional do perfil do número de rotação. Uma vez que a violação da condição *twist* garante a presença de pelo menos um extremo no perfil do número de rotação, pelo menos uma curva *shearless* pode ser encontrada em sistemas não *twist*.

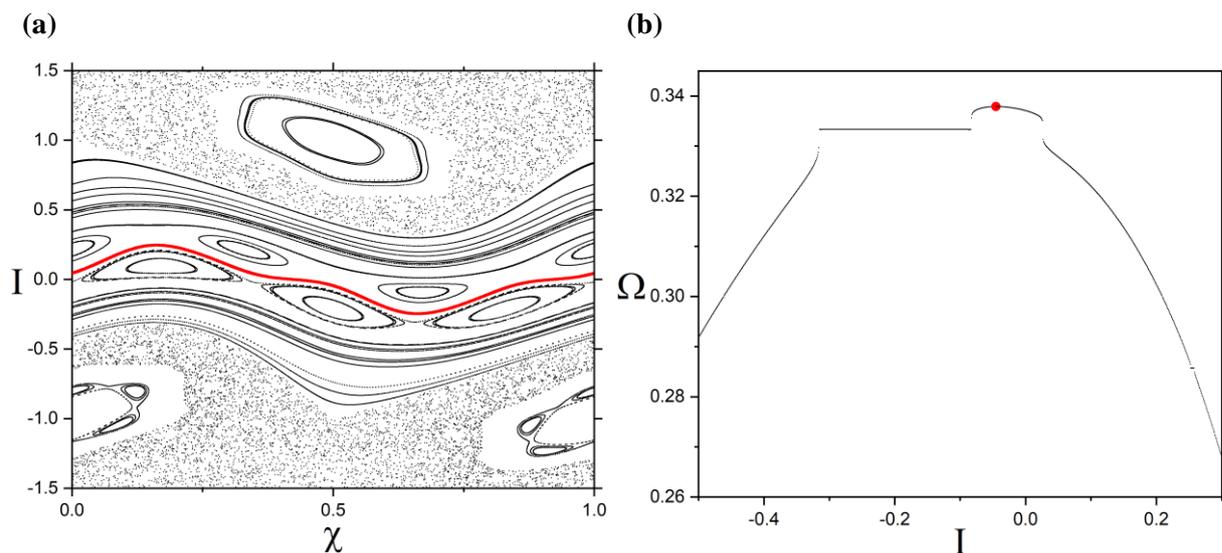


Figura 6: Em (a) o espaço de fases do MPNT para os parâmetros $a = 0.345$ e $b = 0.35$. Em vermelho a curva shearless. Em (b) Perfil do número de rotação, com condições iniciais sobre $\chi_0 = 0.5$, o ponto em vermelho identifica uma condição em cima da shearless.

A figura 6(b) mostra o perfil do número de rotação usando $\chi_0 = 0.5$, $a = 0.345$ e $b = 0.35$. O ponto em vermelho identifica o máximo local do perfil do número de rotação em $I_0 =$

-0.0451451451451451 . Dessa forma, o ponto (χ_0, I_0) é a condição inicial utilizada para desenhar a curva *shearless*, em vermelho, no espaço de fases como mostrado na figura 6(a).

Em sistemas não *twist*, verifica-se que o toro *shearless* ser o mais robusto, pois é o último toro invariante a ser destruído [14]. Com o aumento gradual da perturbação, o caos se espalha no espaço de fases e para determinado conjunto de parâmetros, observa-se a quebra da curva *shearless*. Desta forma, para encontrar a transição para o caos global em sistemas não *twist* é preciso determinar o conjunto de parâmetros da quebra da *shearless*, uma vez que o toro *shearless* age como barreira de transporte por ser uma curva invariante *spanning*. Tendo isto em vista, o estudo dos valores dos parâmetros de controle para a sua destruição é de grande importância no estudo do transporte no espaço de fases. Na próxima seção introduziremos um método numérico baseado no teorema de Slater para identificar a destruição de toros invariantes.

4.9. TEMPOS DE RECORRÊNCIA E STICKINESS

Para analisar o conjunto de parâmetros para em que a curva *shearless* é rompida, foi proposto um método numérico baseado no teorema de Slater [37] o qual afirma que para qualquer intervalo de tamanho ϵ de uma órbita quase periódica, existem no máximo três diferentes tempos de recorrência ou tempos de retorno: Γ_1 , Γ_2 e $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Assim para qualquer intervalo ϵ de uma curva invariante, temos no máximo três diferentes tempos de recorrência, sendo um deles a soma dos outros dois. Assim, o método consiste em contar os números de diferentes tempos de retorno pertencentes a uma região arbitraria por onde passa o toro *shearless*.

Uma maneira analítica de encontrar a curva *shearless* no MPNT é através dos pontos indicadores (PI) [38]. As iterações dos pontos indicadores formam um toro invariante que por sua vez é, de fato, um toro sem *shear* [38,39]. Logo, a implementação desse método para o MPNT é simples uma vez que conhecemos os pontos indicadores do mapa. Contudo, o MPNT possui simetrias que auxiliam encontrar, analiticamente, pontos indicadores e infelizmente, para o mapa de ondas de deriva, que será introduzido mais a frente, não se encontram os valores dos pontos indicadores devido o mapa não apresentar tais simetrias [6].

Apesar de não haver como obter os PI's para o mapa de ondas de deriva usaremos uma adaptação do teorema de Slater, de forma que o método vai se restringir a calcular os tempos de retorno para uma grade de condições iniciais suficientemente próximas de onde a *shearless* possivelmente localiza. Admite-se que não temos garantias que a curva *shearless* passa dentro

da grade das condições iniciais. Apesar desse fato, os resultados obtidos neste trabalho mostram que essa adaptação do teorema de Slater para os cálculos dos tempos de retorno para o mapa de ondas de deriva é razoável.

Para o MPNT, os pontos indicadores são [39]:

$$\begin{aligned} (P_0I)_{1,2} &= \left(\pm \frac{b}{2}, \pm \frac{1}{4} \right), \\ (P_1I)_{1,2} &= \left(0, \frac{a}{2} \pm \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \tag{4.18}$$

Para o MPNT usamos o ponto indicador $PI = (b/2, 1/4)$ como condição inicial e o tamanho da caixa quadrada de lado $\epsilon = 0.02$, para calcular os tempos de recorrência para diferentes valores de b .

Tabela 4.1: Tempos de recorrência do MPNT para três diferentes valores de b e $a = 0.345$. Quando $b = 0.825252525$ o toro *shearless* foi destruído.

b	Γ_1	Γ_2	Γ_3
0.8232323232323232	10	103	113
0.82424242424242433	10	143	153
0.82525252525252524	10	220	323

A **Tabela 4.1** mostra para os dois primeiros valores de b que o toro *shearless* ainda resiste, satisfazendo o teorema de Slater, porém para o último valor de b , os valores dos tempos de recorrência não mais o satisfazem, portanto conclui-se que o toro *shearless* foi destruído.

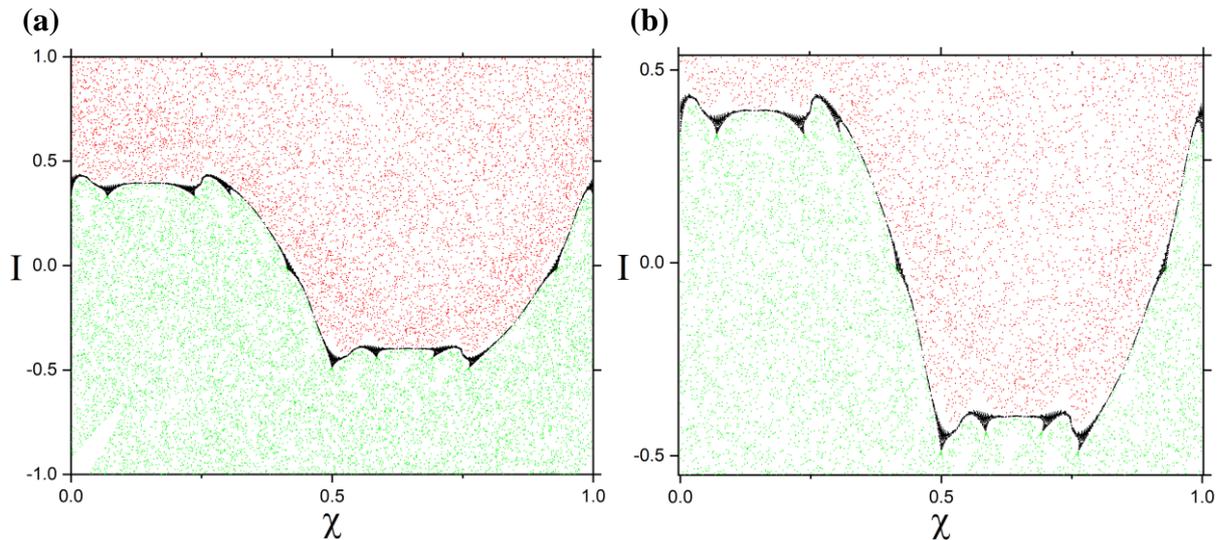


Figura 7: Em (a) espaço de fase do MPNT para os valores críticos dos parâmetros da destruição da *shearless*, $a = 0.345$ e $b = 0.825252525$. Em (b) um zoom do espaço de fases em (a).

A [Figura 7](#) apresenta espaços de fases do MPNT para valores crítico dos parâmetros da destruição da *shearless* de acordo com [Tabela 4.1](#). Em vermelho e verde são as trajetórias das condições iniciais acima e abaixo de onde a *shearless* se encontrava, respectivamente. Na região central, percebe-se uma região mais densa (em preto) de órbitas separando as trajetórias vermelhas e verdes no espaço de fases, portanto atuando como uma barreira de transporte também. Este efeito de aprisionamento de órbitas caóticas em certas regiões do espaço de fases é chamado de *stickiness*, efeito dependente do número de iteração pois eventualmente as órbitas acabam escapando. O aumento dos termos perturbativos do sistema tende a destruir essas estruturas [\[40,41\]](#). O aprisionamento das órbitas está ligado à presença de estruturas chamadas de cantoros. Os cantoros são conjuntos invariantes que consistem em vários pontos que não formam uma curva invariante *spaning* no espaço, deixando pequenos ‘buracos’ por toda parte. Os cantoros formam-se a partir da destruição dos toros invariantes conforme aumenta-se a perturbação [\[41,42\]](#).

Portanto, o fenômeno do *stickiness* é um dos principais efeitos no transporte, isto é, na difusão das órbitas caóticas no espaço de fases em longos intervalos de tempo. Vimos que em sistemas bidimensionais, curvas invariantes funcionam como barreira de transporte, mas com o aumento da intensidade da perturbação, começamos a encontrar fenômenos como o de *stickiness*. Em particular, no MPNT, tem-se que mesmo depois do rompimento da curva *shearless*, as trajetórias não ficam completamente livres no espaço de fases. Esse efeito de barreira de transporte persiste e muitas órbitas ficam aprisionadas, por longos períodos, naquela região [\[42\]](#).

5. MAPA DE ONDAS DE DERIVA

Neste capítulo, é apresentado o modelo para a investigação do transporte de partículas no Texas Helimak. Aproveitando a equação de movimento deduzidas no Capítulo 2, o modelo considera a velocidade de deriva (3.1), como mecanismo de turbulência. As flutuações eletrostáticas são introduzidas em forma de um potencial flutuante de termos periódicos. Assim, obtém-se um mapa de ondas de deriva para a geometria do Texas Helimak, apresentadas no Capítulo 3. Desta forma, o transporte das partículas no TH podem ser investigadas através dos conceitos abordados no Capítulo 4.

5.1. MODELO DE HORTON (ONDAS DE DERIVA)

A fim de estudar o transporte turbulento das partículas na borda do plasma no TH, consideraremos um modelo proposto por Horton [9]. O modelo considera a velocidade de deriva v_e , causada pelo produto $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, como mecanismo de turbulência (ondas de deriva) assim, são introduzidas flutuações eletrostáticas em formas de termos impulsivos periódicos.

O campo elétrico considerado possui duas componentes, uma radial \mathbf{E}_0 denominada como campo elétrico de equilíbrio e outra resultante das flutuações $\tilde{\mathbf{E}}$, desta forma, o campo elétrico total é dado como,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}, \quad (5.1)$$

onde o termo perturbativo $\tilde{\mathbf{E}}$ referente às ondas eletrostáticas é dado por,

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\tilde{\phi}, \quad (5.2)$$

onde $\tilde{\phi}$ o potencial eletrostático, que em coordenadas cilíndricas é descrito como,

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} \cos(m\varphi - l_z z - n\omega_0 t), \quad (5.3)$$

onde $\phi_{l,m,n}$ a amplitude das ondas, m e $l_z = 2\pi l/H$ os modos de oscilação angular e vertical respectivamente. Portanto, o modelo de ondas de deriva é composto por infinitos modos espaciais m e l e de um amplo espectro de frequências $n\omega_0$, compondo assim, um modelo ideal de infinitas ondas. Mais à frente, serão feitas aproximações a respeito da amplitude e a fase das ondas.

Reescrevemos a equação (5.3) como

$$\tilde{\phi} = \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} [\cos(m\varphi - l_z z) \cos(n\omega_0 t) - \sin(m\varphi - l_z z) \sin(n\omega_0 t)], \quad (5.4)$$

e utilizamos as seguintes identidades matemáticas,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi n), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(n\omega_0 t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

escrevemos o potencial eletrostático como,

$$\tilde{\phi} = 2\pi \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} \cos(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n), \quad (5.6)$$

Nota-se que na equação (5.6) que o termo perturbativo do sistema é composto por uma soma da função delta de Dirac e como comentado na Seção 4.1, sistemas em que a perturbação assume essa forma podem-se derivar mapas. Portanto o modelo de ondas de deriva permite a investigação do comportamento do transporte das partículas na borda do plasma numericamente através de mapas não lineares, cujas propriedades foram revistas brevemente no Capítulo 4.

Desta forma o campo elétrico total é dado explicitamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \hat{r} + \frac{2\pi}{r} \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} m \sin(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \hat{\phi} \\ &\quad - 2\pi \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} l_z \sin(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \hat{z}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.2. APROXIMAÇÃO DE DOIS MODOS PARA O MODELO DE ONDAS DE DERIVA

A velocidade do centro de guia das partículas é dada pela equação (2.27), desenvolvida no Capítulo 2:

$$\mathbf{v}(t) = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

Da equação acima e da descrição dos campos elétricos e magnéticos do TH, das equações (5.7) e (3.3), obtém-se as equações do movimento por coordenada:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{B_z}{rB^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varphi} + \frac{B_\varphi}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}, \quad (5.8)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \left(v_{\parallel} \frac{B_\varphi}{B} - \frac{B_z}{B^2} E_0 + \frac{B_z}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \right), \quad (5.9)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_z}{B} - \frac{B_\varphi}{B^2} E_0 + \frac{B_\varphi}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}, \quad (5.10)$$

Como comentado na Seção 3.2, a magnitude da componente vertical do campo magnético (B_z) atinge no máximo 10% da intensidade da componente angular (B_φ), logo faremos a seguinte aproximação, $B \approx B_\varphi \gg B_z$. Portanto a decomposição da equação (2.27) resulta em,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}, \quad (5.11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{r}, \quad (5.12)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_z}{B} + \frac{E_0}{B} - \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}, \quad (5.13)$$

Convém aqui fazer a seguinte mudança de variável:

$$I = \frac{r^2 - R_{int}^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2}, \quad (5.14)$$

desta forma, a variável I varia no intervalo [0,1] para $R_{int} \leq r \leq R_{ext}$. Usamos também as notações:

$$a^2 \equiv R_{ext}^2 - R_{int}^2, \quad (5.15)$$

$$b^2 = \frac{R_{int}^2}{a^2}, \quad (5.16)$$

$$J = I + b^2, \quad (5.17)$$

Com essas mudanças, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{2r}{a^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2\sqrt{J}}{a} \frac{dr}{dt} \quad (5.18)$$

Em nossa abordagem, consideramos dois modos espaciais no potencial eletrostático da equação (5.6), que chamamos de (M, L) para o primeiro modo e $(M + 1, L)$ para o próximo modo consecutivo, com as amplitudes constantes no tempo. Assim, o modelo de modos espaciais infinitos é ajustado para apenas dois modos espaciais dominantes. Um trabalho recente [11] utilizou a aproximação de um modo para o modelo de ondas de deriva no estudo de barreiras de transporte. Então aqui adicionamos um segundo modo para estudar o efeito do segundo modo no sistema que foi investigado com apenas um modo. Desta forma, o potencial eletrostático aproximado para dois modos é,

$$\tilde{\phi} = 2\pi\{\phi_{M,L} \cos[M\varphi - L_z z] + \phi_{M+1,L} \cos[(M + 1)\varphi - L_z z]\} \sum_n \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.19)$$

onde $L_z = 2\pi L/H$. Substituindo equações (5.11) e (5.19) em (5.18) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \left(\frac{2\sqrt{1+b^2}}{a} \right) \left(\frac{4\pi}{HB} \right) L_z \{ \phi_{M,L} \sin(M\varphi - L_z z) \\ & + \phi_{M+1,L} \sin[(M + 1)\varphi - L_z z] \} \sum_n \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Finalmente, definimos a variável angular:

$$\chi = M\varphi - L_z z \quad (5.21)$$

Derivando equação (5.21) com relação ao tempo temos,

$$\frac{d\chi}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} - L_z \frac{dz}{dt} \quad (5.22)$$

Substituindo equações (5.12) e (5.13) em (5.22), obtém-se

$$\frac{d\chi}{dt} = v_{||} \frac{2\pi B_z}{H B} \left[\frac{MHB}{2\pi r B_z} - L \left(1 + \frac{E_0(I_{n+1})}{v_{||} B_z} \right) \right] \quad (5.23)$$

As equações (5.20) e (5.23) descrevem as trajetórias das partículas no espaço de fases das variáveis ação e ângulo. Nota-se da equação (5.20) que a variável ação I permanece constante entre dois pulsos, isto porque o termo perturbativo, equação (5.19), consiste em impulsos periódicos de período $T = 2\pi/\omega_0$, portanto I sofre ‘saltos’ múltiplos de T . Logo, o intervalo de integração das equações diferenciais (5.20) e (5.23), se dão no intervalo $\tau = nT$ e

$\tau = (n + 1)T$ com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sobre um impulso. Tomando um valor infinitesimal próximo desses instantes de tempo, a integral da equação (5.20) fica:

$$\int_{I_n}^{I_{n+1}} \frac{dI}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \left(\frac{2\sqrt{I + b^2}}{a} \right) \left(\frac{4\pi}{HB} \right) L_z \{ \phi_{M,L} \sin(M\varphi - L_z z) + \phi_{M+1,L} \sin[(M + 1)\varphi - L_z z] \} \delta(\omega_0 t - 2\pi n) dt \quad (5.24)$$

resultando em,

$$I_{n+1} = I_n + \frac{4\pi L}{\omega_0 q(I_n) B_z} \left\{ \phi_{M,L} \sin\left(M\varphi - \frac{2\pi L}{H} z\right) + \phi_{M+1,L} \sin\left[(M + 1)\varphi - \frac{2\pi L}{H} z\right] \right\} \quad (5.25)$$

em que, $q(I_n) = BH/2\pi a B_z \sqrt{I + b^2}$ é conhecido como fator de segurança. Agora, integrando a equação (5.23) tem-se,

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{2\pi v_{\parallel}}{\omega_0 a q(I_n) \sqrt{I_n + b^2}} (Mq - L) - \frac{2\pi L E_0(I_{n+1})}{\omega_0 a q(I_n) B_z \sqrt{I_n + b^2}} \quad (5.26)$$

Assim as integrações das equações (5.20) e (5.23) produz,

$$I_{n+1} = I_n + \frac{4\pi L \phi_{M,L}}{\omega_0 q(I_n) B_z} \sin(\chi_n) + \frac{4\pi L \phi_{M+1,L}}{\omega_0 q(I_n) B_z} \sin(\chi_n + \varphi_n) \quad (5.27)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{2\pi}{\omega_0 a q(I_n)} \left[v_{\parallel} (Mq(I_n) - L) - \frac{L E_0(I_{n+1})}{B_z} \right] \frac{1}{\sqrt{I_{n+1} + b^2}} \quad (5.28)$$

Nota-se que na equação (5.27) que a coordenada I além de ter uma dependência em χ também possui uma dependência em φ . Essa dependência surge quando se aproxima o modelo de infinitas ondas para mais de um modo espacial dominante, ou seja, para uma aproximação de dois ou mais modos surge uma dependência de φ em I . Agora, para obter a equação da coordenada φ , integramos a equação (5.12) no mesmo intervalo argumentado anteriormente, resultando em,

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{2\pi v_{\parallel}}{\omega_0 a \sqrt{I_{n+1} + b^2}} \quad (5.29)$$

Assim, o mapa de ondas de derivas com dois modos espaciais dominantes é dado por,

$$I_{n+1} = I_n + \alpha_1 \sin(\chi_n) + \alpha_2 \sin(\chi_n + \varphi_n) \quad (5.30-a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{\beta}{\sqrt{I_{n+1} + b^2}} \quad (5.30-b)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \frac{\gamma}{\sqrt{I_{n+1} + b^2}} \quad (5.30-c)$$

onde α_1 , α_2 , β e γ são parâmetros de controle, definidos como:

$$\alpha_1 \equiv \frac{4\pi L \phi_{M,L}}{\omega_0 q(I_n) a^2 B_z} \quad (5.30)$$

$$\alpha_2 \equiv \frac{4\pi L \phi_{M+1,L}}{\omega_0 q(I_n) a^2 B_z} \quad (5.31)$$

$$\beta \equiv \frac{2\pi}{\omega_0 a q(I_n)} \left[v_{||} (Mq(I_n) - L) - \frac{LE_0(I_{n+1})}{B_z} \right] \quad (5.32)$$

$$\gamma \equiv \frac{2\pi v_{||}}{\omega_0 a} \quad (5.33)$$

O mapa possui três coordenadas e quatro parâmetros de controle α_1 , α_2 , β e γ . No entanto, para que o mapa acima seja simplético, é preciso que o determinante da matriz Jacobiana seja unitário, em Apêndice A (pag. 69) é verificada essa propriedade.

De imediato, nota-se que a adição de um modo espacial resultou na introdução de uma nova coordenada (φ) em relação ao mapa com um modo, desta forma, a dinâmica é descrita em três dimensões ao invés de duas. Porém Capítulo 4, revisou conceitos como número de rotação, barreiras de transporte, entre outros para sistemas bidimensionais, logo o uso destes conceitos no estudo do mapa obtido não deve ocorrer de maneira direta. Contudo, os resultados mais relevantes aparecem quando analisamos a dinâmica projetada no plano das coordenadas ação e ângulo, assim todo o arcabouço teórico comentado é aplicado sem nenhuma restrição.

Nota-se das equações (5.30) e (5.31) que os parâmetros α_1 e α_2 dependem da amplitude da onda, $\phi_{M,L}$ e $\phi_{M+1,L}$, respectivamente, logo estão relacionados a amplitude da perturbação imposto no sistema. O parâmetro β está relacionado ao campo elétrico de equilíbrio $E_0(I)$, de acordo com equação (5.32), que assumiremos uma dependência quadrática em I . A escolha da aproximação radial para o campo elétrico de equilíbrio altera as propriedades do mapa, levando a rearranjos topológicos no espaço de fase. Mais especificamente, a escolha de um perfil radial

não linear para o campo elétrico leva à violação da condição *twist* o que pode introduzir a curva *shearless* na dinâmica. Através do mapa obtido pode-se investigar a influência do *bias* e dos modos separadamente sobre o transporte. Neste trabalho o fator de segurança q assume valor constante, enquanto γ é relacionado a grandezas do TH, portanto assume também valor constante.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados os resultados do estudo do mapa de ondas de deriva com dois modos espaciais obtido no capítulo anterior. Rotinas numéricas em Fortran 90 foram realizadas para obter os espaços de fases, perfis de número de rotação, tempos de recorrência e espaço dos parâmetros. Os resultados foram divididos de acordo com dois valores de *bias*: 4 e 8 Volts, uma vez que foi observado para esses *bias* a existência de curva *shearless* no contexto do mapa de ondas de deriva com um modo espacial dominante [12]. Com o interesse de investigar a dependência das propriedades de transporte com relação ao segundo modo, a seguinte estratégia foi adotada: fixar a amplitude do primeiro modo, desta forma atribui-se um valor constante para α_1 e gradativamente aumentar a amplitude do segundo modo, consequentemente de α_2 , partindo de $\phi_{M+1,L} = 0$. Para estimar os valores dos parâmetros de controle foram utilizados dados de experimentos do TH retirados de [6]. Os principais resultados que serão apresentados neste capítulo foram apresentados e discutidos em [43].

6.1. RESULTADOS

Antes de apresentar os resultados, alguns breves comentários precisam ser feitos. Os espaços de fases que aparecem no decorrer deste capítulo foram obtidos iterando as equações do mapa (5.30) com as seguintes condições iniciais: $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = [0,1]$ e $I_0 = [0,1]$ sendo que os intervalos de χ_0 e I_0 foram divididos em 10 subintervalos igualmente espaçados, formando assim uma grade de 100 condições iniciais e cada uma foi iterada 10^3 vezes. Para os perfis de número de rotação as seguintes condições iniciais foram usadas: $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = 0.5$ e $I_0 = [0,1]$ sendo que I_0 foi dividido em 10^3 intervalos igualmente espaçados e cada condição iterada 10^4 vezes. A condição de escape $\sqrt{I_{n+1} + b^2}$ foi considerada, ou seja, as iterações foram interrompidas quando $I_{n+1} < -b^2$. Para ambos os valores de *bias*, a amplitude do primeiro modo assume o valor $\phi_{M,L} = -10V$, com isso $\alpha_1 = -0.09423$. Ao longo dos cálculos numérico os valores de $\phi_{M+1,L}$ foram obtidos implicitamente variando-se convenientemente os valores de α_2 .

6.2. ESPAÇO DE FASES

A adição de um segundo modo introduziu uma nova coordenada em relação ao mapa de um modo, portanto a dinâmica é governada por um mapa com três coordenadas (I, χ, φ) , mas os resultados mais significativos ocorrem quando analisamos a dinâmica no plano (χ, I) . O principal resultado que nos levou a esta conclusão foi que a curva *shearless* se manifestou apenas no plano (χ, I) . Na **Figura 8** mostra o perfil do número de rotação, com $\alpha_2 = 0$, para o *bias* 4 Volts exibindo um ponto mínimo em vermelho, o que identifica um ponto pertencente à curva *shearless*.

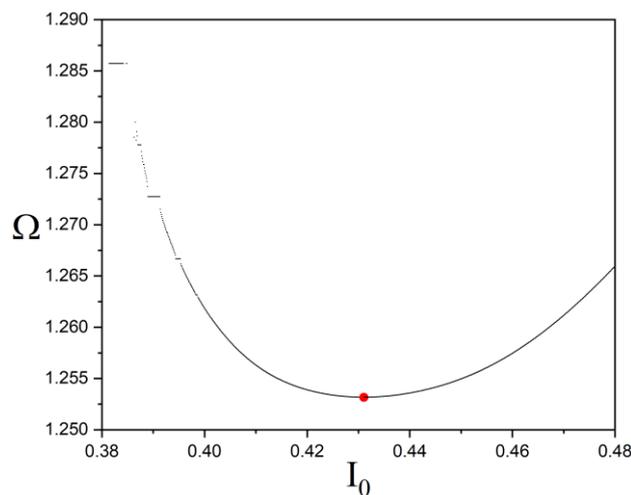


Figura 8: O perfil do número de rotação para vários valores de I , o ponto vermelho ($I = 0.4308, \Omega = 1.2532$) permite escolher uma condição inicial na curva *shearless* para *bias* de 4 Volts.

Na **Figura 9** mostramos as iterações, em preto, deste ponto que pertence a curva *shearless* no espaço 3d (I, χ, φ) . A condição inicial usada para obter a **Figura 9** foi o ponto mínimo do perfil do número de rotação, de acordo com **Figura 8**, $(I_0, \chi_0, \varphi_0) = (0.4308, 0.5, 0.5)$. A curva *shearless* apresenta-se apenas quando a dinâmica é projetada no plano (χ, I) , cor vermelha, enquanto nas demais projeções, (φ, I) , cor azul, e (φ, χ) , cor verde, ela não aparece. Assim, as investigações da influência do segundo modo na dinâmica se deu apenas no plano (χ, I) . O mesmo comportamento foi encontrado para o caso do *bias* 8 Volts.

A projeção da curva *shearless* se manifestando “apenas” no plano (χ, I) de certa forma facilita o estudo da influência do segundo modo na dinâmica, uma vez que as investigações sobre as barreiras de transporte com um modo foram realizadas no plano (χ, I) .

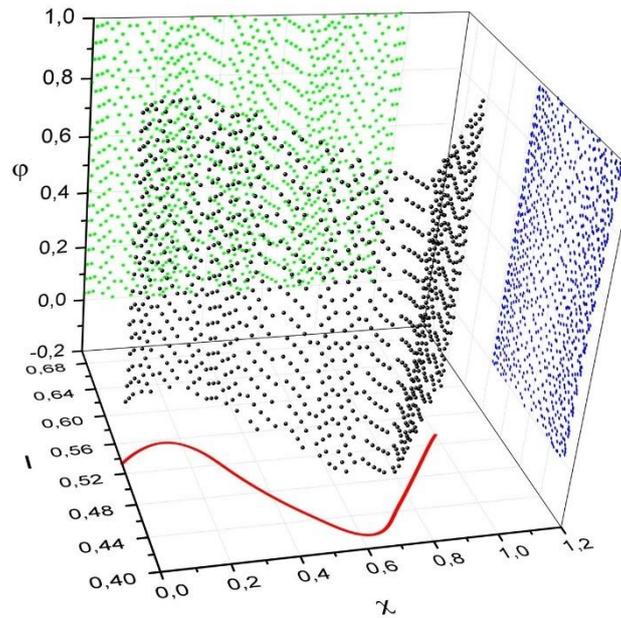


Figura 9: Perspectivas no espaço (I, χ, φ) . Em preto as iterações da condição inicial; em vermelho a curva shearless no espaço de fase projetado (χ, I) mostrando o; em azul o espaço de fase (φ, I) e em verde o espaço de configuração (φ, χ) . A curva sem cisalhamento aparece apenas na projeção (χ, I) . Fonte: [43]

Nas duas próximas seções serão apresentados os resultados da influência do segundo modo na dinâmica do mapa, para os *bias* de 4 e 8 Volts respectivamente.

6.3. BIAS 4 VOLTS

Nesta seção, mostramos e discutimos os resultados no que se diz respeito ao transporte do mapa de ondas de deriva com dois modos espaciais para o caso do *bias* 4 Volts. Com ênfase, no comportamento da curva *shearless* em termos dos parâmetros de controle relacionados à perturbação, ou seja, α_1 e α_2 .

A **Figura 10** apresenta o espaço de fases para $\alpha_2 = 0$ exibindo curvas invariantes *spannings* e uma cadeia de ilhas na região central $I \sim 0.6$ dividindo o mar caótico em duas regiões, de forma que as órbitas caóticas abaixo não conseguem acessar a região acima e vice-versa, atestando que as curvas invariantes *spannings* estão atuando como barreiras de transporte, comportamento semelhante aos MPT e MPNT. Além delas, destacada em vermelho a curva *shearless* na região central bloqueando o transporte das órbitas caóticas. Observa-se outra ressonância em $I \sim 0.82$ envolvida no mar de caos. Atenta-se que não existem curvas invariantes *spannings* nos extremos do espaço de fases, portanto permitindo a difusão ilimitada das órbitas caóticas nos sentidos positivo e negativo em I .

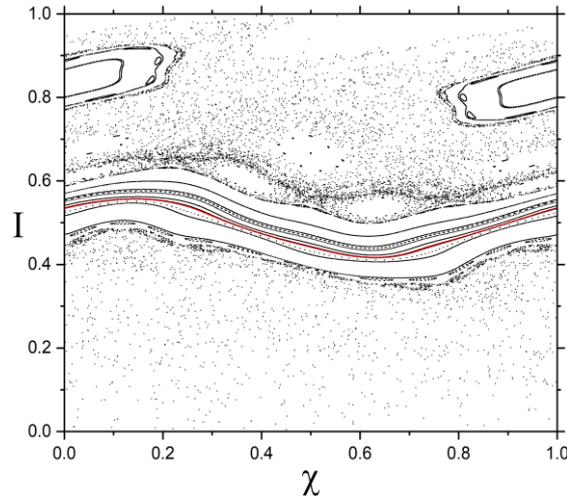
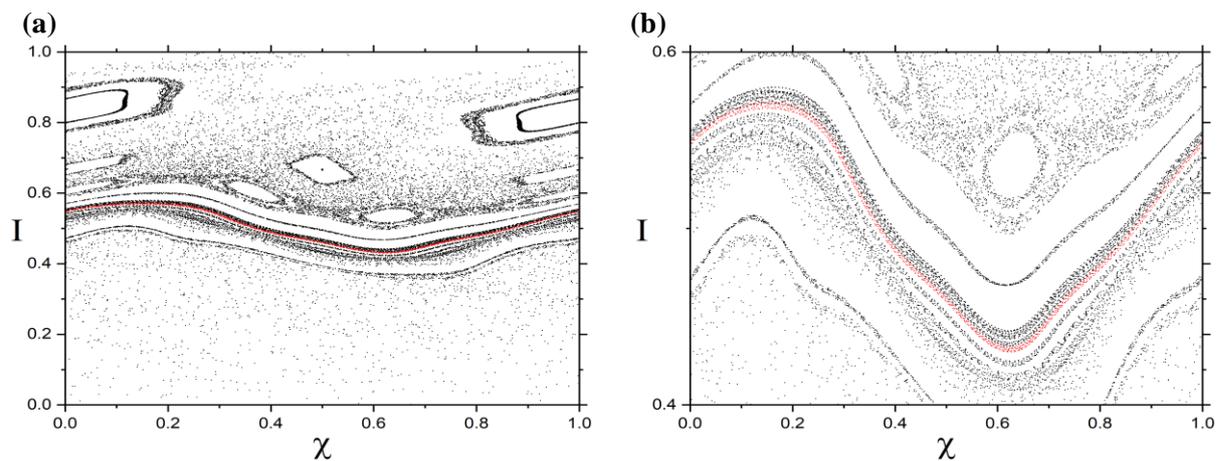


Figura 10: O espaço de fase (I, χ) com $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = 0$, para *bias* de 4 Volts. A curva *shearless* está em vermelho.

Com o aumento da amplitude do segundo modo, as estruturas regulares foram deformadas e em alguns casos destruídas levando a um aumento do mar de caos. A figura **11(a)** mostra o espaço de fases para $\alpha_2 = -3 \times 10^{-3}$. Confrontando os espaços de fases de **Figura 10** e **Figura 11** repaa-se que os efeitos do aumento da amplitude de α_2 foram a formação de mais ressonâncias, ocasionadas pelos valores racionais dos antigos toros como previsto pelo teorema de PB e a diminuição da região das curvas invariantes *spannings*, entretanto a curva *shearless* (em vermelho) resiste ao aumento da perturbação.

A figura **11(b)** é uma ampliação do espaço de fases da figura **11(a)** na região das curvas invariantes. Percebe-se que o efeito de α_2 foi causar certa ‘porosidade’ tanto nas curvas invariantes *spanings* e quanto na curva *shearless*. Na figura **11(c)** apresentamos o perfil do número de rotação para o mesmo valor de α_2 . O ponto de mínimo em vermelho identifica a condição usada para traçar a curva *shearless* nas figuras **11(a)** e **11(b)**.



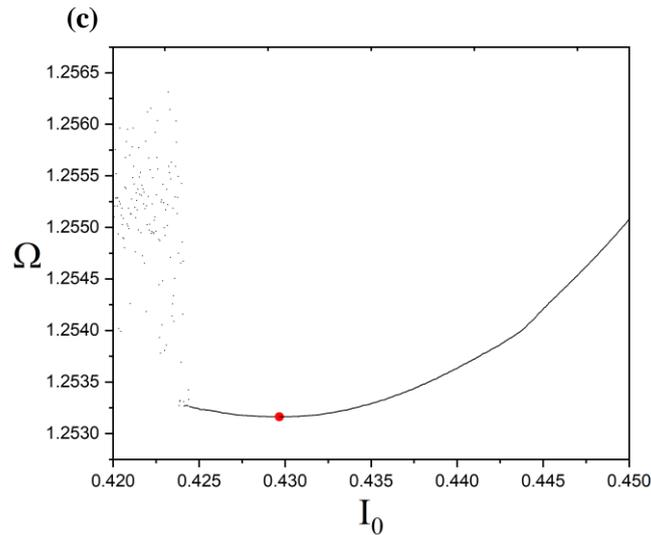
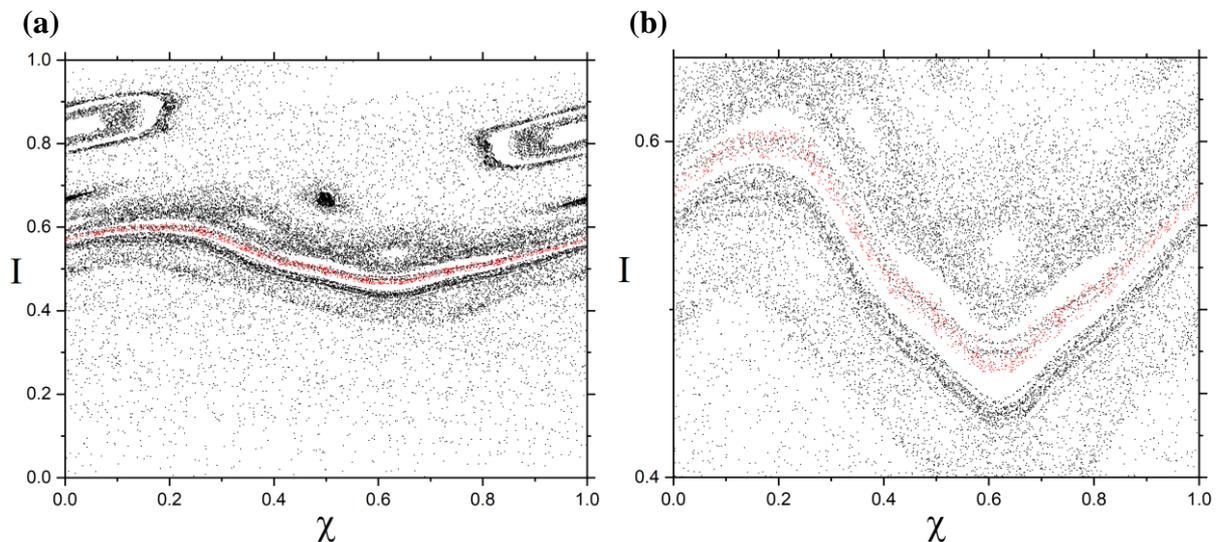


Figura 11: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -3 \times 10^{-3}$, destacada em vermelho a curva *shearless*. Em (b) uma ampliação do espaço de fases em (a). Em(c) o perfil do número de rotação para os mesmo valores de parâmetros, ponto em vermelho indica a condição inicial sobre a *shearless* $I_0 = 0.42966966966967$.

Aumentando mais ainda α_2 , agora $\alpha_2 = -1 \times 10^{-2}$, a figura 12(a) exibe o espaço de fases com as curvas invariantes e as cadeias de ilhas praticamente destruídas, sendo que os toros invariantes que sobreviveram foram bastante deformados com o aumento da perturbação. Figura 12(b) é uma ampliação do espaços de fases em 12(a) na região próxima da curva *shearless* (em vermelho), nota-se um aumento perceptível da ‘porosidade’ da *shearless*. Ademais, já podemos observar *stickiness* se formando na vizinhança das curvas invariantes *spanings* destruídas e das ressonâncias. Na figura 12(c) mostramos o perfil de número de rotação utilizado para desenhar a curva *shearless* nas figuras 12(a) e 12(b).



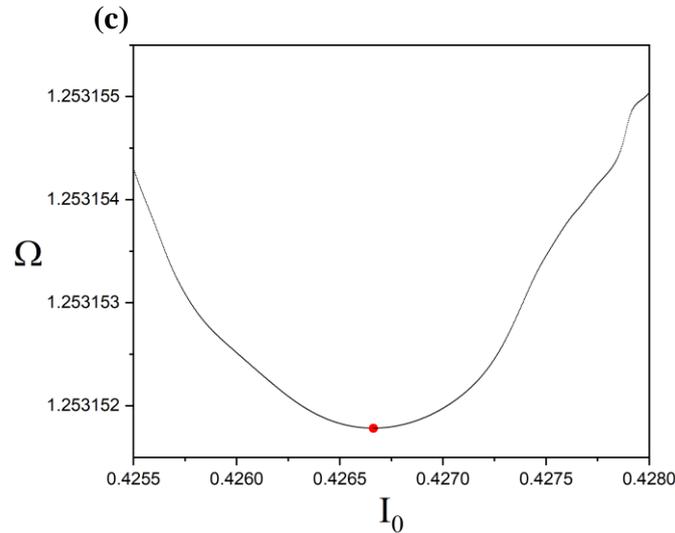


Figura 12: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -1 \times 10^{-2}$, destacada em vermelho a curva *shearless*. Em (b) uma ampliação do espaço de fases em (a). Em (c) o perfil do número de rotação para os mesmos valores de parâmetros, o ponto em vermelho indica a condição inicial sobre a *shearless* $I_0 = 0.426663663663664$.

A partir de $\alpha_2 = -1 \times 10^{-2}$ em diante começa ficar difícil identificar a curva *shearless* através do perfil do número de rotação, pois ele se torna bastante descontínuo, além do que com o aumento significativo do *stickiness* não se consegue mais diferenciar no espaço de fases o que é curva invariante *spannings* ou *stickiness*. A fim de avaliar a quebra da barreira *shearless* em termo da perturbação, calculamos os tempos de recorrência para diferentes valores de α_2 com condições iniciais suficientemente próximas ao mínimo do perfil do número de rotação, figura 12(c), ou seja, condições iniciais próximas de $I = 0.426663663663664$.

Conforme foi brevemente comentado no Capítulo 4 não foi possível obter os pontos indicadores para o mapa de ondas de deriva utilizando o mesmo procedimento para o MPNT [39] em virtude do parâmetro associado com o ângulo (β) ser dependente da coordenada I , dessa forma não satisfaz a condição do mapa ser invariante na translação em I . Logo, a escolha de condições iniciais próximas à curva *shearless* para o cálculo dos tempos de recorrência e não de pontos indicadores se tornou a única opção viável.

Na Tabela 6.1 apresentamos os tempos de recorrência obtidos numericamente para três valores de α_2 . Haja vista os tempos de recorrências de quaisquer que sejam as condições iniciais suficientemente próximas da curva *shearless*, não satisfazem mais a condição de Slater quando $\alpha_2 = -0.01633$, conclui-se que o toro *shearless* foi destruído para esse valor de α_2 . Assim sendo, define-se que este valor de α_2 como sendo o valor crítico para a destruição da

barreira *shearless*. Em termos da topologia do espaço de fases, quando α_2 assume o valor crítico ou superior não há mais curvas invariantes *spannings* presentes na dinâmica.

Tabela 6.1: Tempos de Recorrência para três valores diferentes de α_2 e $\alpha_1 = -0.09423$ fixo. Quando $\alpha_2 = -0.01633$ o toro *shearless* é destruído. As condições iniciais utilizadas para cada valor de α_2 foram $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = 0.5$ e $I = [0.42, 0.43]$.

α_2	Γ_1	Γ_2	Γ_3
-0.01611	4	104	108
-0.01622	4	104	108
-0.01633	4	73	108

A **Figura 13** mostra o espaço de fase (χ, I) , para $\alpha_2 = -0.01633$ (o valor crítico para a *shearless*), retratado em três cores. As cores vermelha e verde representam 2000 iterações para cada uma das 100 condições iniciais acima e abaixo, respectivamente da última condição inicial ($I_0 = 0.42899999999999997$, $\chi_0 = 0.5$) a satisfazer a condição do teorema de Slater, da qual iterações são representadas pela cor preta. Apesar de todas as curvas invariantes *spannings* destruídas, existem ilhas em $I \sim 0.82$ e $I \sim 0.7$ que ainda resistem, sendo as últimas estruturas regulares presentes.

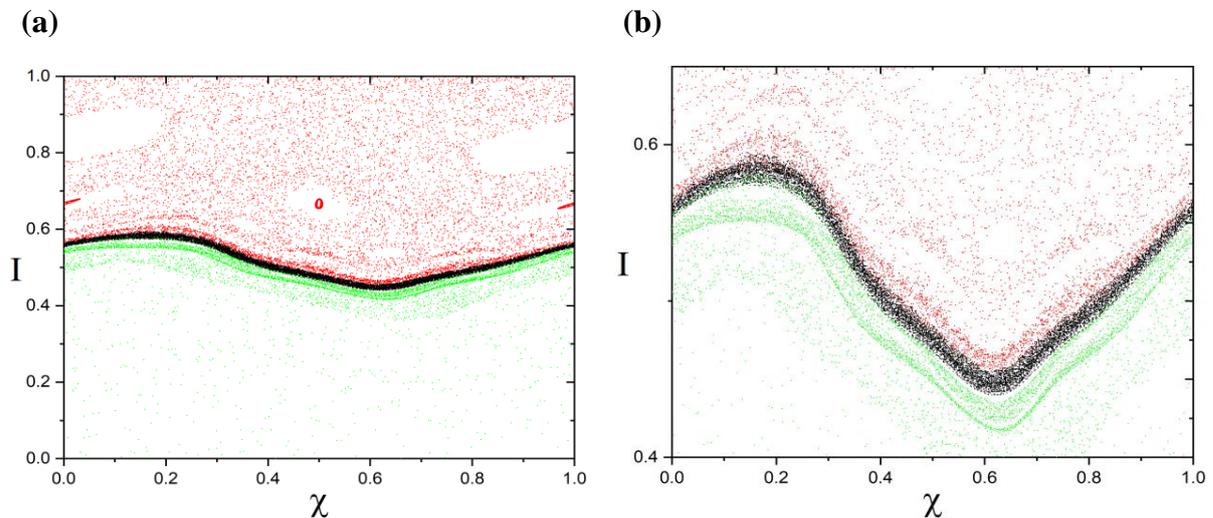


Figura 13: Espaços de fase com $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.01633$ (*bias* 4 Volts), $\varphi_0 = 0.5$ e $\chi_0 \in [0,1]$. Em (a) foram representadas em vermelho as órbitas das condições iniciais $I_0 > 0.42899999999999997$, em verde $I_0 < 0.42899999999999997$ e em preto $(I_0, \chi_0) = (0.42899999999999997; 0.5)$ e Em (b) é apresentada uma ampliação de uma região em (a), mesmo com a destruição do *shearless*, as regiões caóticas parecem não se conectar devido ao *stickiness*.

A figura 13(b) é uma ampliação da figura 13(a) onde observa-se, já no cenário da curva *shearless* destruída, que efeitos de barreira ainda persistem devido ao *stickiness* formado, de maneira que as trajetórias tendem a permanecer provisoriamente nas regiões antes delimitadas e essa região continua bloqueando o transporte no espaço de fases para um grande número de iterações. Semelhante ao MPNT, mesmo após a destruição dos toros invariantes não significou o fim dos efeitos de barreiras no espaço de fases. Porém, ao passo que se aumenta a perturbação, o espaço de fases deixa de apresentar regiões de *stickiness* e transita para um caos global, como mostra a Figura 14 para $\alpha_2 = -0.25$, observa-se que todas as órbitas regulares foram destruídas.

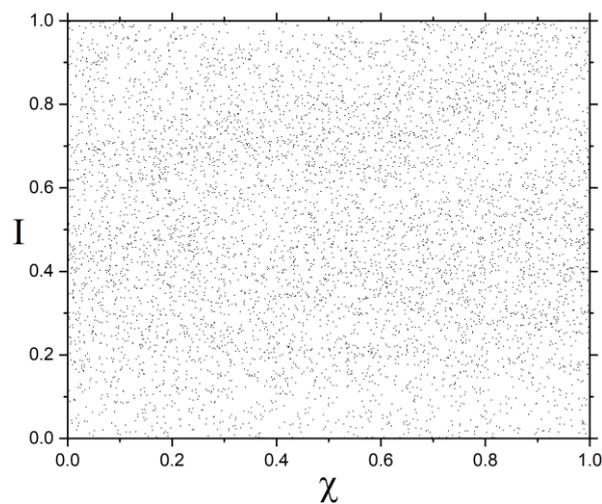


Figura 14: Espaço de fases para $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.25$ com as seguintes condições iniciais $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = [0,1]$ e $I_0 = [0,1]$.

Mais a frente investigaremos a sensibilidade das barreiras de transporte através do espaço dos parâmetros, α_1 e α_2 . Agora iremos apresentar as investigações para o caso do *bias* 8 Volts.

6.4. BIAS 8 VOLTS

Aqui mostraremos os resultados obtidos no estudo do mapa de ondas de deriva com dois modos espaciais para o caso do *bias* 8 Volts. Da mesma maneira que na seção anterior, iremos apresentar as investigações do comportamento das barreiras de transporte, em especial o toro *shearless*, em termo dos parâmetros de controle α_1 e α_2 . A mesma estratégia usada para o *bias* 4 Volts foi adotada aqui, fixamos a amplitude do primeiro modo em $\phi_{M,L} = -10V$ e ao passo que variamos a amplitude do segundo modo $\phi_{M+1,L}$, partindo do zero, desta forma fica destacado o efeito do segundo modo na dinâmica.

Resultados semelhantes foram obtidos para o caso *bias* 8V. Sem a presença do segundo modo na dinâmica, o espaço de fase, figura 15(a), mostra estruturas regulares, curvas invariantes *spannings* e a curva *shearless* destacada em vermelho, dividindo e limitando as órbitas caóticas em duas regiões. O toro *shearless* é facilmente identificado como sendo o mínimo do perfil do número de rotação na figura 15(b). Além das curvas invariantes *spanning* e a *shearless*, observa-se uma cadeia de ilhas nas proximidades de $I \sim 0.82$, enquanto que para a região abaixo das curvas invariantes, observamos a predominância de órbitas caóticas. Por haver apenas barreiras de transporte na região central do espaço de fases, observamos a difusão ilimitada das órbitas caóticas em ambas os sentidos de I .

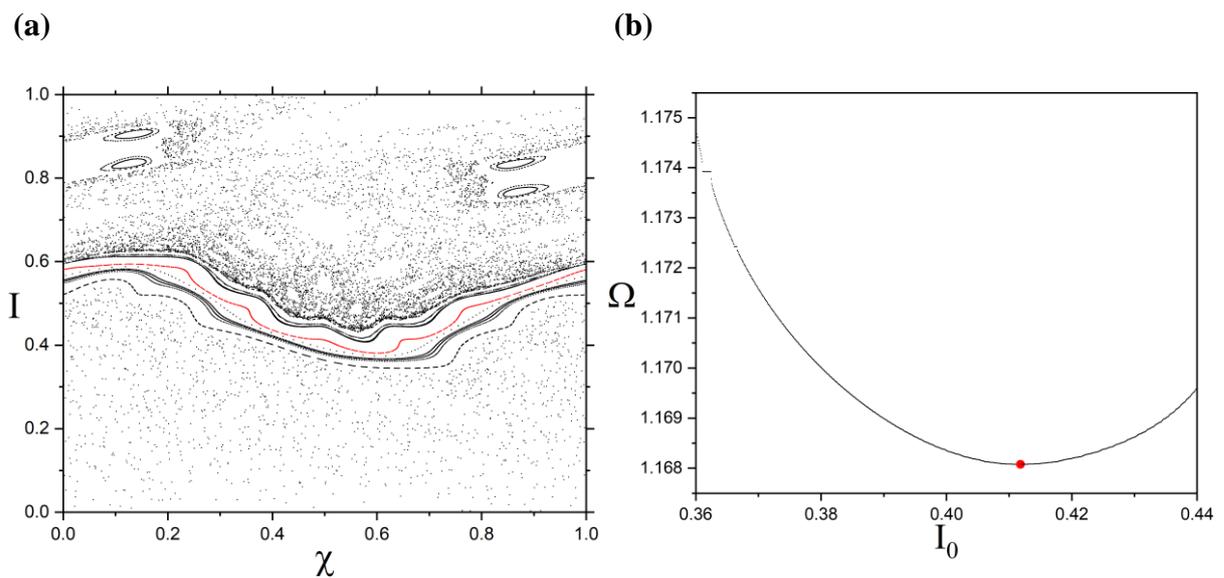


Figura 15: Em (a) o espaço de fase (I, χ) com $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = 0$, para *bias* de 8 Volts. A curva *shearless* está em vermelho. Em (b) O perfil do número de rotação para vários valores de I , o ponto vermelho ($I = 0.4115$, $\Omega = 1.6810$) permite escolher uma condição inicial na curva *shearless* para *bias* de 8 Volts.

Figura 16 apresenta o espaço de fases (I, χ) para $\alpha_1 = -0.09423$ e $\alpha_2 = -1 \times 10^{-3}$. Em comparação com o espaço de fases para $\alpha_2 = 0$, **Figura 15**, observamos a destruição de algumas das curvas invariantes *spannings* presentes na região central do espaço de fases. Além disso, nota-se que as ilhas na região superior sofreram efeitos com o aumento da perturbação e uma região de *stickiness* aparentemente surgiu aos redores das ilhas.

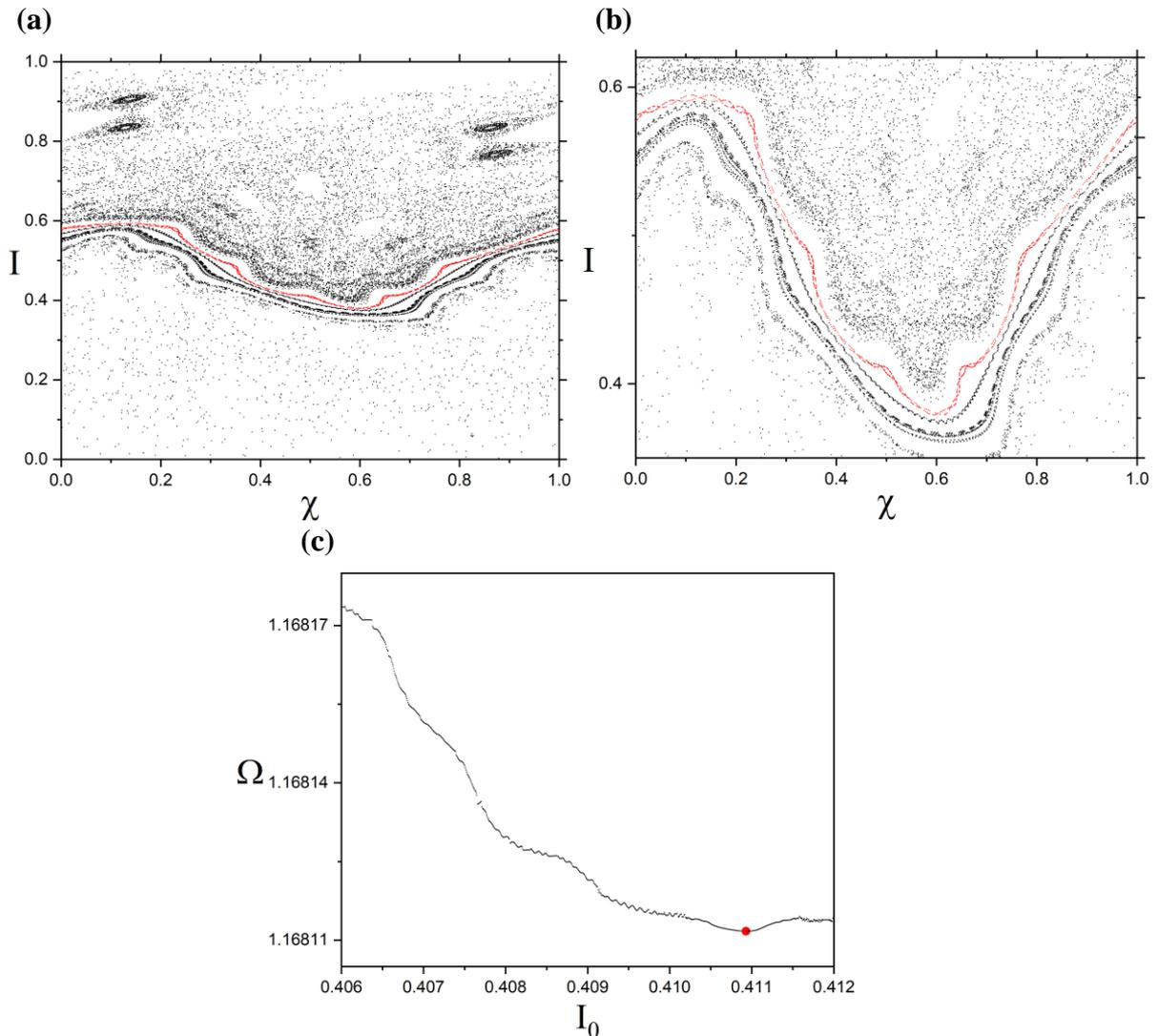


Figura 16: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -3 \times 10^{-3}$, destacada em vermelho a curva *shearless*. Em (b) uma ampliação do espaço de fases de (a). Em (c) o perfil do número de rotação para os mesmos valores de parâmetros, o ponto em vermelho indica a condição inicial sobre a *shearless* $I_0 = 0.42966966966967$.

A figura 16(b), é uma ampliação do espaço de fases da figura 16(a) na região das curvas invariantes. Observa-se que o efeito do segundo modo foi perturbar as curvas invariantes *spannings*, de modo que podemos observar bifurcações ocorrendo na curva *shearless* e a formação de *stickiness* em sua vizinhança. Em figura 16(c) mostramos o perfil do número de rotação utilizado para desenhar a curva *shearless* em figuras 16(a) e 16(b).

Aumentando mais um pouco α_2 , agora $\alpha_2 = -7 \times 10^{-3}$, a figura 17(a) apresenta o espaço de fases com quase todas as órbitas regulares já destruídas, de forma que a região as curvas invariantes *spannings* estavam, o surgimento de *stickiness* impedindo as órbitas caóticas de acessarem todo o espaço de fases. A figura 17(b) é uma ampliação da Figura 17(a), a mesma “porosidade” observada no caso de *bias* 4 Volts, também é vista para 8 Volts para as curvas

invariantes e *shearless*. Novamente, a figura 17(c) mostra o perfil do número de rotação para os mesmos valores de parâmetros, o mínimo identifica a condição usada para iterar a *shearless*, destacado em vermelho, nos espaços de fases figuras 17(a) e 17(b).

A partir de $\alpha_2 = -7 \times 10^{-3}$ em diante fica difícil identificar o toro *shearless* através do número de rotação, na figura 17(c) o perfil é bastante descontínuo e cada vez mais a janela em I para identificar o extremo vai diminuindo, tornando a aferição da presença da curva *shearless* através desse método improdutivo conforme aumenta-se a perturbação. Portanto, novamente foi utilizado cálculos de tempos de recorrência a fim de identificar a destruição dos toros invariantes em termos dos parâmetros de controle do mapa.

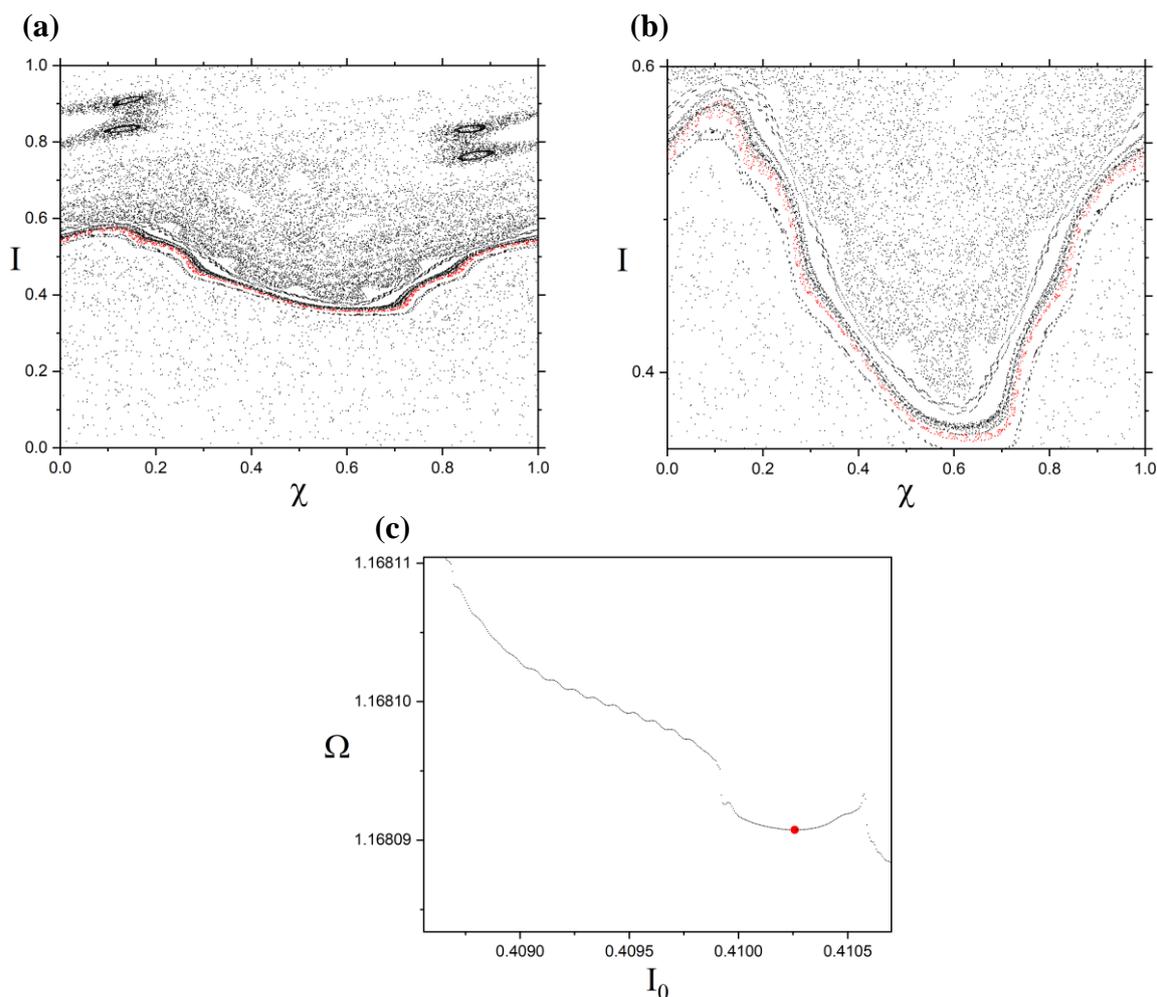


Figura 17: Em (a) espaço de fases para $\alpha_1 = -0,09423$ e $\alpha_2 = -7 \times 10^{-3}$, destacada em vermelho a curva *shearless*. Em (b) uma ampliação do espaço de fases em (a). Em (c) o perfil do número de rotação para os mesmos valores de parâmetros, o ponto em vermelho indica a condição inicial sobre a *shearless* $I_0 = 0.410258258258$.

Como discutido anteriormente, utilizamos condições iniciais suficientemente próximas da última condição que foi possível identificar a curva *shearless* através do perfil do número de

rotação. A **Tabela 6.2** mostra os tempos de recorrência obtidos numericamente para três valores de α_2 . Para $\alpha_2 = -0.01082$, a condição do teorema de Slater não é mais satisfeita, logo a curva *shearless* não existe mais para esse valor. Deste modo, podemos afirmar que este valor de α_2 é o valor crítico para a destruição da barreira *shearless*, ou seja, quando α_2 atinge -0.01082 não existem mais curvas invariantes *spannings* presentes no espaço de fases.

Tabela 6.2: Tempos de Recorrência para três valores diferentes de α_2 e $\alpha_1 = -0.09423$ fixo. Quando $\alpha_2 = -0.01082$ o toro *shearless* é destruído. As condições iniciais utilizadas para cada valor de α_2 foram $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = 0.5$ e $I = [0.39, 0.415]$.

α_2	Γ_1	Γ_2	Γ_3
-0.01061	6	71	77
-0.01071	6	71	77
-0.01082	6	56	71

Idêntico ao caso de *bias* 4V, mesmo com a destruição dos toros invariantes, não significou o fim de efeitos de barreiras no espaço de fases. A **Figura 18** apresenta o espaço de fase (χ, I) , para $\alpha_2 = -0.01082$ (o valor crítico para a *shearless*), usando três cores, vermelho, verde e preto, representando 2000 iterações para cada uma das 100 condições iniciais acima e abaixo da cor preta. Em preto são justamente as iterações para a condição $I_0 = 0.4120000000000001$. É possível observar que apesar de todas as curvas invariantes *spannings* terem sido destruídas, existem ilhas em $I \sim 0.82$ e $I \sim 0.7$ que ainda resistem.

A figura **18(b)** é uma ampliação da figura **18(a)** onde observamos que as órbitas caóticas são limitadas e separadas por uma densidade alta de pontos em preto, vermelho e verde nas proximidades de onde estavam o toro *shearless* e as curvas invariantes *spannings*, evidenciando a existência de barreira de transporte temporária constituídas por uma região de *stickiness*.

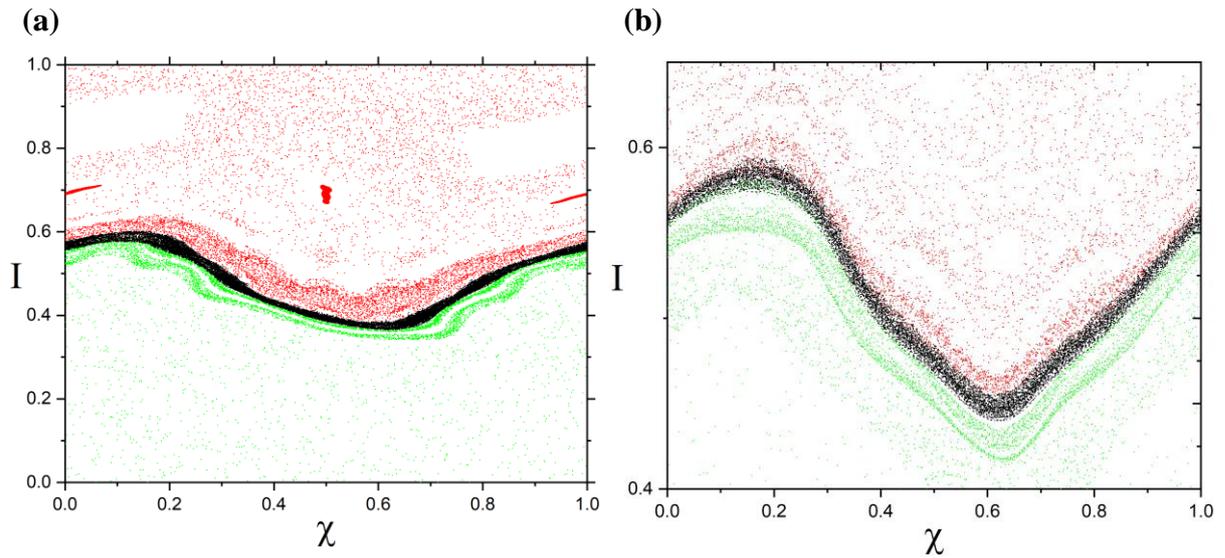


Figura 18: Espaços de fase com $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.01082$ (*bias* 8 Volts), $\varphi_0 = 0.5$ e $\chi_0 \in [0,1]$. Em (a) foram representadas em vermelho as órbitas das condições iniciais $I_0 > 0.4120000000000001$, em verde $I_0 < 0.4120000000000001$ e em preto $I_0 = 0.4120000000000001$. Em (b) é apresentada uma ampliação de uma região em (a), mesmo com a destruição da *shearless*, as regiões caóticas parecem não se conectar devido ao *stickiness*.

Prosseguindo o aumento da perturbação, eventualmente o espaço de fases não apresenta mais regiões de *stickiness* e transita para um caos global, como mostra [Figura 19](#) para $\alpha_2 = -0.25$. Podemos ver que todas as órbitas regulares foram destruídas, identificando o caos global.

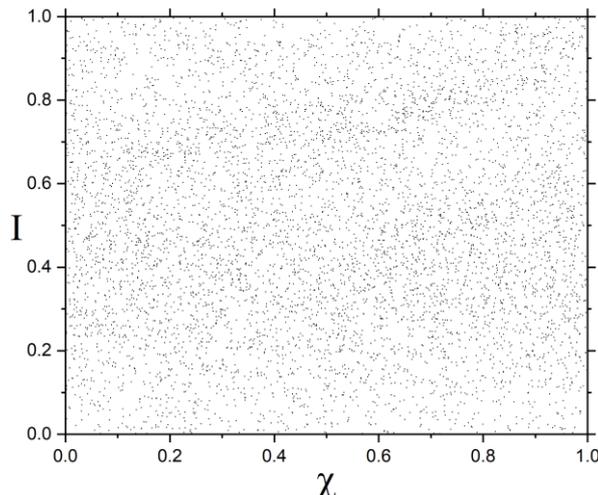


Figura 19: Espaço de fases para $\alpha_1 = -0.09423$, $\alpha_2 = -0.25$ com as seguintes condições iniciais $\varphi_0 = 0.5$, $\chi_0 = [0,1]$ e $I_0 = [0,1]$.

Em linhas gerais, o mapa de ondas de deriva com dois modos apresenta comportamentos semelhantes em termos da sua topologia em comparação com MPNT, de maneira que conforme aumenta-se os parâmetros perturbativos, órbitas regulares são destruídas dando espaço para órbitas caóticas e eventualmente observa-se a destruição da curva *shearless* para uma

combinação de valores dos parâmetros de controle, porem mesmo após sua destruição efeitos de bloqueios continuam existindo na forma de *stickiness* no espaço de fase, como podemos observar em [Figura 13](#) e [Figura 18](#) para ambos os *bias*.

6.5. EFETIVIDADE DAS BARREIRAS DE TRANSPORTE

Até o momento, o estudo do mapa de ondas de deriva com dois modos limitou-se em avaliar o efeito do segundo modo nas barreiras de transporte. Computamos os valores críticos dos parâmetros de controle da destruição da curva *shearless*. Porém mesmo com sua destruição, ainda observamos efeitos de barreira no espaço de fases causado pelo *stickiness*, mas sua intensidade não foi avaliada em termos dos parâmetros. Agora avaliamos numericamente essa robustez através do espaço dos parâmetros (α_2, α_1) , considerando a perturbação causada por ambos os modos, independentemente de qual tipo de barreira está causando o bloqueio, isto é, sejam as curvas invariantes *spannings*, o toro *shearless* ou ainda o *stickiness*.

A [Figura 20](#) mostra os espaços dos parâmetros (α_2, α_1) representados em uma escala de cores, usando as faixas $\alpha_1 \in [-0.25, 0]$ e $\alpha_2 \in [-0.25, 0]$. Esta escolha foi feita após muitas simulações numéricas. Cada intervalo de parâmetro foi variado em passos de 10^{-3} e para cada par α_1 e α_2 , 1000 condições iniciais foram dadas na região caótica. Em seguida, o mapa foi iterado 1×10^6 vezes para cada condição inicial e finalmente foi coletada a razão das condições iniciais das trajetórias que cruzaram a região onde havia barreiras de transporte, para cada par de α_1 e α_2 .

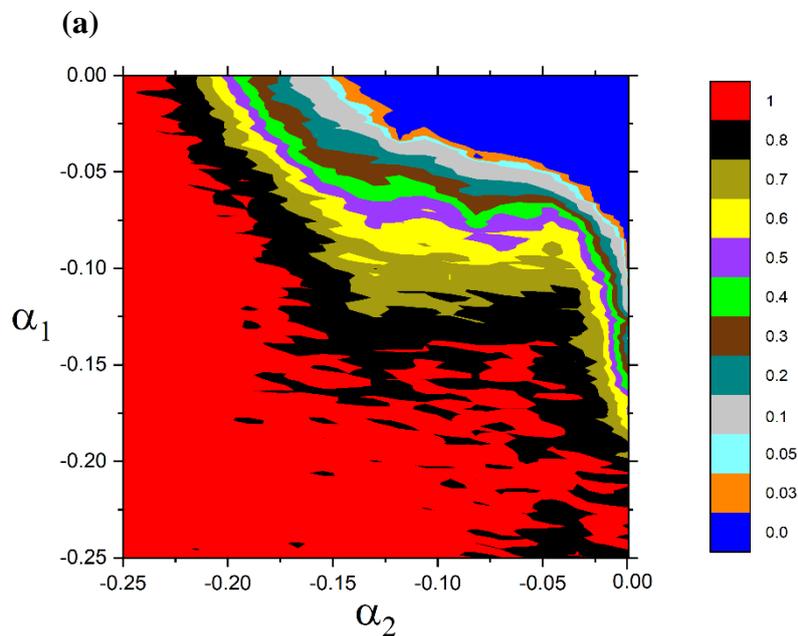
O critério empregado para avaliar se a trajetória de uma condição inicial cruzou a barreira foi constatar que as curvas invariantes *spannings* são limitadas entre $I \sim [0.25, 0.65]$ no espaço de fase, quando $\alpha_2 = 0$. Foi calculado então os tempos de recorrência para uma grade de condições iniciais (I_0, χ_0) e através do teorema de Slater concluímos que o valor máximo que uma curva invariante *spanning* atinge é $I = 0.63245555555556$, enquanto que o valor mínimo que uma curva invariante *spanning* atinge é $I = 0.26423333333333$, para o caso do *bias* 4V. Para *bias* 8V computamos que o valor máximo que uma curva invariante *spanning* atinge é $I = 0.61895555555556$, enquanto que, o valor mínimo que uma curva invariante *spanning* atinge é $I = 0.281444444444445$. Portanto, para uma condição inicial dada $I \geq 0.65$, se sua trajetória atingir $I \leq 0.25$, ou vice-versa, segue-se a região de barreira foi cruzada.

A escala de cores nas figuras [20\(a\)](#) e [20\(b\)](#) representa a razão das condições iniciais que cruzaram a região da barreira de transporte. A cor azul representa que nenhuma condição a cruzou, portanto, robustas barreiras de transporte estão operando no espaço de fases, podendo

elas serem curvas invariantes *spannings*, *shearless* ou talvez *stickiness*. A cor vermelha representa que todas as condições iniciais furaram as barreiras, ou seja, para este cenário nenhuma barreira de transporte resistiu para esta combinação de valores dos parâmetros. As cores intermediárias podem ser interpretadas como as diferentes intensidades do *stickiness*, uma vez que para uma situação em que a razão for diferente de zero certamente nenhuma curva invariante *spanning* está presente, portanto a outra forma de bloqueio possível agindo é o *stickiness*. Então, conforme aumenta a razão das órbitas que superaram o *stickiness* menos intenso é este *stickiness*.

Ambos os espaços de parâmetros apresentados nas figuras 20(a) e 20(b) são qualitativamente semelhantes no sentido que a distribuição das cores são similares para os intervalos de α_1 e α_2 apresentados. Verifica-se que para altos valores de parâmetros, em valores absolutos, mais e mais condições iniciais estão cruzando as barreiras, pois a cor vermelha é dominante em ambos os espaços de parâmetros. Em síntese, o aumento dos valores dos parâmetros, em módulo, leva a uma diminuição da eficiência das barreiras. Vale destacar que para $\alpha_2 = 0$ na Figura 20; é o caso particular para o mapa de ondas de deriva com um modo espacial dominante.

Ainda, foi reportado nas seções anteriores que o efeito imediato do segundo modo é deformar e eventualmente destruir as barreiras de transporte, porem existem cenários representados pela região azul, em que selecionando pares de parâmetros inseridos na região mencionada, robustas barreiras de transporte vão ser encontradas na dinâmica.



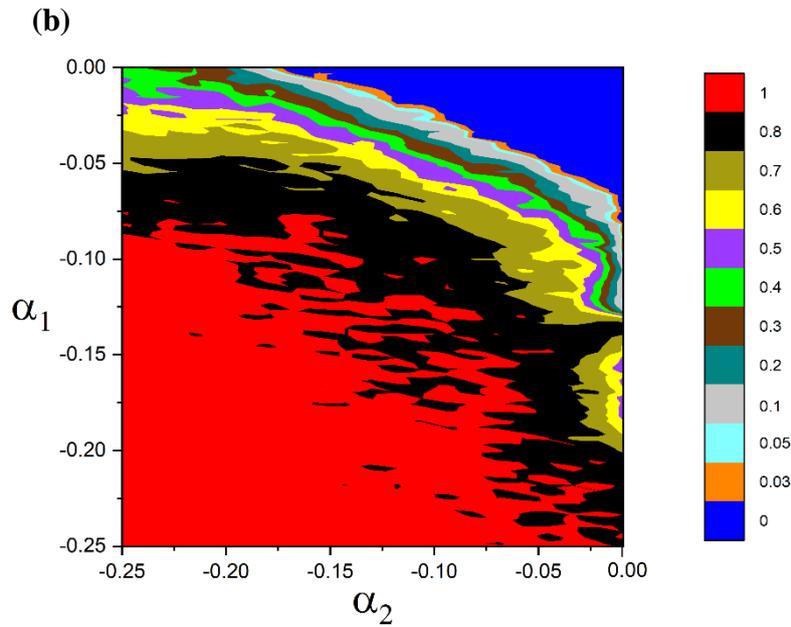


Figura 20: Espaço de parâmetros (α_2, α_1) , representados em uma escala de cores representando a razão das condições iniciais que cruzaram a posição da barreira de transporte. A cor roxo significa que a barreira ainda está atuando, enquanto não existe para a região vinho. As condições iniciais utilizadas foram, $I_0 = [0.65, 1.0]$, $\chi_0 = [0, 1]$ e $\varphi_0 = 0.5$. **(a)** caso de *bias* de 4 Volts; **(b)** caso de *bias* de 8 Volts.

Figuras **21(a)** e **21(b)** são uma ampliação dos espaços dos parâmetros (α_2, α_1) em **Figura 20** dos *bias* 4 e 8 Volts, respectivamente, com a mesma escala de cores. Em figuras **21(a)** e **21(b)**, dois pares de parâmetros estão destacados: um pelo quadrado verde e outro pelo círculo vermelho. O quadrado verde representa os valores críticos dos parâmetros de controle da destruição da curva *shearless*, enquanto o círculo vermelho representa o par dos parâmetros anterior ao valor crítico, valores estes apresentados em **Tabela 6.1** e **Tabela 6.2**. Portanto, conforme **Tabela 6.1**, o quadrado verde e o círculo vermelho em figura **21(a)** equivalem respectivamente a $(\alpha_2, \alpha_1) = (-0.01633, -0.09423)$ e $(\alpha_2, \alpha_1) = (-0.01622, -0.09423)$. Já na figura **21(b)**, o quadrado verde e o círculo vermelho equivalem respectivamente $(\alpha_2, \alpha_1) = (-0.01082, -0.09423)$ e $(\alpha_2, \alpha_1) = (-0.01071, -0.09423)$, de acordo com **Tabela 6.2**.

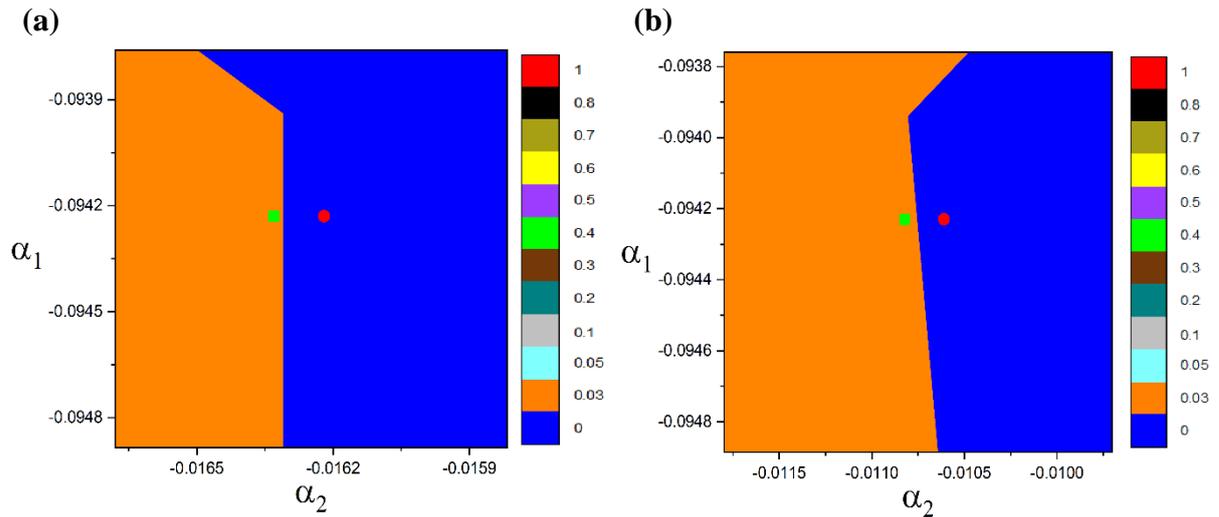


Figura 21: Espaço de parâmetros (α_2, α_1) . Representados para a mesma escala de cores da [Figura 20](#) representando a razão das condições iniciais que cruzaram a posição da barreira de transporte. Em **(a)** caso do *bias* de 4 Volts. Em **(b)** caso do *bias* de 8 Volts. Os pontos em vermelho e verde representam os pares de parâmetros anterior e crítico para a destruição da curva *shearless*, respectivamente, de acordo com as [Tabela 6.1](#) e [Tabela 6.2](#).

Para ambos os *bias*, o cenário em que a curva *shearless* resiste, representado pelo círculo vermelho estão localizados na escala de cores na região azul, ou seja, nenhuma trajetória ultrapassou a barreira, confirmando que para essa combinação de parâmetros uma resistente barreira de transporte se encontra no espaço de fases. Enquanto para o conjunto de valores críticos da *shearless* (quadrado verde), de acordo com a escala de cores, 3% das condições furaram o bloqueio, constatando que para essa combinação de valores de parâmetro nenhuma curva invariante *spanning* sobreviveu, até mesmo a *shearless*. Logo, com o auxílio do espaço dos parâmetros podemos afirmar que a utilização dos tempos de recorrência a fim de avaliar a destruição da curva *shearless*, até mesmo com o desconhecimento dos pontos indicadores, é uma ferramenta numérica aparentemente eficaz.

7. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi introduzir um segundo modo em um mapa de ondas de deriva para o Texas Helimak, com a finalidade de investigar a influência do segundo modo sobre a dinâmica do transporte de partículas no plasma confinado. O mapa obtido consiste em três coordenadas (I, χ, φ) , possuindo quatro parâmetros de controle adimensionais: $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ e γ relacionados às grandezas físicas do sistema. Os parâmetros α_1 e α_2 são proporcionais à amplitude da perturbação, β é dependente do perfil radial do campo elétrico de equilíbrio, que é alterado pelo *bias* e γ é proporcional à velocidade de deriva do plasma confinado.

Os parâmetros do mapa foram estimados utilizando dados experimentais obtidos em trabalhos recentes, com a ressalva as amplitudes das ondas para os parâmetros α_1 e α_2 que foram escolhidas de forma a promover o estudo da influência do segundo modo. Os valores de *bias* utilizados nesse trabalho foram 4 e 8 V e com isso definiu-se a configuração do campo elétrico para esses valores *bias*. O estudo do mapa foi feito através da variação das amplitudes dos parâmetros α_1 e α_2 , analisando as principais características dos espaços de fases em termos do segundo modo.

A aproximação radial do campo elétrico de equilíbrio adquiri um papel muito importante no desenvolvimento do trabalho, de forma que para aproximações radiais não monotônicas o mapa com dois modos não mais satisfaz a condição *twist*, acarretando o perfil do número de rotação apresentar extremos, o que implica na presença da curva *shearless*. Ela é importante para o estudo de barreira de transporte, pois em sistemas não *twist* é a última curva invariante *spanning* a ser destruída conforme o aumento da perturbação. Desta forma, sua presença está relacionada difusão das órbitas uma vez que divide o espaço de fases em duas regiões: órbitas com condições abaixo da *shearless* não acessam a região do espaço de fases acima e vice-versa, ou seja, impede que as órbitas caóticas acessem todo o espaço de fases. Como o objetivo do trabalho foi avaliar o efeito do segundo modo nas barreiras de transporte, foi utilizada uma aproximação quadrática para o perfil do campo elétrico de equilíbrio, para dessa forma garantir a presença do toro *shearless* na dinâmica.

Apesar do mapa possuir três coordenadas, as investigações do efeito do segundo modo foram apresentadas na projeção (I, χ) do espaço de fases, isso porque constatamos que os resultados mais significativos ocorrem quando analisamos a dinâmica na projeção (I, χ) . A constatação da curva *shearless* se manifestando “apenas” no plano facilitou o estudo da

influência do segundo modo, uma vez que as investigações anteriores sobre as barreiras de transporte com um modo foram realizadas no plano (χ, I) , desta forma a comparação fica direta conforme a contribuição do segundo modo vai sendo introduzida no sistema. A estratégia empregada para destacar a ação do segundo modo foi fixar a amplitude do primeiro modo $\phi_{M,L}$, assim o parâmetro α_1 assume valor constante e variar gradualmente a amplitude do segundo modo $\phi_{M+1,L}$, ou seja, variar α_2 , para ambos os *bias*. A amplitude $\phi_{M,L}$ assumiu valor idêntico ao trabalho de [11,12], desta forma criamos um ponto de referência para quando introduzimos o segundo modo no sistema.

Com a violação da condição *twist*, a curva *shearless* se faz presente no espaço de fases e para avaliar seu comportamento, a identificamos para o segundo modo “desligado”, isto é, $\alpha_2 = 0$, através do perfil do número de rotação. Quando acionado o segundo modo, e conforme aumenta-se sua amplitude, o toro *shearless* sofre deformações e até bifurcações. Posto que sua destruição está relacionada com a transição para o caos global em sistemas não *twist*, se faz necessário encontrar o conjunto de parâmetros da quebra da curva *shearless* no estudo do transporte.

Um método numérico para determinar a quebra da *shearless* foi baseado no teorema de Slater calculando-se os tempos de recorrência. No entanto, sua aplicação não ocorreu de forma direta, em razão do mapa de ondas de deriva não possuir simetria espacial que permite obter pontos indicadores logo, para o cálculo dos tempos de recorrência da curva *shearless* utilizamos condições suficientemente próximas a ela. Sendo assim, computamos os valores críticos dos parâmetros relacionados aos modos com qual a curva *shearless* é destruída, para ambos os *bias*. Entretanto, constatamos que mesmo após a destruição da *shearless* observa-se a formação de *stickiness* nas regiões onde anteriormente estava localizada a *shearless*, estendendo o efeito de barreira para cenários em que não existem curvas invariantes *spanings* no espaço de fases. Portanto, o mapa de ondas de deriva com dois modos apresenta efeitos de barreiras de transporte que não estão ligados unicamente a presença de curvas invariantes *spannings* no espaço de fases. Prosseguindo o aumento das amplitudes dos parâmetros de controle, eventualmente o efeito de *stickiness* é destruído e as órbitas podem se difundirem pelo espaço de fases.

Em seguida, para ambos os *bias*, avaliamos a sensibilidade das barreiras de transporte frente à perturbação através do espaço de parâmetros. Representando a razão das órbitas. Em uma escala de cores, que cruzaram as barreiras de transporte, percebe-se que à medida que as amplitudes das ondas aumentam em módulo, a eficiência das barreiras diminui. No entanto,

escolhendo adequadamente as amplitudes das ondas é possível preservar as barreiras de transporte e conseqüentemente ter um melhor confinamento mesmo com dois modos atuando no plasma. Ainda, verificamos através do espaço de parâmetros que o método utilizado para calcular os tempos de recorrência é eficiente, uma vez que a posição dos pares de parâmetros anterior e crítico da curva *shearless* são coerentes à escala de cores apresentadas no espaço de parâmetros.

Por último, este trabalho abre a perspectiva para estudos futuros mais elaborados sobre a transição de regime em que espaços de fases para certos conjuntos de valores dos parâmetros apresentam barreira de transporte para um regime em que as barreiras de transporte desaparecem totalmente. Também seria possível estudar o comportamento do mapa para mais de dois modos atuando na dinâmica, com a finalidade de investigar a ação de muitos modos no bloqueio de transporte.

REFERÊNCIAS

- 1 MIYAMOTO, K. *Plasma physics and controlled nuclear fusion*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, v. 38, 2005.
- 2 COWLEY, S. C. The quest for fusion power. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 5, p. 384–386, 2016.
- 3 HORTON, W. Drift waves and transport. *Reviews of Modern Physics*., 1999. 735-778.
- 4 HIDALGO, C. On the nature of transport in fusion plasmas. *Astrophysics and Space Science*, 292, 2004. 681-690.
- 5 HORTON, W. et al. Drift wave instability in the Helimak experiment. *Physics of Plasmas*, 13, 2006.
- 6 TOUFEN, D. L. 2012. *Controle da Turbulência em Plasmas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada.
- 7 TOUFEN, D. L. et al. Turbulence driven particle transport in Texas Helimak. *Physics of Plasmas*, 19, 2012.
- 8 TOUFEN, D. L. et al. Analysis of the influence of external biasing on Texas Helimak turbulence. *Physics of Plasmas*, 20, 2013.
- 9 HORTON, W. et al. Drift wave test particle transport in reversed shear profile. *Physics of Plasmas*, 5, 1998.
- 10 HUGILL, J. Transport in tokamaks—a review of experiment. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 23, n. 3, p. 331, 1983.
- 11 FERRO, R. M., CALDAS, I. L. Internal transport barriers in plasmas with reversed plasma flow. *Physics Letters A*, 15, 382, 2018.
- 12 FERRO, R. M. 2016. *Transporte de Partículas no Texas Helimak*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada.
- 13 OSORIO, L. et al. Onset of internal transport barriers in tokamaks. *Physics of Plasmas*, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 8, p. 082305, 2021.
- 14 DEL CASTILLO-NEGRETE, D.; GREENE, J. M.; MORRISON, P. J. Area preserving non-twist maps: periodics orbits and transition to chaos. *Physica D*, 91, 1996. 1-23.

- 15** NISHIKAWA, K.; WAKATANI, M.; WAKATANI, M. *Plasma physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2000. v. 8.
- 16** BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of Plasma Physics*. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004.
- 17** WESSON, J.; CAMPBELL, D. J. *Tokamaks*. [S.l.]: Oxford university press, 2011. v. 149.
- 18** HUGILL, J. Transport in tokamaks—a review of experiment. *Nuclear Fusion*, IOP Publishing, v. 23, n. 3, p. 331, 1983.
- 19** GENTLE, K. W.; HUANG, H. Texas Helimak. *Plasma Sci. Technol.*, 10, 284, 2008.
- 20** MEISS, J. D. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, v. 64, n. 3, p. 795-846, 1992.
- 21** GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 22** ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 60.
- 23** LEMOS, N. A. *Analytical mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.
- 24** LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 38.
- 25** PERCIVAL, I. e RICHARDS, D. *Introduction to Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- 26** ULLMANN, K. *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicação em Física de Plasmas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada, 1998.
- 27** HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. [S.l.]: Academic press, 2012.
- 28** ALMEIDA, A. M. O. D. *Hamiltonian systems: Chaos and quantization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.
- 29** NELSON FIEDLER-FERRARA, . P. C. D. P. *Caos: uma introdução*. [S.l.]: Blucher, 1994.

- 30** CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 263–379, 1979.
- 31** BOOZER, A. H. Physics of magnetically confined plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, 76(Jan), 1071-1141, 2005.
- 32** SZEZECH, J. D. ; CALDAS, I. L.; LOPES, S.; MORRISON, P. J. e VIANA, R. L.. Effective transport barriers in nontwist maps. *Phys. Rev. E*, 86, 036206, 2012.
- 33** CALDAS, I. L. et al. Nontwist symplectic maps in tokamaks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 17, n. 5, p. 2021–2030, 2012.
- 34** CASTILLO-NEGRETE, D. del; MORRISON, P. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, American Institute of Physics, v. 5, n. 4, p. 948–965, 1993.
- 35** CARVALHO, R. E. de; ALMEIDA, A. O. de. Integrable approximation to the overlap of resonances. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 162, n. 6, p. 457–463, 1992.
- 36** MOSER, J. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, II*, 1-20, 1962.
- 37** SLATER, N. Gaps and steps for the sequence $n\theta \text{ Mod } 1$. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63(4), 1967.
- 38** SHINOHARA, S., e AIZAWA, Y. The Breakup Condition of Shearless KAM Curves in the Quadratic Map. *Progress of Theoretical Physics*, 97, 379-385, 1997.
- 39** SHINOHARA, S., e AIZAWA, Y. Indicators of reconnection processes and transition to global chaos in nontwist maps. *Progress of Theoretical Physics*, 100, 219-233, 1998.
- 40** ZASLAVSKY, G. M.; ZASLAVSKIJ, G. M. Hamiltonian chaos and fractional dynamics. [S.l.]: *Oxford University Press on Demand*, 2005.
- 41** ZASLAVSKY, G. M. Dynamical traps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 168, p. 292-304, 2002.
- 42** PORTELA, J. S. E.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L. e MORRISON, P. J. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *Int. J. Bif. Chaos* 17, 1589, 2007.
- 43** SOUZA, L. F. B.; CARVALHO, R. E. e CALDAS, I. L. Transport barriers for two mode drift wave map. *Physics Letters A*. 444, 2022.

APÊNDICE A - VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO SIMPLÉTICA PARA O MAPA DE ONDAS DE DERIVA COM DOIS MODOS.

Para verificarmos se o mapa é simplético devemos calcular o determinante de sua matriz jacobiana como,

$$j = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \chi_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \varphi_n} \\ \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \chi_n} & \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \varphi_n} \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \chi_n} & \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \varphi_n} \end{pmatrix}$$

Logo, seu determinante $|j|$, fica da seguinte forma,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n) & \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n) \\ -\frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}} & 1 - \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)] & -\frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n) \\ -\frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)] & 1 - \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n) \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n) + \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)]$$

$$+ \frac{3}{4}\beta^2(I_{n+1} + b^2)^{-3}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)](\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n))$$

$$- \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)$$

$$- \frac{1}{2}\beta(I_{n+1} + b^2)^{-\frac{3}{2}}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)]$$

$$- \frac{3}{4}\beta^2(I_{n+1} + b^2)^{-3}[\alpha_1 \cos \chi_n + \alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)](\alpha_2 \cos(\chi_n + \varphi_n)) = 1$$

Como $|j| = 1$, conclui-se que o mapa de ondas de deriva com dois modos é simplético.