



PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Quarto Estudo Dirigido

2º semestre de 2021

Atenção!

- Os estudos dirigidos **podem** ser realizados em **duplas**.
- Apenas os exercícios marcados com **asteriscos** precisam ser **entregues** para avaliação.
- A **resolução** de cada exercício deve **seguir a numeração** indicada em seu enunciado.
- As **resoluções** dos exercícios devem ser **entregues** ao monitor em um **único** arquivo **PDF**.
- Exercícios entregues em **desacordo** com estas regras serão **desconsiderados** na correção.

1. O Rotor Impulsionado

No presente estudo dirigido, estudaremos os sistemas conhecidos como *impulsivos*. Estes sistemas comportam-se como sistemas integráveis em grande parte do tempo e possuem apenas alguns instantes de tempo nos quais não são integráveis. Veremos que este tipo de sistema pode ser descrito por mapeamentos discretizados no tempo, comumente designados apenas por mapas. Também vamos aprender a obter estes mapas e a analisá-los através de um exemplo concreto: o rotor impulsionado (*kicked rotor*).

Considere uma massa m , com carga elétrica q , presa a um ponto fixo no espaço por uma haste de comprimento R , não condutora e com massa desprezível, a qual pode girar livremente (sem atrito) sobre um plano. Considere também que o ponto fixo da haste está localizado na origem do plano de movimento. Além disto, suponha que todo o sistema encontra-se entre duas grandes placas metálicas, as quais constituem um capacitor. Este capacitor, por sua vez, produz um campo elétrico aproximadamente uniforme na região acessível ao movimento do rotor. Em seguida, escolha o eixo coordenado x como paralelo à direção das linhas de campo elétrico e, portanto, temos que $\vec{E} = E(t)\hat{x}$. Note que o campo elétrico possui dependência temporal resultante de variações na carga das placas metálicas. Para um melhor entendimento da estrutura do sistema, veja o esquema apresentado na figura 1.

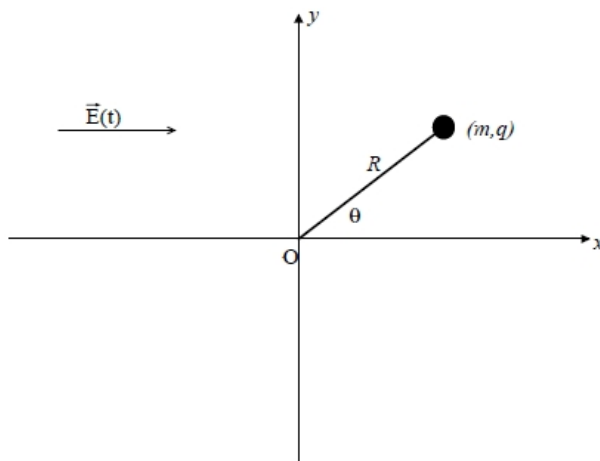


Figura 1: Representação esquemática do rotor impulsionado.

Então, considere que o campo elétrico é nulo na maior parte do tempo, exceto em instantes periodicamente separados por um intervalo temporal τ . Com auxílio da função delta de Dirac, podemos escrever uma expressão para a magnitude deste campo elétrico:

$$E(t) = E_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau). \quad (1)$$

Para simplificar os cálculos, vamos desprezar a influência, sobre a partícula, do campo magnético produzido pela variação temporal do campo elétrico, de acordo com as equações de Maxwell.

1.1 Devido à simetria do rotor, torna-se interessante a utilização de coordenadas polares. Com este intuito, vamos transferir o campo elétrico, e seus efeitos resultantes, para este novo sistema de coordenadas. Primeiramente, mostre que, em coordenadas polares, a força do campo elétrico sobre o rotor pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F}(t) = qE_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau) (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}), \quad (2)$$

onde \hat{r} e $\hat{\theta}$ são, respectivamente, os versores nas direções radial e angular azimutal. Em seguida, utilize a definição da energia potencial

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

para mostrar que, no rotor impulsionado, temos

$$U(\vec{r}) = -qE_0 R \cos\theta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau). \quad (4)$$

Ainda considerando coordenadas polares, temos que a velocidade de uma partícula é dada por

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (5)$$

Então, utilizando que $\dot{r} = 0$ para o rotor impulsionado, mostre que a energia cinética do sistema possui a seguinte expressão:

$$K = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2. \quad (6)$$

Combinando os resultados anteriores, mostre também que a Lagrangeana do rotor impulsionado é igual a

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + qE_0 R \cos\theta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau). \quad (7)$$

1.2 Mostre que o momento generalizado associado à coordenada θ possui a seguinte relação com a velocidade angular $\dot{\theta}$:

$$p = mR^2 \dot{\theta}. \quad (8)$$

Observe que o momento p , conjugado ao ângulo θ , representa o momento angular do rotor. Com o auxílio do resultado anterior, utilize a definição

$$H(p, \theta) = p\dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}) \quad (9)$$

para obter a Hamiltoniana do rotor impulsionado:

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - qE_0R \cos \theta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau). \quad (10)$$

Note que a Hamiltoniana possui um único grau de liberdade, mas possui também dependência explícita no tempo. Há conservação de energia na evolução temporal do sistema? Justifique fisicamente sua resposta. Em seguida, considerando a Hamiltoniana (10), empregue as equações de Hamilton para mostrar que

$$\dot{\theta} = \frac{p}{mR^2} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -qE_0R \sin \theta \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j\tau). \quad (11)$$

1.3 Com o objetivo de resolver as equações de movimento, introduzimos a seguinte notação:

$$\theta_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta(j\tau + \varepsilon) \quad \text{e} \quad p_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(j\tau + \varepsilon). \quad (12)$$

Ou seja, θ_j e p_j são os valores das variáveis canônicas do sistema no instante de tempo imediatamente *posterior* ao j -ésimo pulso do campo elétrico. Analogamente, definimos os valores das variáveis canônicas no instante de tempo imediatamente *anterior* ao j -ésimo pulso do campo elétrico:

$$\theta'_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta(j\tau - \varepsilon) \quad \text{e} \quad p'_j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(j\tau - \varepsilon). \quad (13)$$

Considerando o intervalo de tempo entre dois pulsos do campo elétrico, a integração das equações de movimento torna-se trivial, uma vez que a função delta de Dirac possui valor nulo. Devido a este fato, dizemos que o rotor impulsionado representa um *sistema impulsivo*.

Empregue as equações de movimento, obtidas no exercício **1.2**, para mostrar que

$$\theta'_{j+1} = \theta_j + \frac{\tau p_j}{mR^2} \quad \text{e} \quad p'_{j+1} = p_j. \quad (14)$$

1.4 Agora, vamos integrar as equações de movimento sobre um pulso do campo elétrico. Utilize a propriedade da função delta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (15)$$

para mostrar que

$$\theta_j = \theta'_j \quad \text{e} \quad p_j = p'_j - qE_0R \sin \theta_j. \quad (16)$$

1.5 Empregue os resultados dos dois exercícios anteriores para mostrar que o movimento do rotor impulsionado é descrito pelo seguinte mapa:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \beta p_j, \quad (17a)$$

$$p_{j+1} = p_j - \alpha \sin(\theta_j + \beta p_j). \quad (17b)$$

no qual definimos o parâmetro $\beta = \tau/(mR^2)$, que é proporcional ao período entre os pulsos do campo elétrico, e o parâmetro $\alpha = qE_0R$, que é proporcional à intensidade do impulso fornecido pelo campo elétrico ao rotor.

Com o mapa (17), possuímos uma descrição completa do sistema, pois, dadas as condições iniciais θ_0 e p_0 , podemos obter os valores de θ_j e p_j para todos os valores de j e, conseqüentemente,

poderíamos obter também os valores de $\theta(t)$ e $p(t)$ para todos instantes de tempo. No entanto, vamos restringir nossa análise às variáveis θ_j e p_j , calculadas no tempo discretizado, de maneira a simplificar a apresentação dos resultados.

1.6 O determinante Jacobiano do mapa (17) é definido como

$$J = \frac{\partial(p_{j+1}, \theta_{j+1})}{\partial(p_j, \theta_j)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial p_{j+1}}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial p_j} & \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial \theta_j} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Mostre que, para o mapa do rotor impulsionado, temos $|J| = 1$. Os mapas com determinante unitário são designados como conservativos, devido à propriedade de conservação de áreas sob a dinâmica do sistema. Os mapas com $|J| \neq 1$ são conhecidos como dissipativos. De acordo com esta classificação, o mapa para o rotor impulsionado representa um *mapa bidimensional conservativo a dois parâmetros*.

2. Análise numérica do rotor impulsionado

***2.1** Inicialmente, analisaremos o caso de pulsos com baixa intensidade e espaçados por grandes intervalos de tempo. Com este objetivo, vamos escolher os valores de parâmetros $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$. Além disto, consideraremos que o rotor encontra-se inicialmente em repouso sobre a parte positiva do eixo cartesiano y , ou seja, $\theta_0 = \pi/2$ e $p_0 = 0$. Empregando os parâmetros e as condições iniciais indicadas, realize 100 iterações do mapa (17), ou seja, obtenha numericamente os valores de θ_j e p_j para $j = 1, 2, 3, \dots, 100$. Em seguida, construa os gráficos de $\theta_j \times j$, $p_j \times j$ e $p_j \times \theta_j$. Anexe as figuras obtidas ao seu trabalho.

***2.2** Repita os procedimentos do exercício **2.1** para $\theta_0 = \pi/2$ e $p_0 = 1.0$. Ou seja, construa os gráficos de $\theta_j \times j$, $p_j \times j$ e $p_j \times \theta_j$ para as novas condições iniciais. Anexe as figuras obtidas ao seu trabalho.

***2.3** Os pontos de equilíbrio do mapa (17) são definidos pela seguinte relação:

$$(\theta_{j+1}, p_{j+1}) = (\theta_j, p_j). \quad (19)$$

Utilize a expressão anterior para determinar os pontos de equilíbrio do rotor impulsionado. Discuta o significado físico dos pontos de equilíbrio encontrados. Empregando apenas argumentos físicos (não faça cálculos), classifique os pontos de equilíbrio como instáveis ou estáveis.

***2.4** Observando as figuras dos itens anteriores, note que o plano de fase $p_j \times \theta_j$ possibilita uma análise mais completa do sistema. Por esta razão, construa um gráfico do plano de fase do rotor impulsionado para os parâmetros $\alpha = 0.1$ e $\beta = 1.0$, considerando trajetórias resultantes de diversas condições iniciais distintas. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Identifique no gráfico a localização dos pontos de equilíbrio obtidos no exercício **2.3**.

***2.5** Agora, vamos considerar o caso de pulsos do campo elétrico com alta intensidade e aplicados em curtos intervalos de tempo. Com este objetivo, adotaremos os valores de parâmetros $\alpha = 10.0$ e $\beta = 0.1$. Construa novamente um gráfico no espaço de fase do rotor impulsionado, considerando diversas trajetórias distintas. Anexe a figura resultante ao seu trabalho. Comente os resultados obtidos em comparação com o exercício **2.4**.

***2.6** Finalmente, vamos extrapolar o caso considerado no item anterior, considerando pulsos do campo elétrico com intensidade muito forte, ou seja, utilizaremos os valores de parâmetros $\alpha = 25.0$ e

$\beta = 0.1$. De maneira análoga aos exercícios **2.4** e **2.5**, construa um gráfico das trajetórias no espaço de fase $p_j \times \theta_j$. Anexe a figura resultante ao seu trabalho.

Observe que os valores obtidos de p_j são arbitrariamente grandes, pois o momento angular não está mais limitado por curvas fechadas. Desta maneira, verificamos a presença de *caos global* no sistema.

3. O Mapa Logístico: Um exemplo dissipativo

No exercício anterior, observamos a transição para o caos global. Ou seja, para baixas intensidades do campo elétrico, o rotor impulsionado representa um sistema predominantemente regular. À medida que aumentamos a intensidade dos pulsos do campo elétrico, notamos o aparecimento de regiões caóticas no espaço de fase. Inicialmente, as regiões ocupadas pelo caos estão confinadas por trajetórias regulares. No entanto, para intensidades suficientemente elevadas dos pulsos do campo elétrico, as barreiras regulares são rompidas e o sistema passa a apresentar caos global, no qual as trajetórias podem se afastar arbitrariamente de suas condições iniciais no espaço de fase.

O caos observado no rotor impulsionado é conhecido como *caos Hamiltoniano*, pois ocorre em um sistema conservativo. De maneira distinta, no presente exercício, estudaremos o caso de um mapa dissipativo. Com este escopo, escolheremos o *mapa logístico*, cuja expressão matemática é aparentemente simples, embora a variedade de fenômenos apresentados seja surpreendente.

Podemos utilizar o mapa logístico, por exemplo, para modelar a evolução temporal do número de indivíduos de uma população em um habitat de tamanho limitado. Veremos que, considerando diferentes valores para as condições iniciais e para os parâmetros do sistema, o número de indivíduos na população pode ficar estável ou flutuar indefinidamente de forma regular ou caótica.

Empregaremos a variável x para representar o número de indivíduos na população. Além disto, assumiremos que a quantidade x está normalizada, de maneira que $x = 0$ representa uma população nula, enquanto $x = 1$ corresponde à população máxima. Também vamos supor que o tamanho da população é medido em instantes de tempo discretos, ou seja, o valor de x_j representa a população normalizada durante a j -ésima contagem do número de indivíduos.

O mapa logístico fornece uma previsão para a contagem de indivíduos no instante de tempo $(j + 1)$ em função do resultado no instante de tempo j . Ou seja, podemos representar o mapa logístico por uma função do tipo $x_{j+1} = f(x_j, \alpha)$, na qual α corresponde a um parâmetro constante. O parâmetro α , cujo valor pode ser estimado teoricamente ou experimentalmente, está associado ao ambiente em que a população está inserida.

3.1 O mapa logístico propõe a seguinte função para modelar o crescimento populacional:

$$x_{j+1} = \alpha x_j (1 - x_j).$$

Agora, vamos verificar se este modelo é razoável. Considerando $\alpha = 2$, calcule x_{j+1} para os seguintes valores de x_j : 0.0, 0.2, 0.5, 0.8 e 1.0. Interprete os resultados fisicamente. Estes resultados são razoáveis para um modelo aproximado?

3.2 Mostre que o módulo do determinante Jacobiano do mapa logístico é não-unitário, caracterizando o sistema como dissipativo. Uma vez que o mapa é unidimensional, note que a matriz Jacobiana possui um único elemento, de maneira que $J = \partial x_{j+1} / \partial x_j$;

3.3 Para um determinado valor do parâmetro α e uma população inicial no intervalo $0 < x_0 < 1$, podemos investigar se a população estará estabilizada para um valor de j elevado (longos intervalos de evolução temporal). Uma população estabilizada é definida como uma população cujo número de indivíduos não varia entre duas contagens, ou seja, $x_{j+1} = x_j$. Imponha esta condição sobre o

mapa logístico e mostre a existência de duas soluções para uma população estabilizada:

$$\tilde{x} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{x} = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

A solução trivial, $\tilde{x} = 0$, corresponde a uma população inexistente ou completamente eliminada. A segunda solução, $\bar{x} = 1 - 1/\alpha$, representa uma situação bastante interessante, na qual a população estabilizada possui um número não nulo de indivíduos. Devemos agora analisar se esta segunda solução representa um ponto de equilíbrio estável. Caso contrário, basta uma pequena perturbação para que a população seja desestabilizada.

- 3.4** Para que um mapa unidimensional, $x_{j+1} = f(x_j)$, seja estável em um ponto de equilíbrio \bar{x} , precisamos que ele satisfaça a seguinte condição:

$$\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} < 1.$$

Utilize a condição anterior para mostrar que o ponto de equilíbrio \bar{x} do mapa logístico é estável para $1 < \alpha < 3$. Note que os valores negativos de α devem ser descartados, pois não possuem significado físico.

- *3.5** Como próximo passo, vamos verificar o resultado do item anterior com a utilização de simulações numéricas. Considerando $\alpha = 0.5$, $\alpha = 2.0$, $\alpha = 2.5$ e $\alpha = 3.7$, calcule as trajetórias do mapa logístico para a população inicial $x_0 = 0.1$. Utilize a quantidade de iterações necessárias para uma visualização adequada da trajetória correspondente a cada valor do parâmetro α . Construa os gráficos de x_j , em função de j , e anexe as figuras obtidas ao seu trabalho. Interprete os resultados.
- *3.6** Nos gráficos do item anterior, note que, de maneira geral, o sistema apresenta duas fases distintas em sua evolução temporal. Primeiramente, o sistema passa por uma *fase transitória ou transiente*, que depende da condição inicial escolhida. A duração desta primeira fase depende da “proximidade” entre a condição inicial e o comportamento final do sistema. O comportamento definitivo da população, conhecida como o *atrator* do sistema, depende apenas do parâmetro α , ou seja, o estado final da população representa uma propriedade de seu ambiente. Em geral, o atrator pode assumir a forma de um ponto de equilíbrio, de uma oscilação regular (periódica) ou de uma oscilação caótica (não periódica).

Muitas vezes estamos interessados apenas no atrator de um sistema, mas não em sua fase transiente. Ou seja, queremos saber o comportamento da população a longo prazo, independentemente do tamanho inicial da população. Por esta razão, vamos investigar o comportamento final da população em função do parâmetro α . Isto nos permite saber que tipo de ambiente devemos escolher para alcançar um determinado comportamento final da população.

Com o objetivo de analisar o comportamento final da população, podemos utilizar um *diagrama de bifurcação*. Para a construção deste diagrama, devemos primeiramente escolher um intervalo de parâmetros $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$. Em seguida, dentro do intervalo de parâmetros escolhido, precisamos selecionar um grande número de valores de α igualmente espaçados. Então, para cada valor de α , realizamos a iteração do mapa logístico e descartamos a fase transiente das trajetórias resultantes. Finalmente, construímos um gráfico com as coordenadas x do atrator em função do parâmetro α .

Calcule o diagrama de bifurcação do mapa logístico para $0 \leq \alpha \leq 4$. Anexe a figura resultante ao seu trabalho. Interprete o gráfico. O resultado obtido é compatível com o cálculo do ponto de equilíbrio e sua estabilidade? Justifique.

***3.7** Por fim, vamos analisar detalhadamente o trecho do diagrama de bifurcação no qual aparecem trajetórias caóticas. Repita o procedimento do exercício **3.6** para $3.5 \leq \alpha \leq 4$. Anexe o gráfico resultante ao seu trabalho. Observe que ocorrem “janelas” de comportamento periódico em meio a região caótica. De fato, a região caótica possui comportamento fractal. Portanto, quanto mais ampliarmos nossa resolução no parâmetro α , mais janelas de comportamento periódico, cada vez mais finas e com período mais elevado, podem ser observadas.