

I - Mapas Unidimensionais

Referência Principal: *Chaos*
K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke
Springer (1997)

1- Introdução

- **Sistemas Dinâmicos:** Conjunto de estados possíveis com uma regra de evolução determinística discreta (mapa) ou contínua (equação diferencial).
- **Modelo:** idealização simples, descreve algumas características do processo. Essas características são do processo e não devido às aproximações.

2- Mapas Unidimensionais

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Exemplos:

$$f = 2 x_n$$

$$g = 2 x_n (1 - x_n)$$

n	$f(x_n)$	$g(x_n)$
0	0,0100000000	0,0100000000
3	0,0800000000	0,0746184887
12	40,9600000000	0,5000000000

Construção Gráfica de uma Trajetória

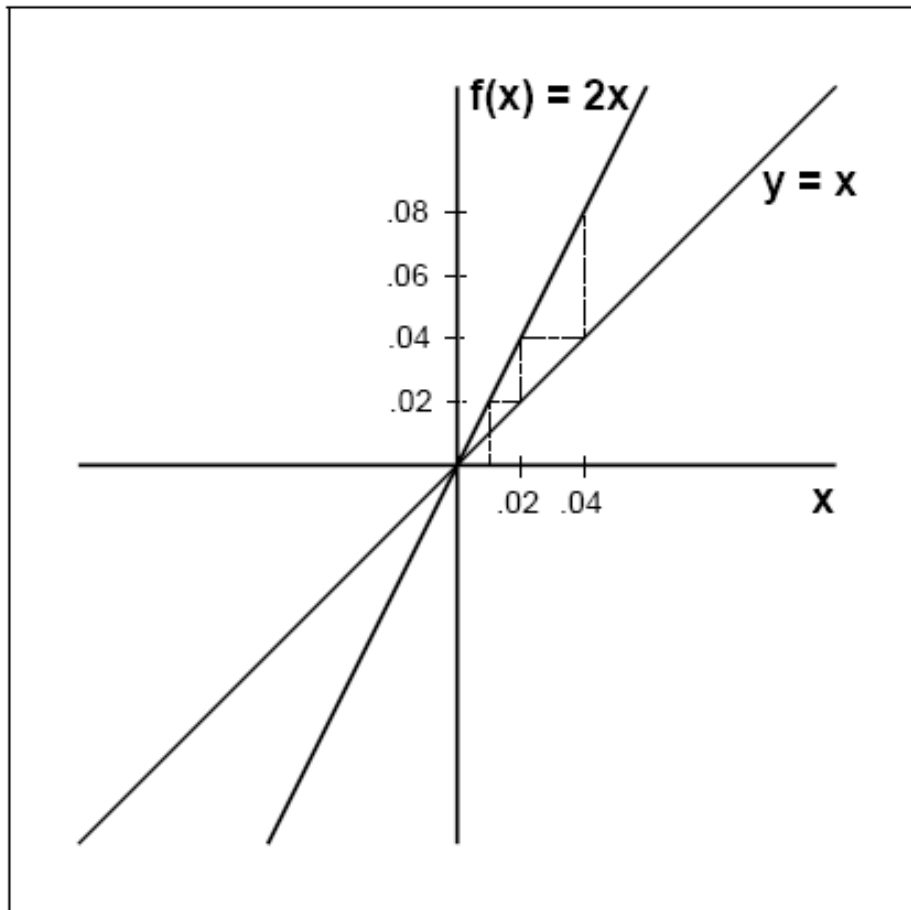


Figure 1.1 An orbit of $f(x) = 2x$.

The dotted line is a cobweb plot, a path that illustrates the production of a trajectory.

Construção Gráfica de uma Trajetória

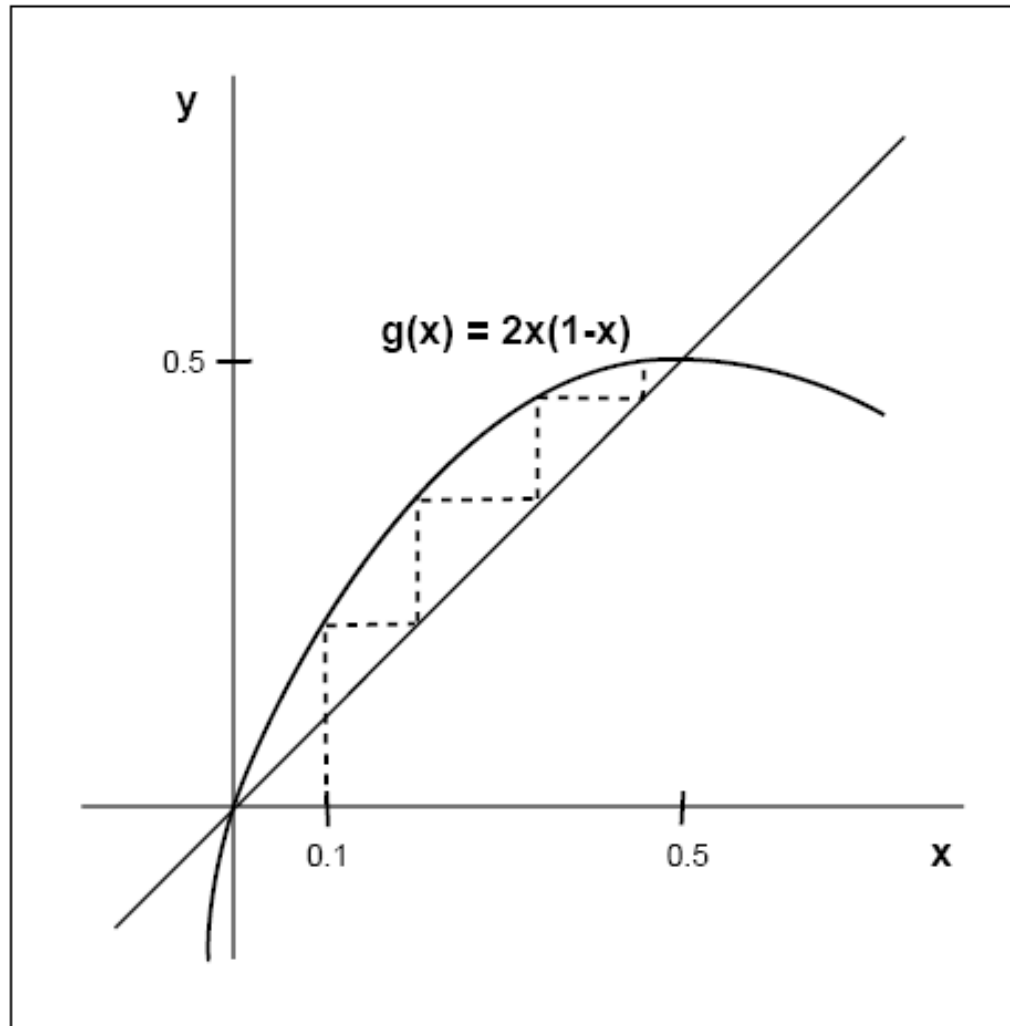


Figure 1.2 A cobweb plot for an orbit of $g(x) = 2x(1 - x)$.
The orbit with initial value .1 converges to the sink at .5.

Órbita / Ponto Fixo

$$\text{Órbita} : \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

x_0 : ponto inicial

$$\text{Ponto fixo } p : f^k(p) = p$$

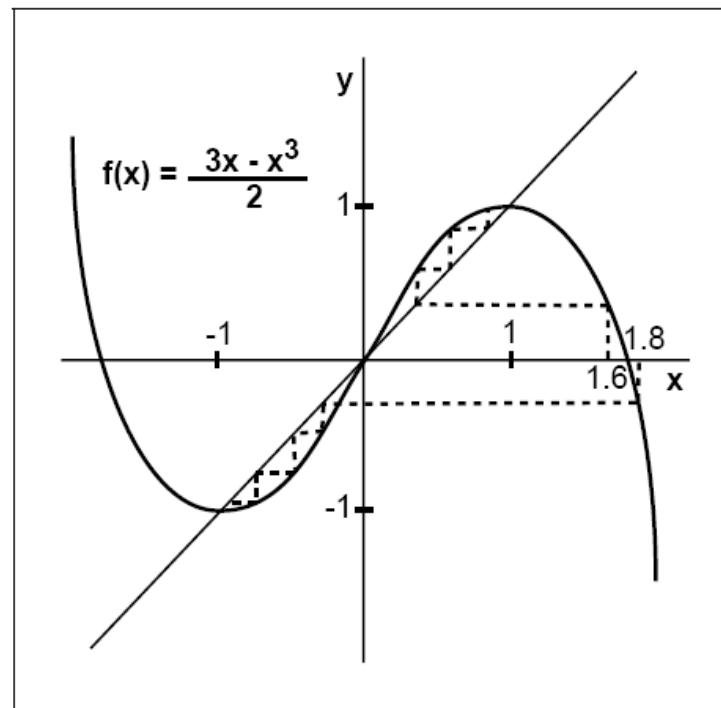
$$\text{Para encontrar o ponto fixo usamos : } x_{n+1} = x_n$$

$$\text{Para o Mapa Logístico, } x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \Rightarrow x_n = 0; 0,5$$

Exemplo

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad f = \frac{3x - x^3}{2}$$

Para obter os pontos fixos : $x = \frac{3x - x^3}{2} \Rightarrow x = 1; 0; -1$



Alligood et al.
Chaos

Figure 1.3 A cobweb plot for two orbits of $f(x) = (3x - x^3)/2$.

The orbit with initial value 1.6 converges to the sink at 1; the orbit with initial value 1.8 converges to the sink at -1.

3- Estabilidade de Pontos Fixos

$N_\varepsilon(p)$: vizinhança ε em torno de $x = p$ ($\varepsilon \cong 0$ e $\varepsilon > 0$)

$$N_\varepsilon(p) \equiv \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \varepsilon\}$$

Ponto fixo de atração :

$$\text{Para } \varepsilon > 0 \text{ e } x \in N_\varepsilon(p) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$$

Ponto fixo de repulsão :

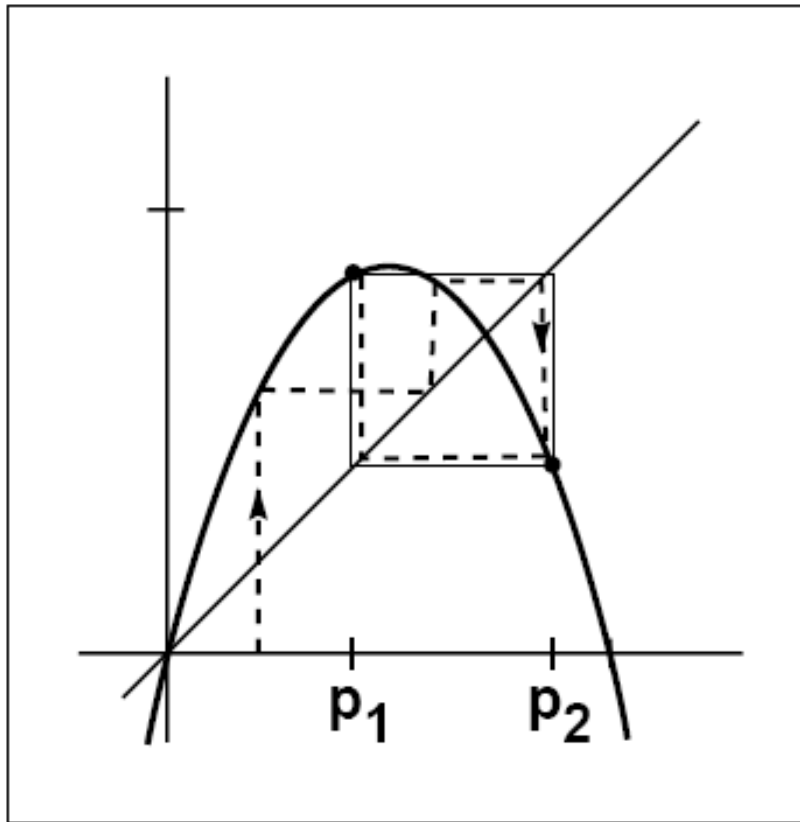
$$\text{Para } \varepsilon > 0 \text{ e } x \in N_\varepsilon(p) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) \notin N_\varepsilon(p)$$

Órbita Estável de Período 2

n	$g^n(x)$	$g^n(x)$	$g^n(x)$
0	0.2000	0.5000	0.9500
1	0.5280	0.8250	0.1568
2	0.8224	0.4764	0.4362
3	0.4820	0.8232	0.8116
4	0.8239	0.4804	0.5047
5	0.4787	0.8237	0.8249
6	0.8235	0.4792	0.4766
7	0.4796	0.8236	0.8232
8	0.8236	0.4795	0.4803
9	0.4794	0.8236	0.8237
10	0.8236	0.4794	0.4792
11	0.4794	0.8236	0.8236
12	0.8236	0.4794	0.4795
13	0.4794	0.8236	0.8236
14	0.8236	0.4794	0.4794

Table 1.2 Three different orbits of the logistic model $g(x) = 3.3x(1 - x)$.
Each approaches a period-2 orbit.

Órbita Estável de Período 2



Alligood et al.
Chaos

Figure 1.4 Orbit converging to a period-two sink.

The dashed lines form a cobweb plot showing an orbit which moves toward the sink orbit $\{p_1, p_2\}$.

Estabilidade de Um Ponto Fixo / Bacia de Atração

Teorema

Seja f um mapa (suave) em $\mathbb{R}$, com um ponto fixo $x = p$

se $|f'(p)| < 1$, p é um ponto fixo estável

se $|f'(p)| > 1$, p é um ponto fixo instável

Bacia de atração :

conjunto das condições iniciais cujas órbitas

convergem para $x = p$

Exemplo

Mapa Logístico $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$

Pontos fixos : $0; 0,5$ *Exemplo* $f(0)=0$ e $f(1)=0$

$f'(0) = 2 > 1 \Rightarrow$ *ponto de repulsão*

$f'(0,5) = 0 < 1 \Rightarrow$ *ponto de atração*

Abacia de atração de $x=0,5$ é o intervalo $0 < x < 1$

Exemplo

$$\text{Mapa } x_{n+1} = \frac{3x - x^3}{2}$$

Pontos fixos: -1 ; 0 ; 1

$f'(0) = 3/2 > 1 \Rightarrow$ ponto de repulsão

$f'(-1) = f'(1) = 0 < 1 \Rightarrow$ ponto de atração

A bacia de atração de $x = 1$ contém os intervalos

$(0, \sqrt{3})$ e $[-2, -\sqrt{3})$ e outros no intervalo $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

4- Pontos periódicos

Mapa Logístico $x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$ $a = 3,3$

Pontos fixos instáveis : $x = 0; 0,696969...$

Órbitas periódicas estáveis com período 2 :

$$f^2(0,4794) = 0,4794 \quad f^2(0,8236) = 0,8236$$

$$f^{2'}(0,4794) = |-0,2904| < 1 \quad f^{2'}(0,8236) < 1$$

Mapa Logístico $x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$ $a = 3,5$

Pontos fixos instáveis:

$$f'(0) = 3.5 \quad f'(5/7) = -1.5 \quad f(0) = 0 \text{ e } f(5/7) = 0$$

Órbita periódica instável com período 2:

$$f^2(3/7) > 1 \quad f^2(6/7) > 1 \quad ff(3/7) = 6/7 \text{ e } ff(6/7) = 3/7$$

Órbitas com período $k > 2$

$$(f^k(p_1))' = f'(p_k) f'(p_{k-1}) \dots f'(p_1)$$

Note que $(f^k(p_i))' = (f^k(p_j))'$

5- Mapa Logístico

$$\text{Mapa Logístico } x_{n+1} = g_a(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

$$\text{Para } 0 < a < 1, \quad \forall x_0 \in 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

$$\text{Para } 1 < a < 3, \quad \forall x_0 \in 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x \rightarrow 0; \frac{a-1}{a}$$

$$g'(0) = a > 1 \Rightarrow \text{ponto de repulsão}$$

$$\left| g'\left(\frac{a-1}{a}\right) \right| = |-a + 2| < 1 \Rightarrow \text{ponto de atração}$$

Para $3 < a < 4$, novas órbitas periódicas
(além das caóticas).

Para $a = 3$ período 1 $\rightarrow$ período 2

Para $a = 3,45$ período 2 $\rightarrow$ período 4

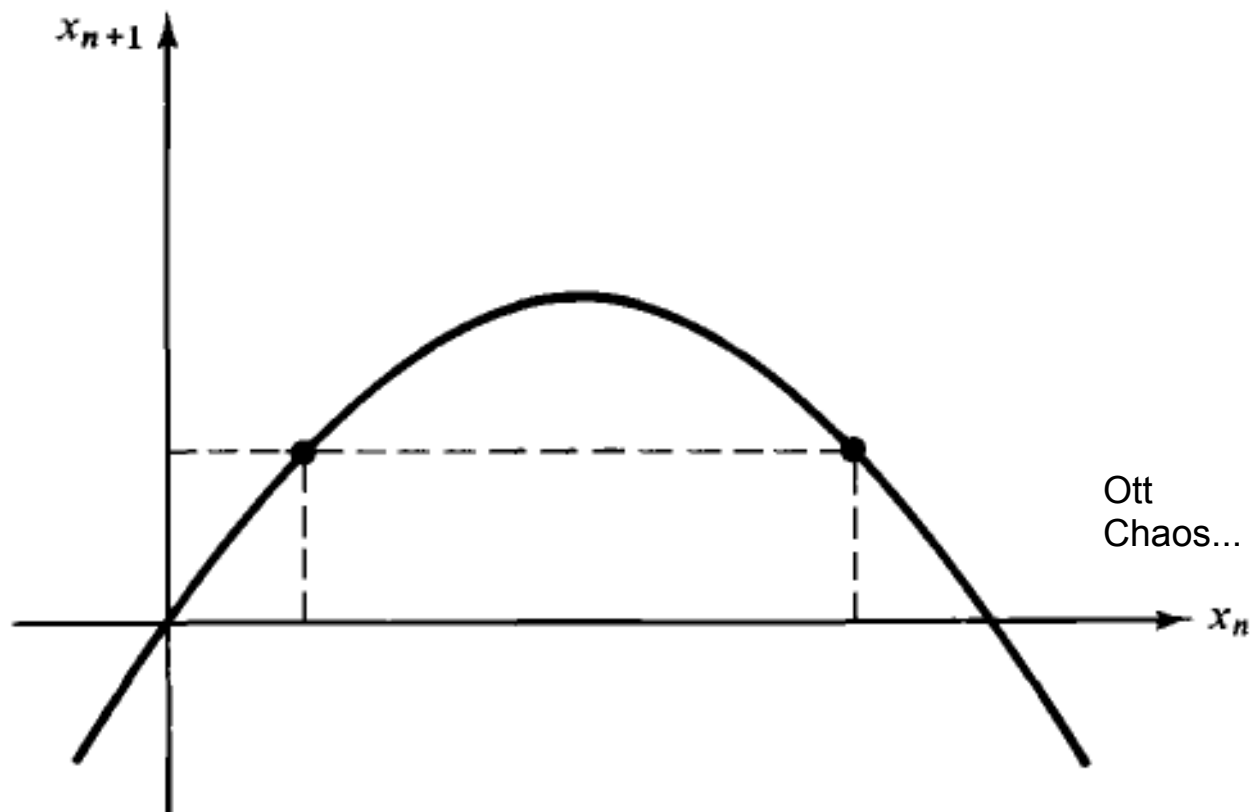
Duplicação de períodos : período 2^n , $n = 1, 2, 3 \dots$

Para $a > 4$, não há atrator ($x \rightarrow \infty$)

Mesmo atrator $\forall x_0$ (para qualquer a)

Numericamente observamos as órbitas estáveis

Não Invertibilidade do Mapa Logístico



Dependência com o Parâmetro de controle

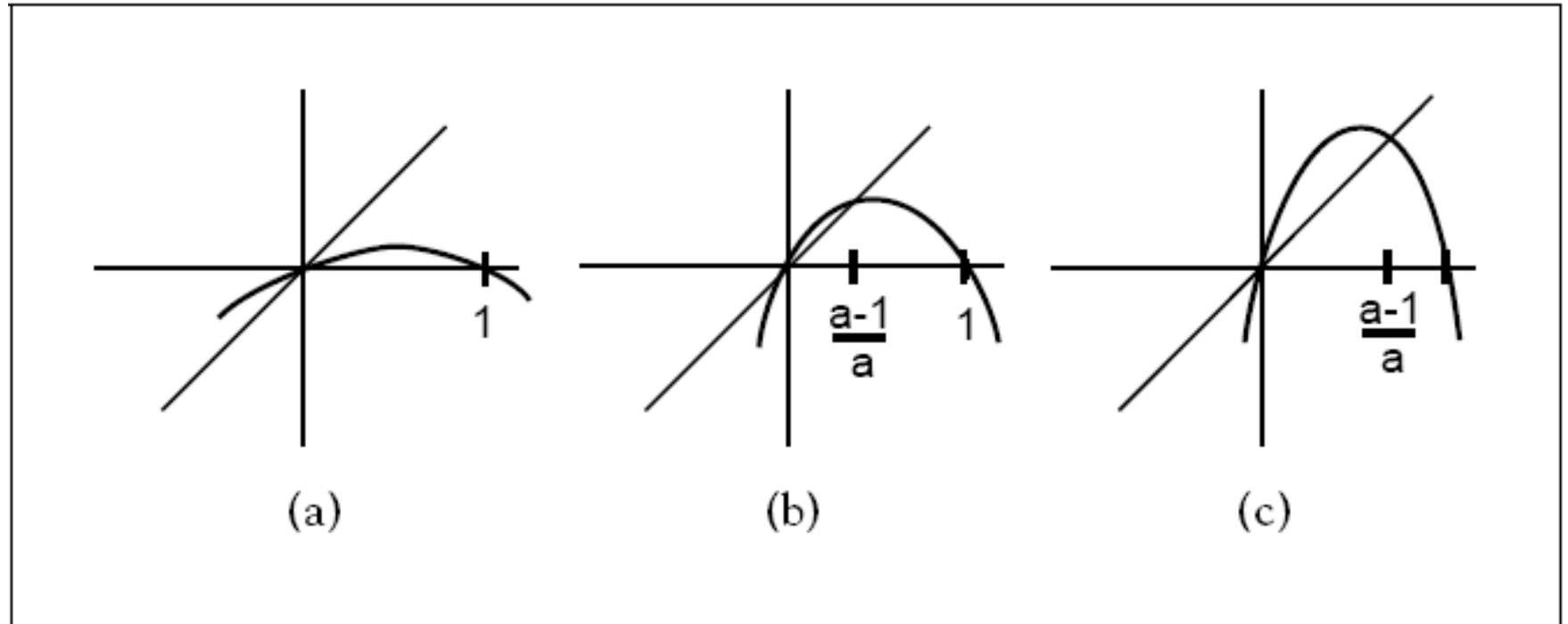


Figure 1.5 The logistic family.

(a) The origin attracts all initial conditions in $[0, 1]$. (b) The fixed point at $(a - 1)/a$ attracts all initial conditions in $(0, 1)$. (c) The fixed point at $(a - 1)/a$ is unstable.

Órbita Caótica

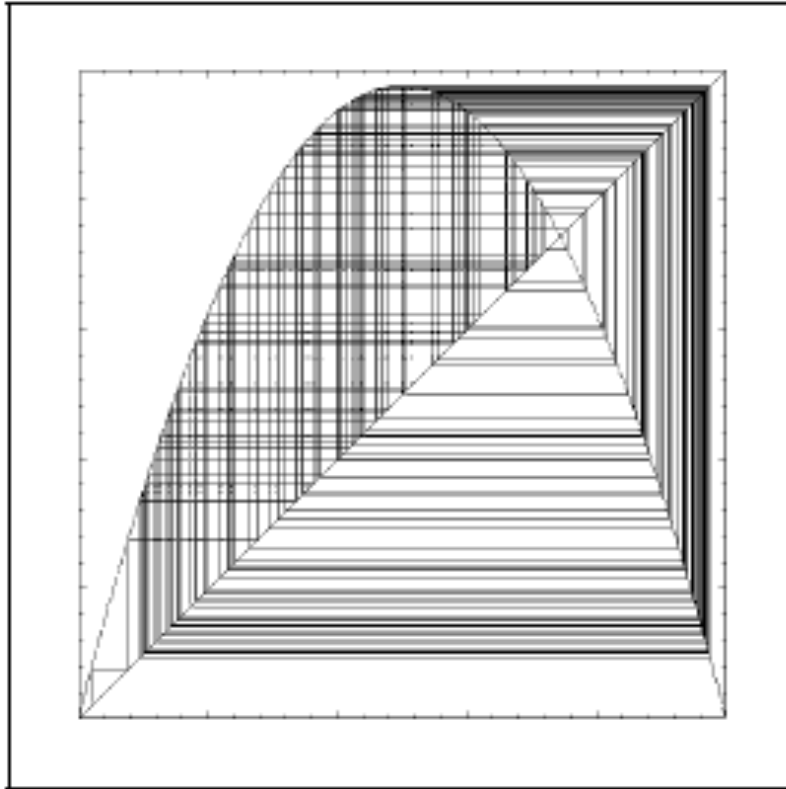


Figure 1.8 Cobweb plot for the logistic map.

A single orbit of the map $g(x) = 3.86x(1 - x)$ shows complicated behavior.

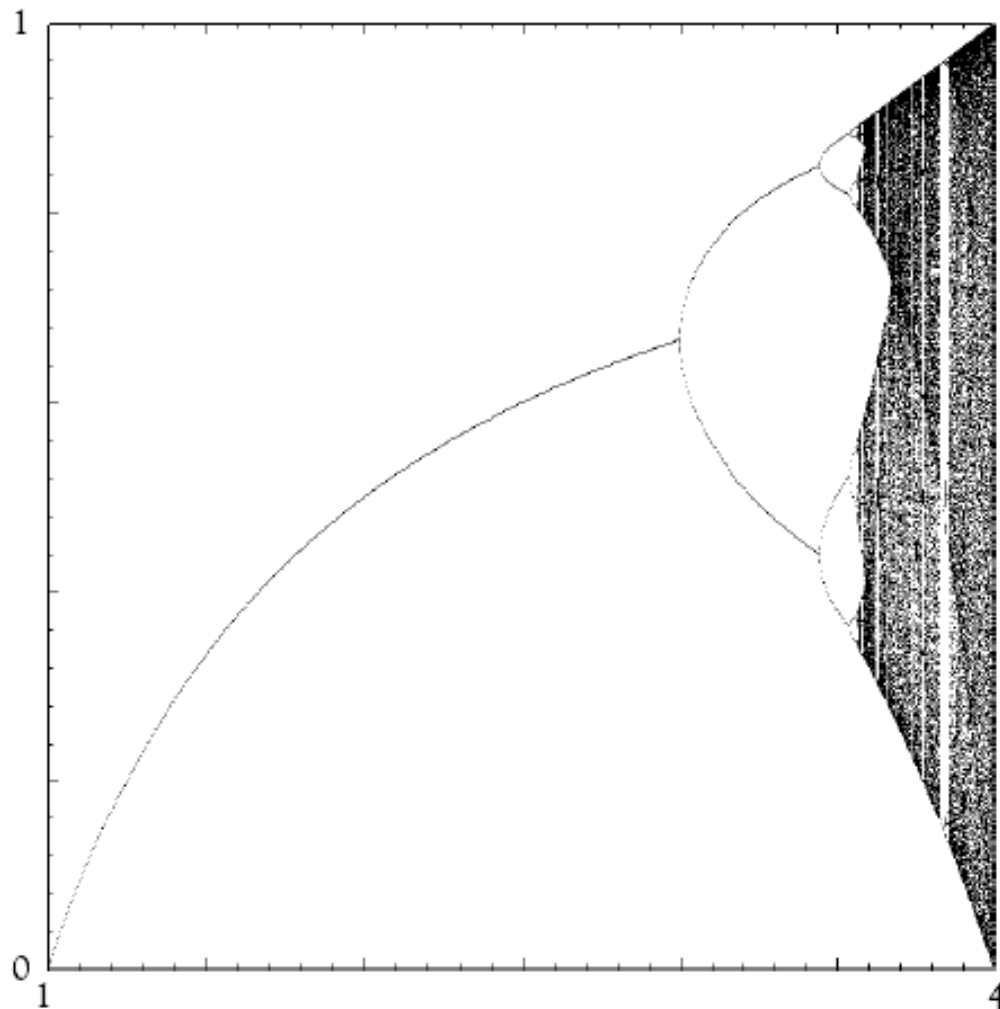


Diagrama de Bifurcação

Figure 1.6 Bifurcation diagram of $g_a(x) = ax(1 - x)$.

The fixed point that exists for small values of a gives way to a period-two orbit at the “bifurcation point” $a = 3$, which in turn leads to more and more complicated orbits for larger values of a . Notice that the fixed point is only plotted while it is a sink. When the period-two orbit appears, the fixed point is no longer plotted because it does not attract orbits. See Lab Visit 12 for laboratory versions.

Alligood et al.
Chaos

Diagramas de Bifurcação Ampliados

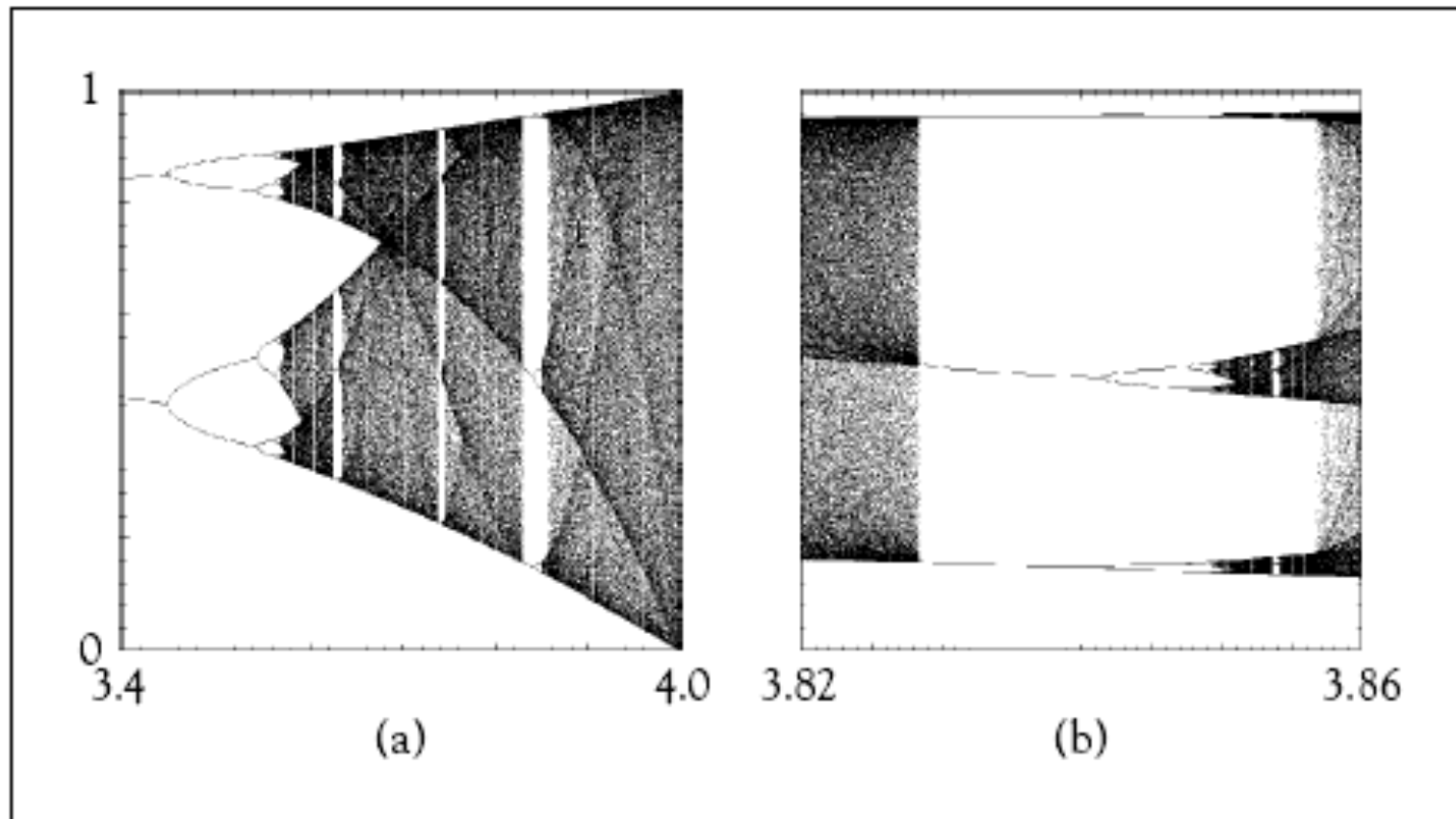


Figure 1.7 Magnifications of the logistic bifurcation diagram.

(a) Horizontal axis is $3.4 \leq a \leq 4.0$ (b) Horizontal axis is $3.82 \leq a \leq 3.86$.

Alligood et al.
Chaos

Mapa Logístico

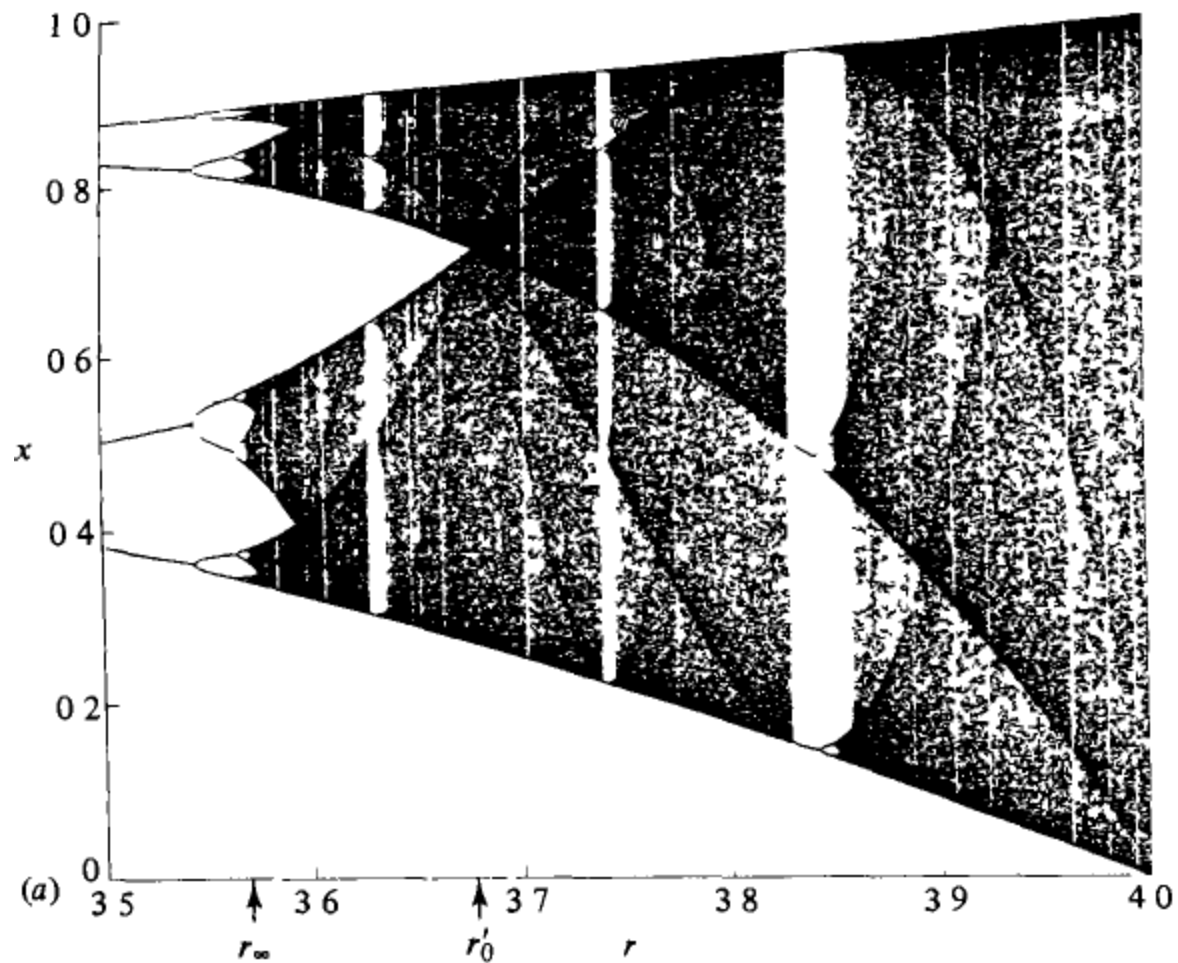


Diagrama de Bifurcação

Ott
Chaos ...

Mapeamento de ordem 3

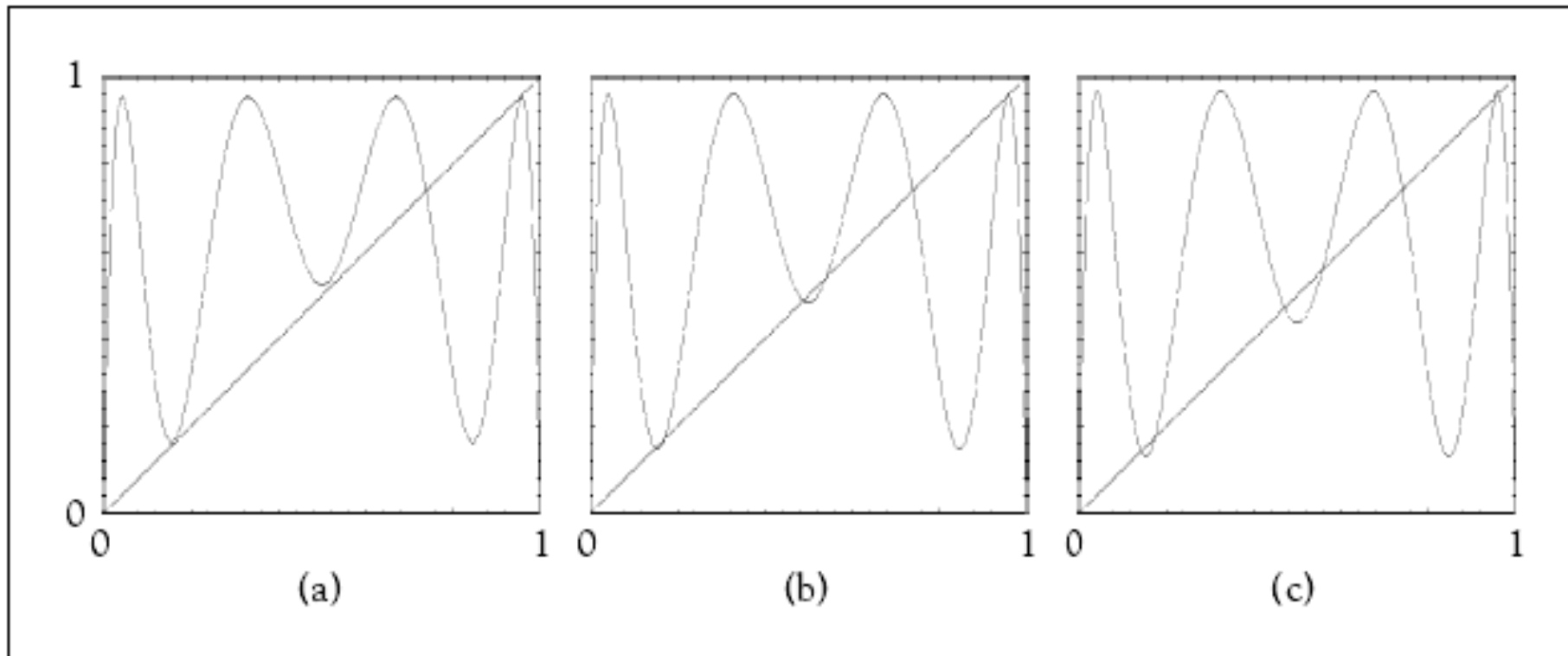


Figure 1.9 Graphs of the third iteration $g^3(x)$ of the logistic map $g_a(x) = ax(1 - x)$.

Three different parameter values are shown: (a) $a = 3.82$ (b) $a = 3.84$ (c) $a = 3.86$.

Alligood et al.
Chaos

Mapeamentos com Ordens Diferentes

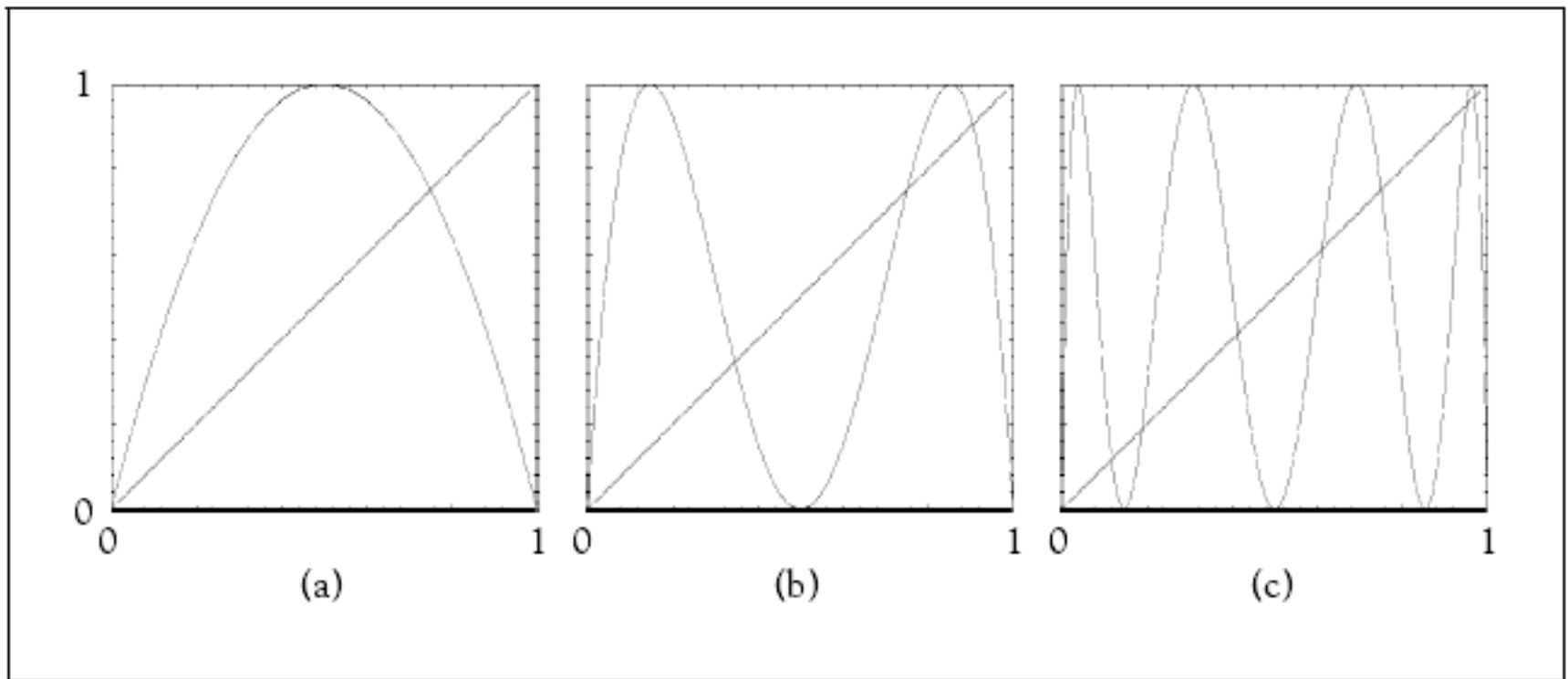


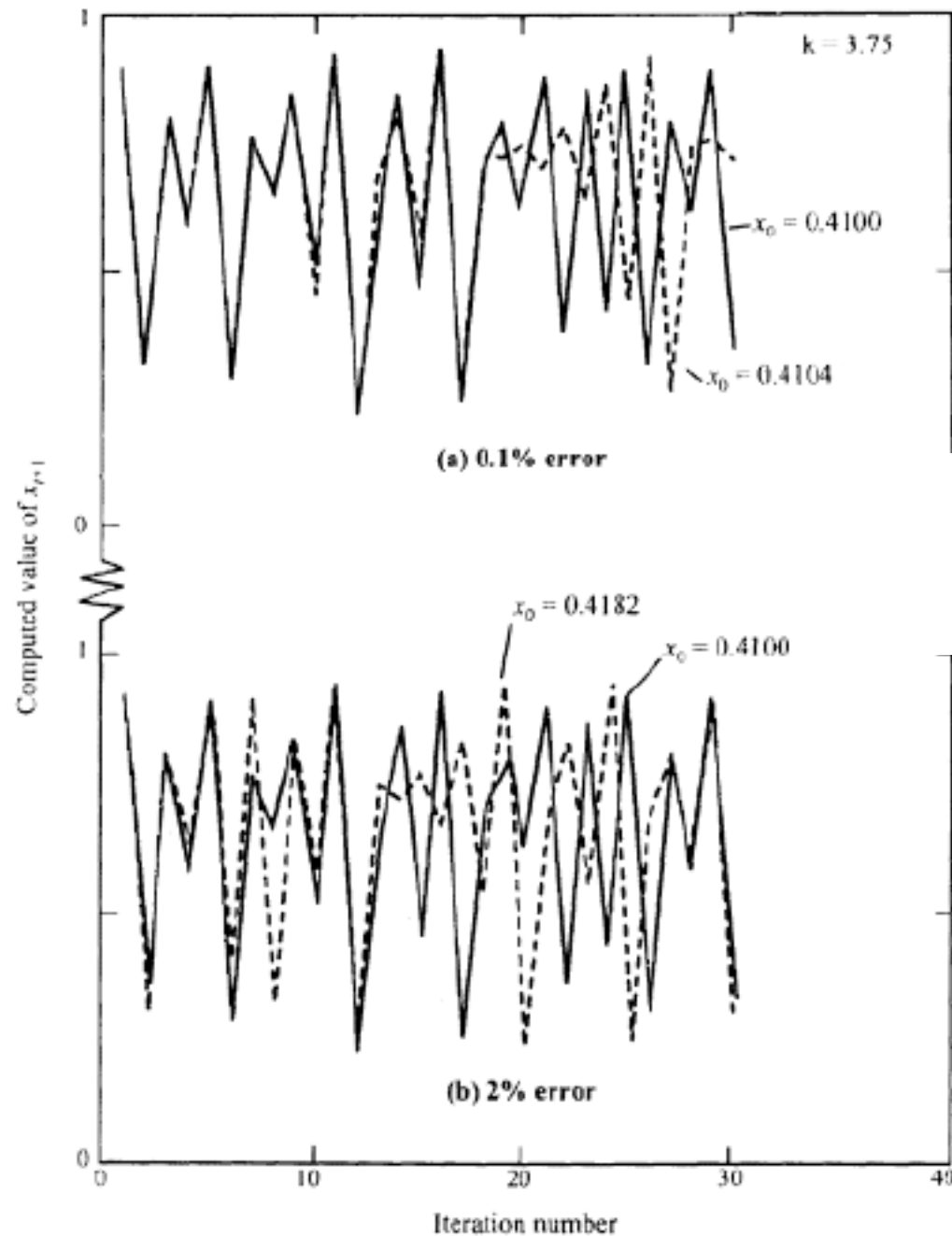
Figure 1.10 Graphs of compositions of the logistic map.

(a) the logistic map $G(x) = 4x(1 - x)$. (b) The map $G^2(x)$. (c) The map $G^3(x)$.

6- Sensibilidade às Condições Iniciais

Definição : x_0 é sensível às condições iniciais se existir uma distância d tal que pontos arbitrariamente próximos de x_0 são mapeados para distâncias maiores que d :

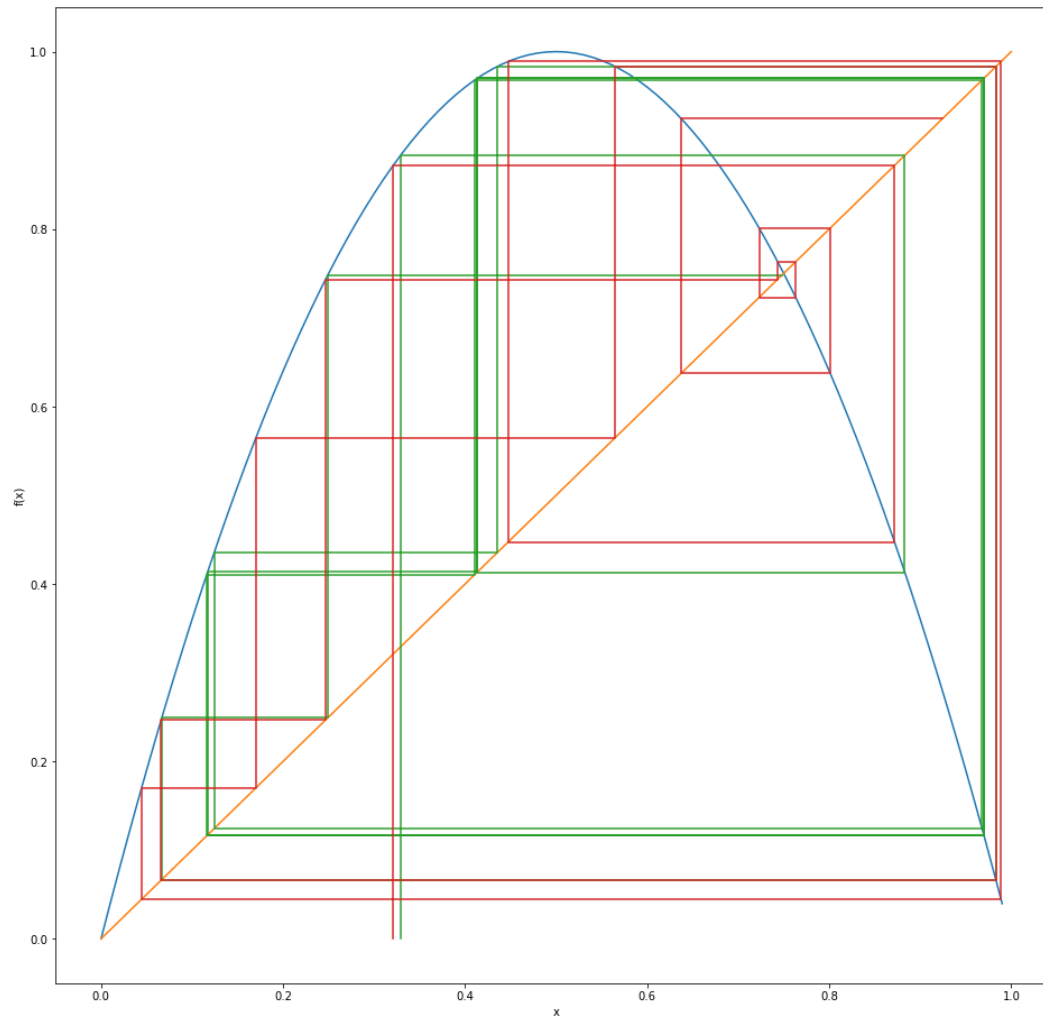
$$\exists d > 0 \mid x \in N_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \left| f^k(x) - f^k(x_0) \right| \geq d$$



May (1976) (the logistic equation):

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t).$$

Sensibilidade às Condições Iniciais



7- Itinerários

Órbitas do Mapa Logístico com $a = 4$ $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$

Cada intervalo assinalado contém os pontos cuja órbita passa pela sequência do seu nome.

Regra

$LR \rightarrow LRR, LRL$ (*número ímpar de R*)

Itinerários

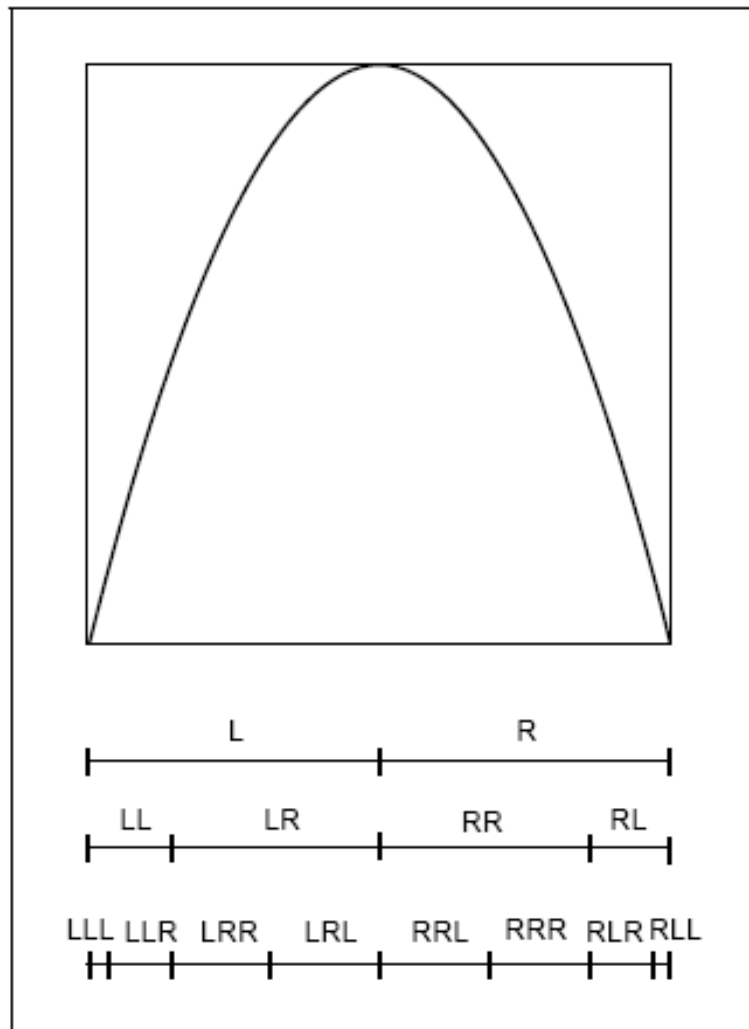
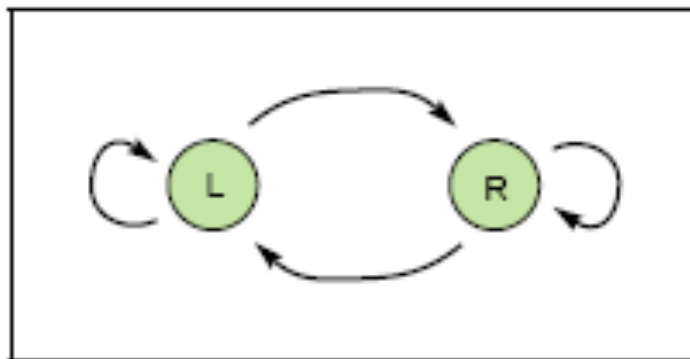


Figure 1.12 Schematic itineraries for $G(x) = 4x(1 - x)$.

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

Alligood et al.
Chaos

Transições



Alligood et al.
Chaos

Figure 1.13 Transition graph for the logistic map $G(x) = 4x(1 - x)$.

The leftmost arrow tells us that f maps the interval L over itself, i.e., that $f(L)$ contains L . The top arrow says that $f(L)$ contains R , and so forth.