

III- Caos

Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke

Springer (1997)

1-Expoentes de Lyapunov

Expoente de Lyapunov para Órbitas Periódicas

Mapa unidimensional $x_{n+1} = f(x_n)$ Órbita de período k

$(f^k(x_1))' = f'(x_k)f'(x_{k-1})\dots f'(x_1)$ Note que $(f^k(x_i))' = (f^k(x_j))'$

Em média, para cada iteração $\left\langle |(f^k(x_j))'| \right\rangle = A^{1/k}$

Distância entre dois pontos iniciais x_1 e x'_1

Após uma iteração $|x_2 - x'_2| = A^{1/k} |x_1 - x'_1|$

Após k iterações $|x_{k+1} - x'_{k+1}| = A |x_1 - x'_1|$

Se $A = a^k$, a seria o número de Lyapunov

$A < 1 \rightarrow$ aproximação entre as órbitas

$A > 1 \rightarrow$ afastamento entre as órbitas

Expoente de Lyapunov para Órbitas Caóticas

Definição: Seja f um mapa unidimensional suave em \mathbb{R}

Órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Número de Lyapunov $L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[|f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_n)| \right]^{1/n}$

Expoente de Lyapunov $h \equiv \ln L$

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \dots + \ln |f'(x_n)|}{n}$$

Se o mapa $x_{n+1} = f(x_n)$ tiver número de Lyapunov L ,
o mapa $x_{n+1} = f^k(x_n)$ terá número L^k

Para ponto fixo x_1 , $h = \ln |f'(x_1)|$

Para órbita de período k , $h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_k)|}{k}$

2- Órbitas Caóticas

Definições

Órbita $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ é assintoticamente periódica se ela converge para uma órbita periódica para $n \rightarrow \infty$

Para uma órbita exatamente periódica, usa-se o termo periódica eventualmente.

Órbitas Caóticas

Definição: Para mapa f suave em \mathbb{R}
órbita não limitada $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é caótica se

- 1 - não for periódica assintoticamente
- 2 - o expoente de Lyapunov for positivo, $h > 0$

Exemplos de Mapas com Órbitas Caóticas

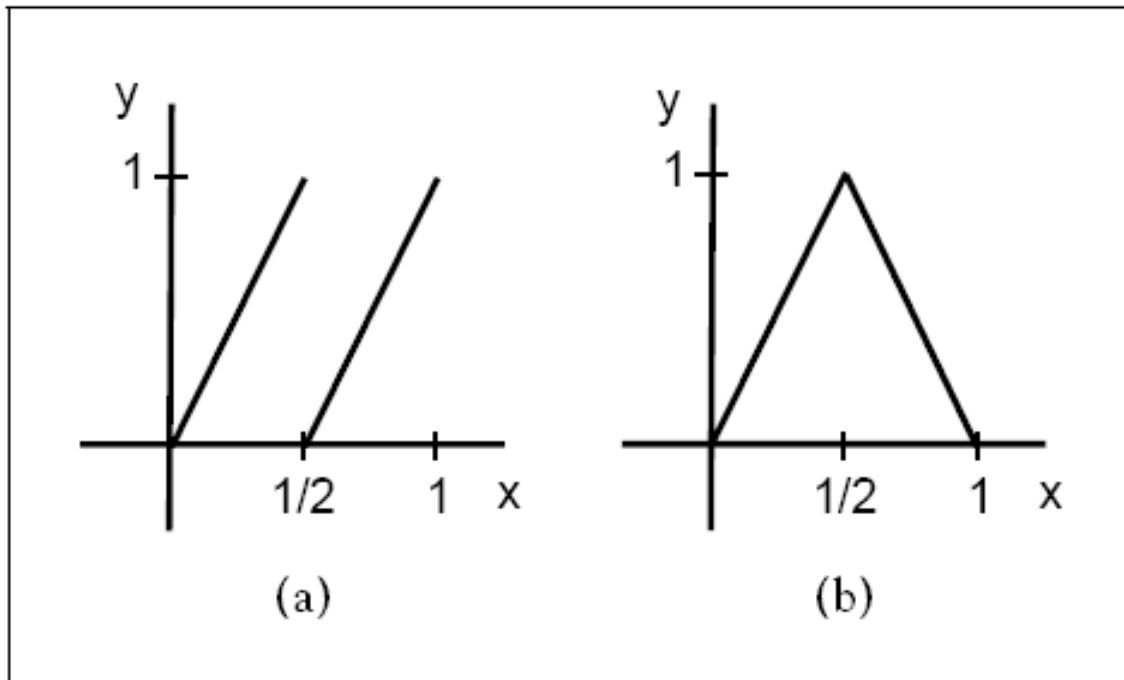


Figure 3.1 Two simple maps with chaotic orbits.

(a) $2x \pmod{1}$ map. (b) The tent map.

Alligood
Chaos

Exemplo do Cálculo de h

$$x_{i+1} = 2x_i \pmod{1}$$

Mapa descontínuo em $x = 1/2$

Para órbitas com $x_j \neq 1/2$,

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln 2}{n} = \ln 2$$

Esse resultado vale para qualquer órbita não periódica que não passe por $x = 1/2$

Mapa da Tenda

$$\text{Mapa } T(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{para } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } x_0 = 1/4 \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \rightarrow x_0 \subset S(0) \text{ (variedade estável)} \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = 0 \rightarrow x_0 \subset U(0) \text{ (variedade instável)} \end{cases}$$

$$x_0 = 3/16 \rightarrow 3/8 \rightarrow 3/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad \text{ponto fixo}$$

$$x_0 = 6/13 \rightarrow 12/13 \rightarrow 2/13 \rightarrow 4/13 \rightarrow 8/13 \rightarrow 10/13 \rightarrow 6/13 \quad \text{órbita periódica}$$

$$x_0 = 7/10 \rightarrow 3/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \quad \text{órbita periódica}$$

3- Conjugação de Mapas

Itinerários do Mapa Logístico

Órbitas do mapa logístico G , com $a=4$ $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$

Cada intervalo assinalado contém os pontos cuja órbita passa pela sequência do seu nome.

Regras

(intervalo com final L)

LL \rightarrow LLL, LLR (número par de R)

RL \rightarrow RLR, RLL (número ímpar de R)

(intervalo com final R)

RR \rightarrow RRL, RRR (número par de R)

LR \rightarrow LRR, LRL (número ímpar de R)

Intervalo $S_1 S_2 \dots S_k$; $S_1 = L$ ou R

Itinerários do Mapa Logístico

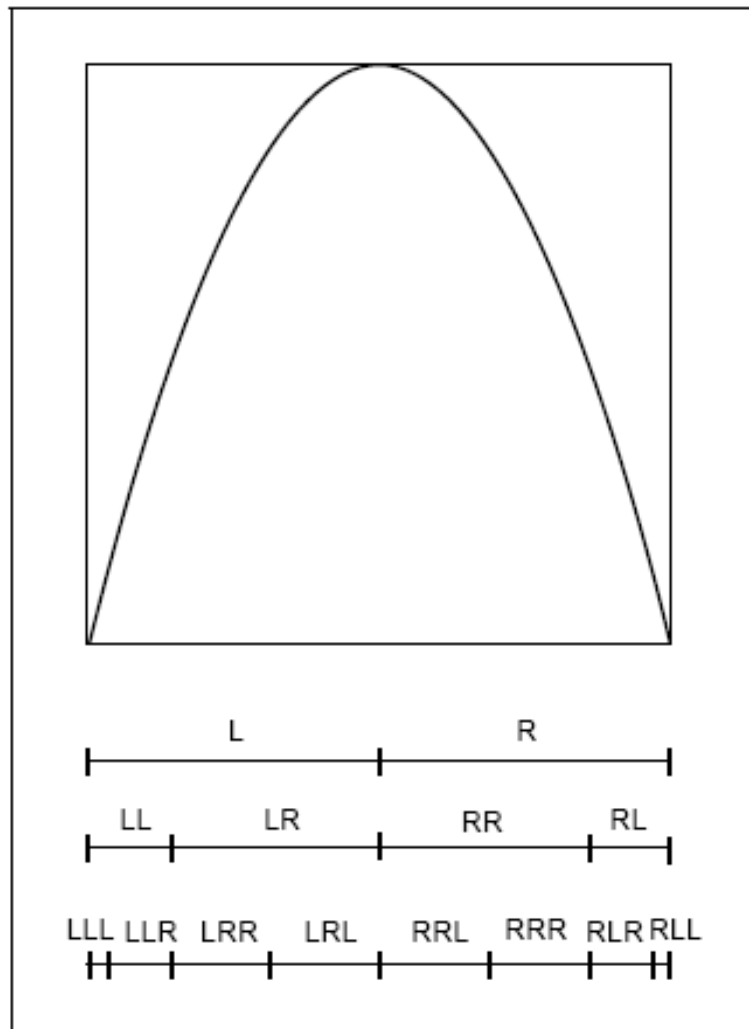
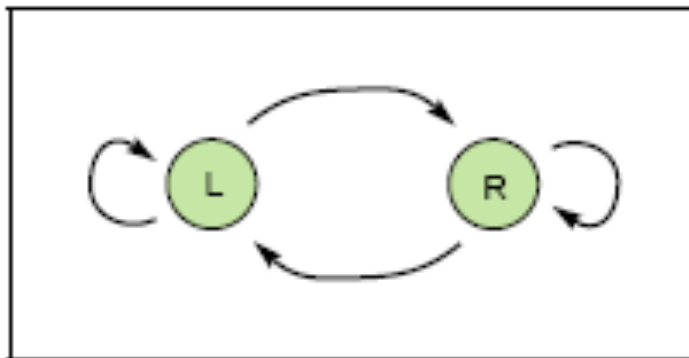


Figure 1.12 Schematic itineraries for $G(x) = 4x(1 - x)$.

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

Transições do Mapa Logístico



Alligood et al.
Chaos

Figure 1.13 Transition graph for the logistic map $G(x) = 4x(1 - x)$.

The leftmost arrow tells us that f maps the interval L over itself, i.e., that $f(L)$ contains L . The top arrow says that $f(L)$ contains R , and so forth.

Itinerários do Mapa da Tenda

Simetria \rightarrow todos intervalos iguais.

A largura do intervalo

$$S_1 \dots S_k \text{ é } 2^{-k}$$

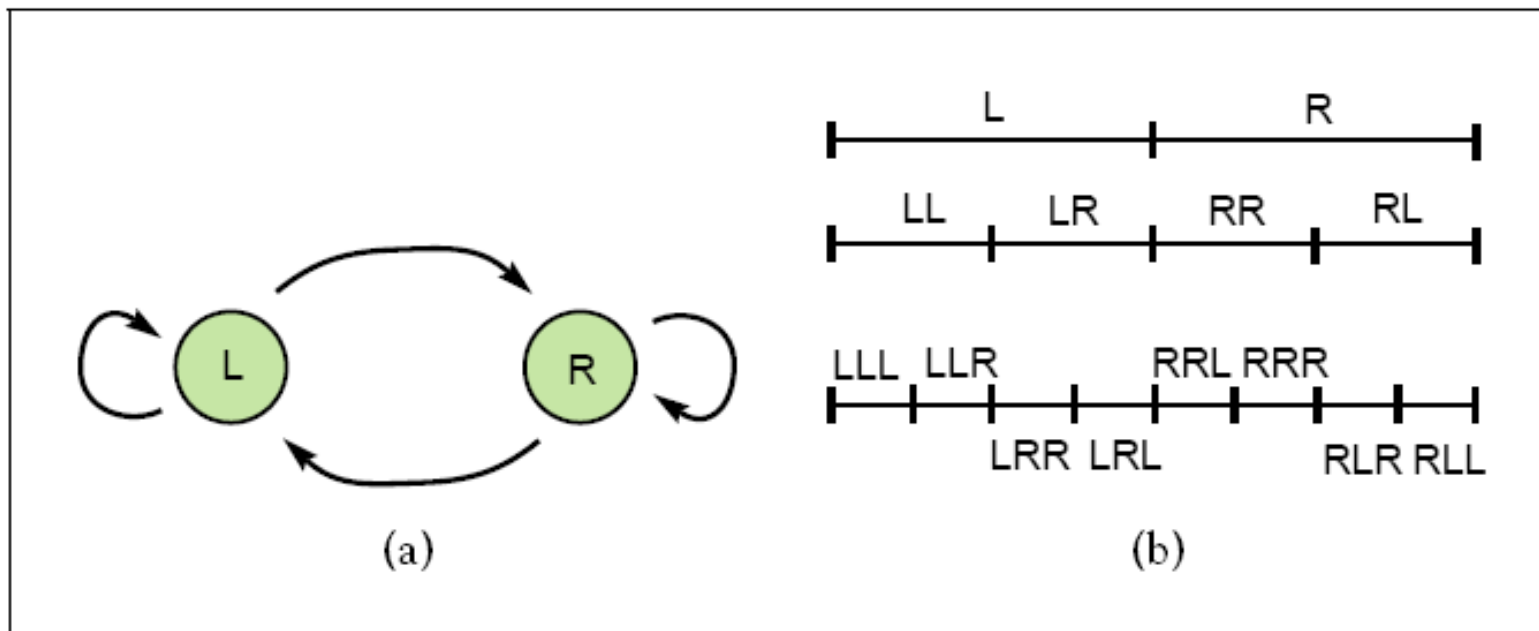


Figure 3.2 Tent map symbolic dynamics.

(a) Transition graph and (b) schematic itineraries for the tent map T .

Allgood
Chaos

Conjugação dos Mapas da Tenda e Logístico

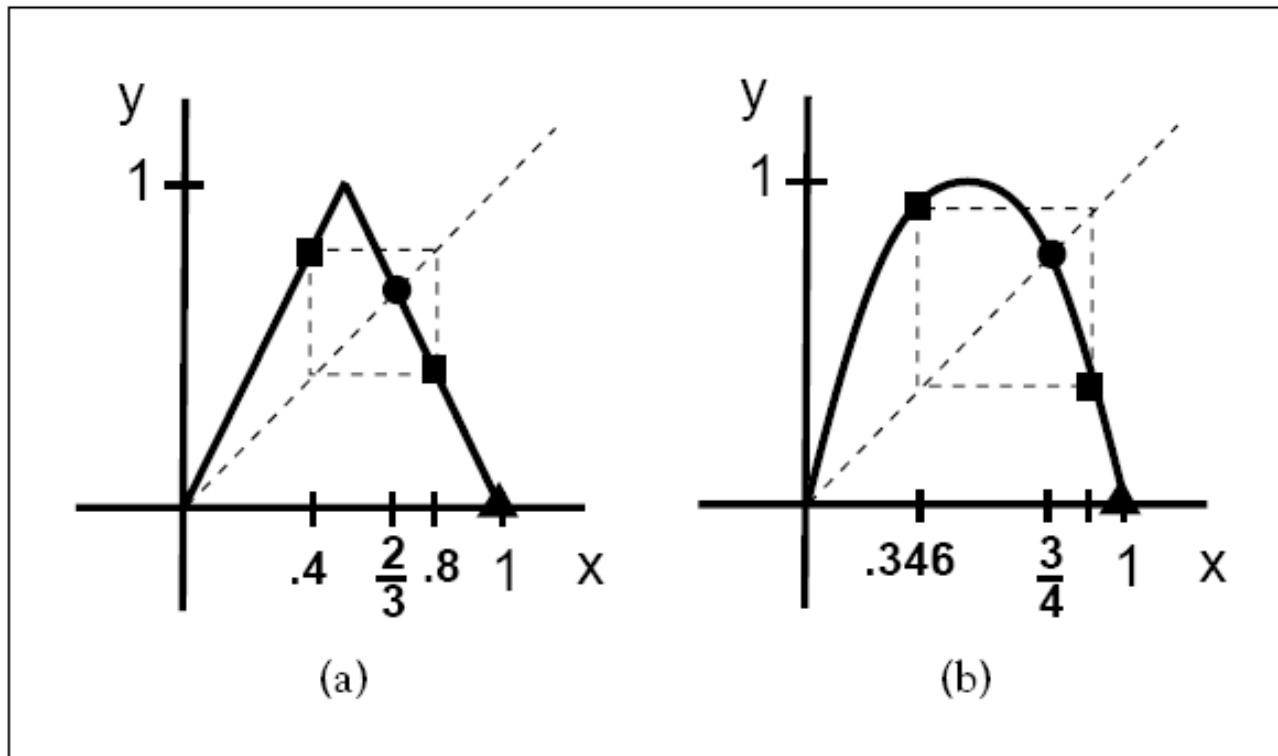


Figure 3.3 Similarities in tent map and logistic map.

Both (a) the tent map and (b) the logistic map have a fixed point (small circle) to the right of the critical point $x = 0.5$. For each, the midpoint maps to 1 and then to 0. Each has a single period-two orbit (small squares).

Pontos Fixos Conjugados

Mapa da Tenda

Ponto fixo instável

$$x = 2/3$$

$$|f'(2/3)| = |-2| > 1$$

Mapa Logístico

Ponto fixo instável

$$x = 3/4$$

$$|f'(3/4)| = |-2| > 1$$

Órbitas Periódicas Conjugadas

Mapa da Tenda

Órbita instável com período 2

$$\{0.4, 0.8\}$$

$$|f'(0.4)| |f'(0.8)| = |2| |-2| = 4 > 1$$

Mapa Logístico

Órbita instável com período 2

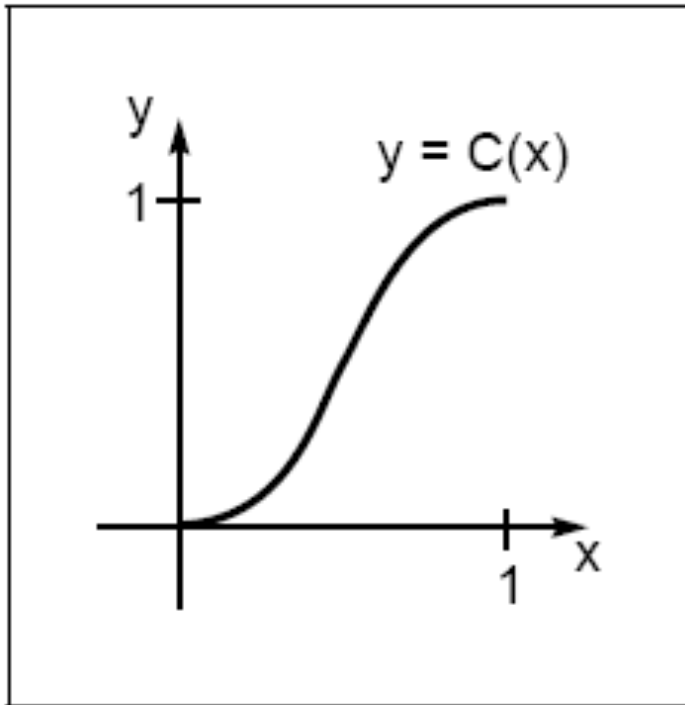
$$\{0.346, 0.905\}$$

$$|f'(0.346)| |f'(0.905)| = |-1 - \sqrt{5}| |-1 + \sqrt{5}| = 4 > 1$$

Para cada órbita $\{x\}$ no mapa da tenda há uma órbita correspondente $\{C(x)\}$ no mapa logístico com a mesma estabilidade.

Definição: Os mapas T e G são conjugados se eles são relacionados por uma transformação de coordenadas biunívocas, isto é,
 $C \circ T = G \circ C$ para o mapa contínuo C .

Conjugação entre os Mapas da Tenda e Logístico



Alligood
Chaos

Figure 3.4 The conjugacy map.

The graph of $C(x) = (1 - \cos \pi x)/2$ is continuous and one-to-one. Since $CT(x) = GC(x)$ for all $0 \leq x \leq 1$, it is a conjugacy between the tent map and logistic map.

Mapa logístico $x_{n+1} = G(x_n) = 4x_n(1-x_n)$

Mapa da tenda $x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2(1-x_n) & 1/2 < x_n \leq 1 \end{cases}$

No intervalo $0 \leq x \leq 1/2$ (o mesmo pode ser feito no outro intervalo)

$$\begin{aligned} G(C(x)) &= 4C(x)(1-C(x)) = 4 \frac{1 - \cos \pi x}{2} \frac{1 + \cos \pi x}{2} = \\ &= 1 - \cos^2 \pi x = \sin^2 \pi x \end{aligned}$$

$$C(T(x)) = \frac{1 - \cos \pi T(x)}{2} = \frac{1 - \cos \pi 2x}{2} = \sin^2 \pi x$$

Portanto $GC(x) = CT(x)$

Trajetórias Conjugadas

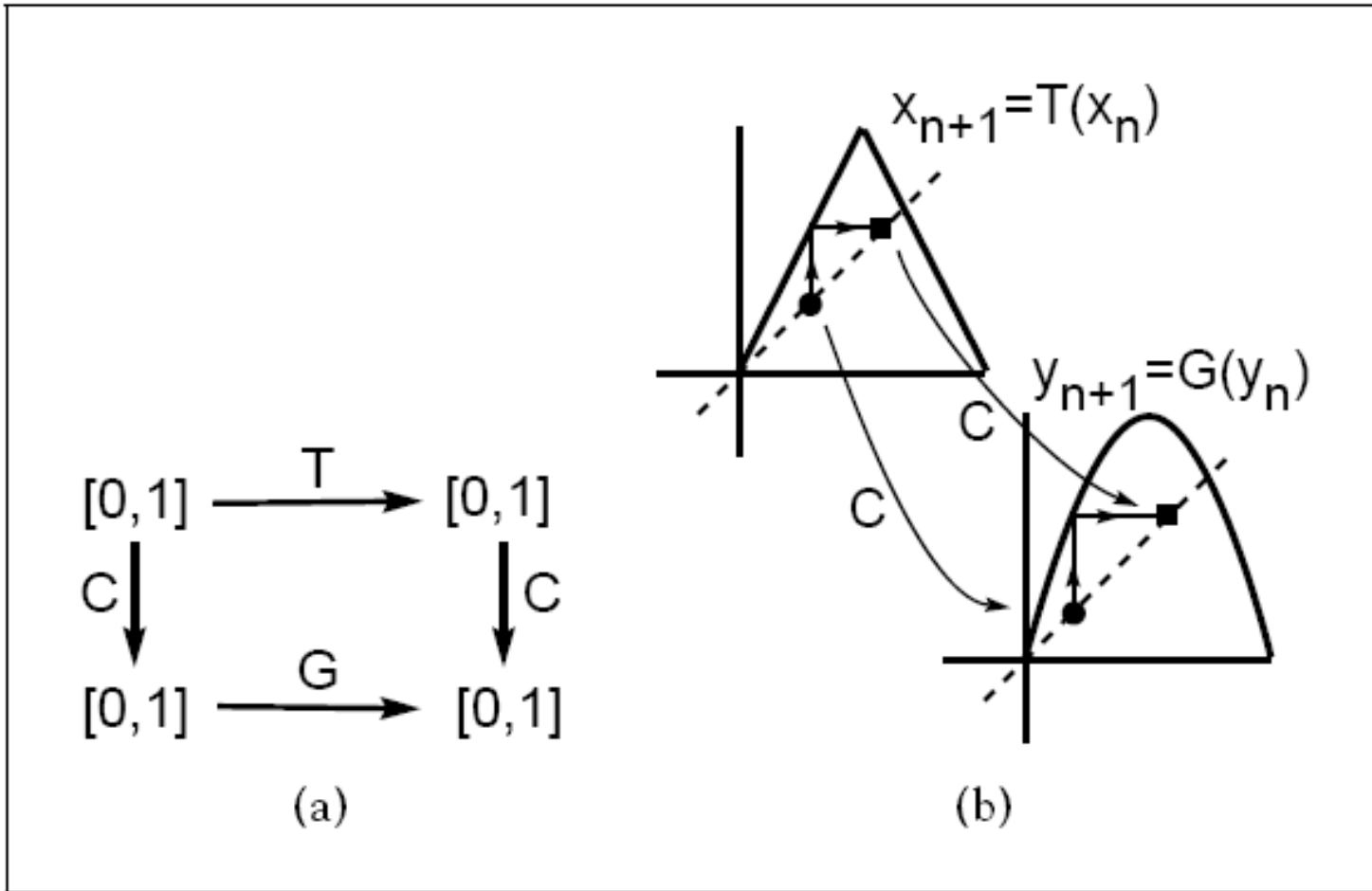


Figure 3.5 Two illustrations of the fact that the maps T and G are conjugate. (a) Both ways of composing maps from upper left to lower right are equal. (b) If $y_n = C(x_n)$ implies $y_{n+1} = C(x_{n+1})$, then C is a conjugacy between the x -map and the y -map.

Note que $G C(x) = C T(x) \rightarrow G(x) = C T(x) C^{-1}$

Assim, $G^n = CTC^{-1} CTC^{-1} \dots CTC^{-1} = CT^n C^{-1}$

x ponto fixo de T , $T(x) = x \rightarrow$

$C(x)$ ponto fixo de G , $G C(x) = C(x)$

pois $G C(x) = C T(x) = C(x)$

x ponto fixo de T^k , $T^k(x) = x \rightarrow$

$C(x)$ ponto fixo de G^k , $G^k C(x) = C(x)$

pois $G^k C(x) = C T^k C^{-1} C(x) = C T^k(x) = C(x)$

Estabilidade dos Pontos Fixos e Órbitas Periódicas

De $C(T(x)) = G(C(x))$ obtemos

$$C'(T(x))T'(x) = G'(C(x))C'(x)$$

Para $T(x) = x$, obtemos

$$C'(x)T'(x) = G'(C(x))C'(x) \rightarrow T'(x) = G'(C(x))$$

Portanto, há uma correspondência na estabilidade dos pontos fixos de T e G

Para $T^k(x) = x$, obtemos $(T^k)'(x) = (G^k)'(C(x))$

Portanto, essa correspondência ocorre para órbitas periódicas

Todos os pontos fixos e órbitas periódicas do mapa logístico G ($b = 4$) são instáveis

Para $T^k(x) = x$, $(T^k)'(x) = 2^k > 1 \rightarrow$

$(G^k)'(x) = 2^k > 1$ para $G^k(x) = x$

Cálculo do Expoente de Lyapunov do Mapa Logístico (b=4)

$\{x_i\}$ órbita caótica conjugada do mapa T

$\{C(x_i)\}$ órbita caótica conjugada do mapa G

Como $T(x_i) = x_{i+1}$ e $C'(T(x_i)) T'(x_i) = G'(C(x_i)) C'(x_i)$

obtemos $T'(x_k) \dots T'(x_2) T'(x_1) =$

$$= \frac{G'(C(x_k)) C'(x_k)}{C'(x_{k+1})} \dots \frac{G'(C(x_2)) C'(x_2)}{C'(x_3)} \frac{G'(C(x_1)) C'(x_1)}{C'(x_2)} =$$

$$= \frac{G'(C(x_k)) \dots G'(C(x_1)) C'(x_1)}{C'(x_{k+1})}$$

$$\ln | T'(x_k) \dots T'(x_1) | = \sum_{i=1}^k \ln | T'(x_i) |$$

$$= \ln | C'(x_1) | - \ln | C'(x_{k+1}) | + \sum_{i=1}^k \ln | G'(x_i) | \rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \ln | T'(x_i) |}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \ln | G'(x_i) |}{k} \Rightarrow h(\text{mapa } T) = h(\text{mapa } G)$$

Portanto, o mapa logístico G ($b = 4$) tem órbitas caóticas

Itinerários do Mapa da Tenda

Simetria \rightarrow todos intervalos iguais.

A largura do intervalo

$$S_1 \dots S_k \text{ é } 2^{-k}$$

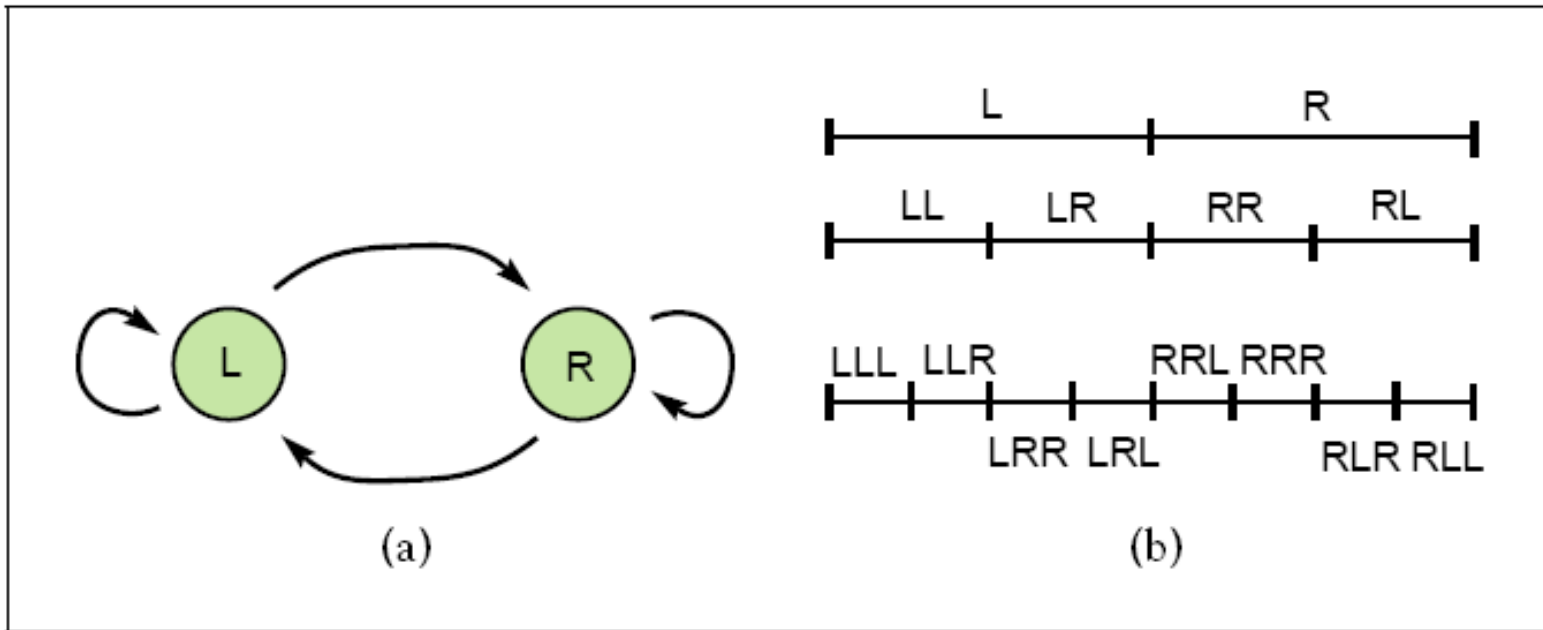
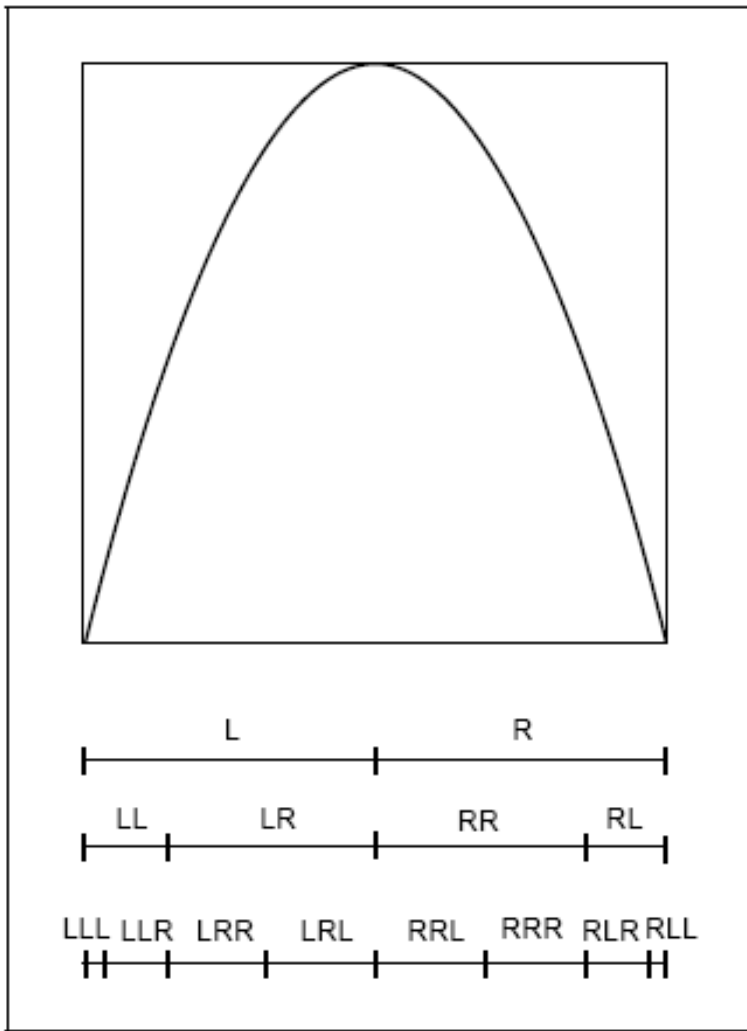


Figure 3.2 Tent map symbolic dynamics.

(a) Transition graph and (b) schematic itineraries for the tent map T .

Allgood
Chaos

Itinerários do Mapa Logístico



Larguras dos intervalos são desiguais

Figure 1.12 Schematic itineraries for $G(x) = 4x(1-x)$.

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

Alligood et al.
Chaos

Mapa T, largura de um intervalo $[x_1, x_2] = 2^{-k}$

Mapa G, largura de um intervalo conjugado

$$[C(x_1), C(x_2)] = \int_{x_1}^{x_2} C'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dC}{dx} dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\pi}{2} \text{sen}(\pi x) dx = \leq \frac{\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\pi(x_2 - x_1)}{2} = \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

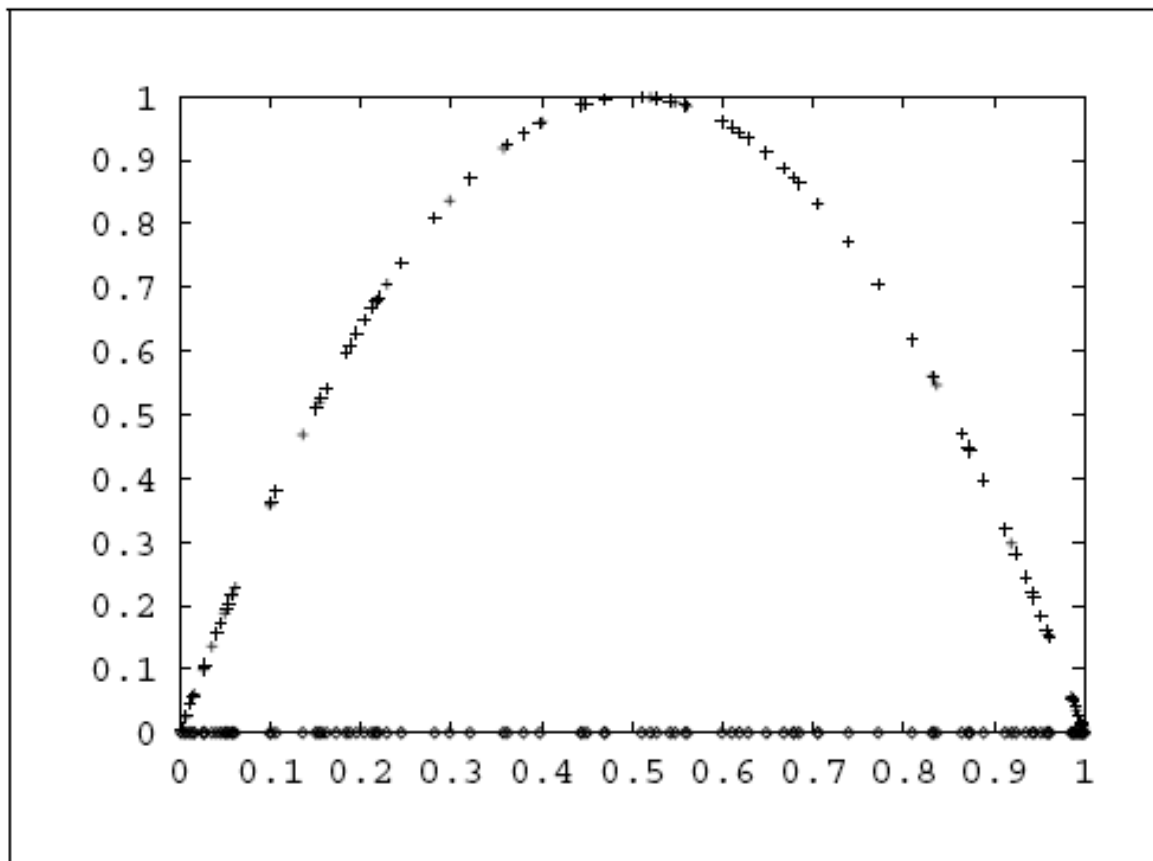


Figure 3.6 The logistic map.

One hundred iterates are plotted on the x -axis; their images are plotted on the vertical axis.

4- Bacias de Atração

Bacia de Atração

Definição: f mapa em \mathbb{R}^n , \vec{p} ponto fixo atrativo.

A bacia de atração de \vec{p} é o conjunto de pontos

$$\vec{x} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(\vec{x}) - f^k(\vec{p})| \rightarrow 0$$

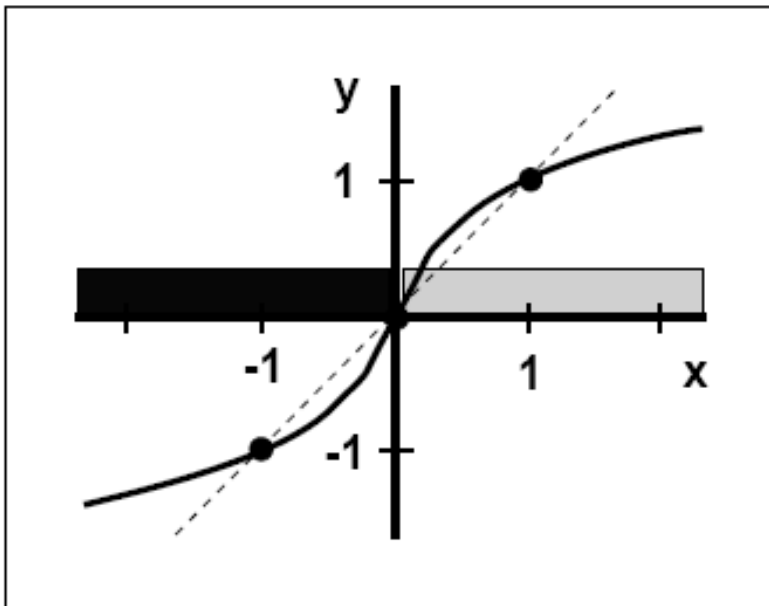
Exemplo: Mapa em \mathbb{R} , $f(x_{n+1}) = a x_n$ $|a| < 1$

$x = 0$ ponto fixo

Bacia desse ponto fixo: conjunto dos números reais

Bacias de Atração

Pontos fixos
 $x = 0$ repulsor
 $x = 1, x = -1$ atratores



Bacia do ponto fixo $x = 1, x > 0$
Bacia do ponto fixo $x = -1, x < 0$

Figure 3.12 The map $y = f(x) = (4/\pi) \arctan x$.

The basin of the sink -1 is shown in black, and the basin of 1 is in gray.

Alligood
Chaos

Bacia de Atração

$$f(r, \theta) = (r^2, \theta - \text{sen } \theta)$$

$$r \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{Pontos fixos: } \begin{cases} (0, 0) \text{ atrator} \\ (1, 0) \\ (1, \pi) \end{cases}$$

$$\text{Atrator } r \rightarrow \infty$$

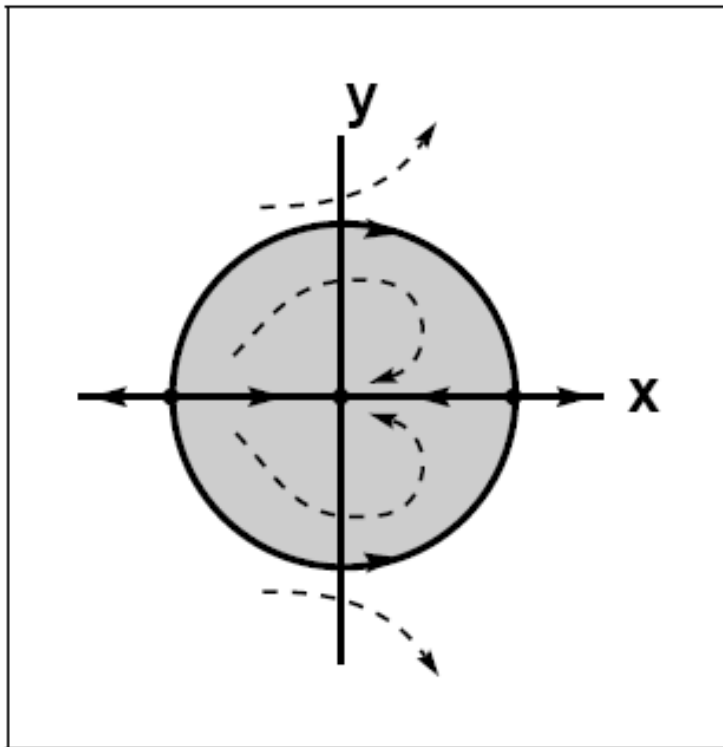


Figure 3.13 The map of Example 3.26.

The gray region is the basin of the origin. The white region is the basin of infinity.

Mapa Logístico

$0 < a < 1 \rightarrow x = 0$ é atrator; bacia: $[0, 1]$

$1 < a < 3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ é repulsor} \\ x = \frac{a - 1}{a} \text{ é atrator;} \end{cases} \quad \text{bacia: } [0, 1]$

$3 < a \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ repulsor} \\ x = \frac{a - 1}{a} \text{ repulsor} \end{cases}$

Diagrama de Bifurcação

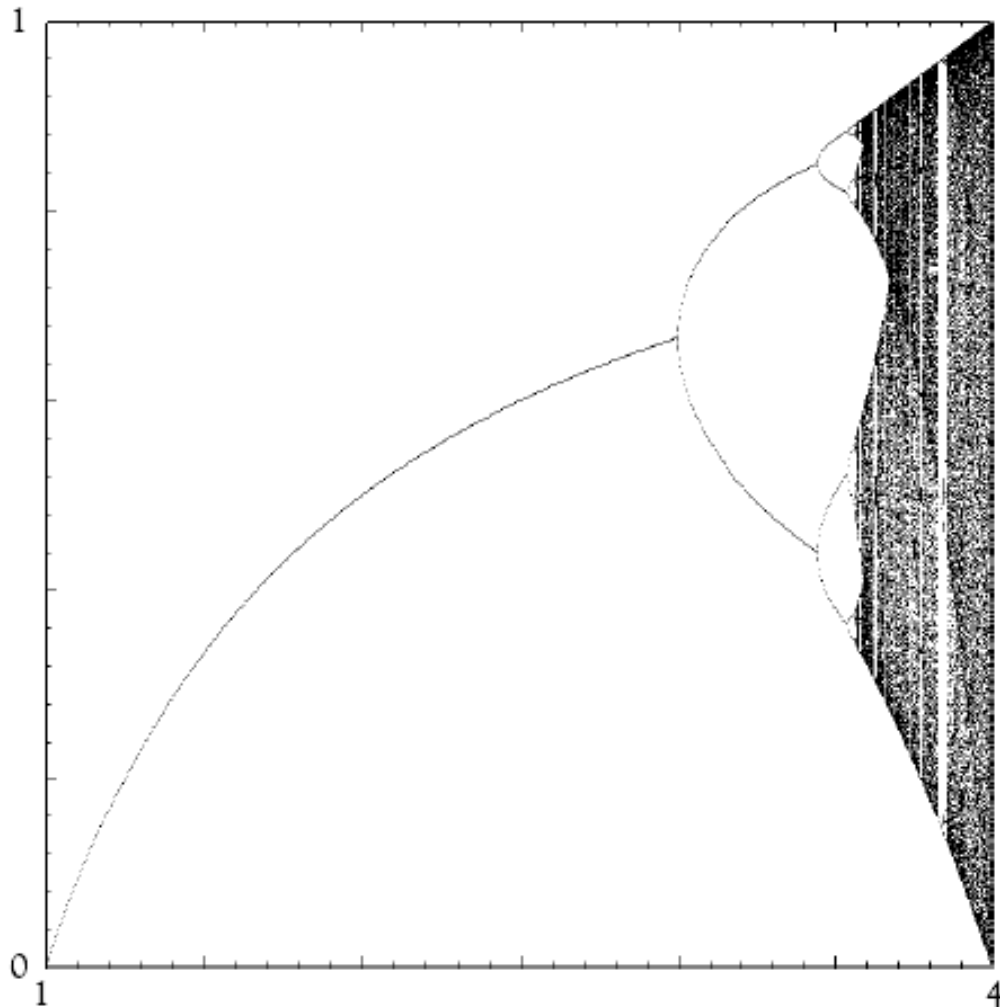


Figure 1.6 Bifurcation diagram of $g_a(x) = ax(1 - x)$.

The fixed point that exists for small values of a gives way to a period-two orbit at the “bifurcation point” $a = 3$, which in turn leads to more and more complicated orbits for larger values of a . Notice that the fixed point is only plotted while it is a sink. When the period-two orbit appears, the fixed point is no longer plotted because it does not attract orbits. See Lab Visit 12 for laboratory versions.

Alligood et al.
Chaos