MÚLTIPLAS CADEIAS DE ILHAS ISÓCRONAS EM SISTEMAS TWIST

Meirielen C. de Sousa¹, I. L. Caldas¹, A. M. O. de Almeida², F. B. Rizzato³, R. Pakter³

¹Instituto de Física, Universidade de São Paulo ²Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas ³Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Mecânica Clássica (Pós-Graduação), Instituto de Física da USP, 16/11/2020

NÚMERO ROTAÇÃO

- Razão entre duas frequências do sistema
- Exemplo: movimento toroidal com número de rotação $\Omega = \omega_1 / \omega_2$



J. Brink, M. Geyer, and T. Hinderer, *Phys. Rev.* D **91**, 083001 (2015)

- Órbitas periódicas: números rotação racionais
- Órbitas quase-periódicas: números rotação irracionais
- Órbitas caóticas: número rotação não definido

- Órbitas periódicas: números rotação racionais
- Órbitas quase-periódicas: números rotação irracionais
- Órbitas caóticas: número rotação não definido
- Teorema Ponto Fixo Poincaré-Birkhoff (órbitas periódicas):
- a) Número rotação determina número pontos periódicos de órbita periódica
- **b)** Sistemas quase-integráveis número par órbitas periódicas: metade estável (pontos elípticos, ilhas ressonância) e metade instável (pontos hiperbólicos)
- c) Para cada número rotação: teorema não determina número órbitas estáveis (número cadeias isócronas)

A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and chaotic dynamics* (2nd ed., Springer, New York, 1992)
M. V. Berry, *AIP Conf. Proc.* 46, 16 (1978)

SISTEMAS NÃO TWIST

 Número rotação não é função monotônica variáveis ação I

 Seções Poincaré: órbitas periódicas com mesmo Ω para valores diferentes variável I

Figura: duas cadeias isócronas (gêmeas) com $\Omega = 1/2$ no mapa padrão não twist





E. Petrisor et al., Chaos, Solitons and Fractals 18, 1085 (2003)

SISTEMAS TWIST



- Seções Poincaré: não há cadeias isócronas (mesmo Ω) para valores diferentes variável I
- Em geral, literatura apresenta sistemas twist com apenas uma cadeia isócrona, como na figura

 Número rotação Ω é função monotônica variáveis ação I



M. C. de Sousa et al., J. Phys.: Conf. Ser. 641, 012003 (2015)

TEOREMA POINCARÉ-BIRKHOFF

- Ressonância primária (m, n): número rotação $\Omega = n/m$ (m, n) inteiros não nulos, positivos, primos entre si)
- Teorema Ponto Fixo Poincaré-Birkhoff: ressonância (m, n) possui Lm ilhas seção Poincaré J₁×φ₁ e Ln ilhas seção Poincaré J₂×φ₂ (L inteiro positivo, não nulo)
- L é número cadeias isócronas
- Teorema Poincaré-Birkhoff não determina valor de L

A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and chaotic dynamics* (2nd ed., Springer, New York, 1992)
M. V. Berry, *AIP Conf. Proc.* 46, 16 (1978)

PERTURBAÇÕES (*lm*, *ln*)

- Todas perturbações (lm, ln) ($l \neq 0$ inteiro) apresentam mesmo número rotação $\Omega = n/m$
- Superfície racional $\Omega = n/m$ pode conter número infinito de perturbações
- Número rotação não é suficiente para caracterizar completamente ressonância
- Para determinar número cadeias isócronas, devemos conhecer perturbações (*lm*, *ln*) que atuam no sistema

PERTURBAÇÃO ÚNICA

 Hamiltoniana twist quase integrável: dois osciladores não lineares [Walker and Ford, *Phys. Rev.* 188, 416 (1969)]:

$$H = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2 + \alpha J_1J_2\cos(r_1\varphi_1 - s_1\varphi_2) + \beta J_1J_2^{3/2}\cos(r_2\varphi_1 - s_2\varphi_2)$$

- Duas perturbações com números rotação diferentes
- Condições ressonância:

Perturbação (r_1, s_1) : $\frac{d}{dt}(r_1\varphi_1 - s_1\varphi_2) = 0$ e $\frac{d}{dt}(r_2\varphi_1 - s_2\varphi_2) = 0$ r_1\omega_1 \cong s_1\omega_2
e $r_2\omega_1 \cong s_2\omega_2$ $\Omega_1 = \omega_1 / \omega_2 \cong s_1 / r_1$ $\Omega_2 = \omega_1 / \omega_2 \cong s_2 / r_2$

- Condição ressonância e número rotação não dependem r_i , s_i isoladamente. Dependem razão entre eles: $\Omega_i \cong s_i / r_i$
- Se r_i, s_i não são primos entre si: (r_i, s_i) = (l_im_i, l_in_i)
 l_i, m_i, n_i: inteiros não nulos
 m_i, n_i: positivos e primos entre si
- Perturbação $(r_1, s_1) = (l_1m_1, l_1n_1)$: $\Omega_1 = n_1 / m_1$ - ressonância (m_1, n_1) $|l_1|$ - número cadeias isócronas nas seções Poincaré
- Perturbação $(r_2, s_2) = (l_2 m_2, l_2 n_2)$:

 $\Omega_2 = n_2 / m_2$ - ressonância (m_2, n_2) $|l_2|$ - número cadeias isócronas nas seções Poincaré

Ressonância (1,1): $\Omega = 1/1$





Ilhas externas:

Ressonância $(m_1, n_1) = (1, 1)$

Cada cor: cadeia diferente

Perturbação

 $(r_1, s_1) = (l_1m_1, l_1n_1)$: $|l_1|$ cadeias isócronas $n_1 = 1$ ilha cada cadeia

Obs: seções Poincaré coordenadas polares

$$l_1 = 3$$
: (3,3) Perturbation
 0.4
 0.2
 0.4
 0.2
 0.4
 -0.2
 0.4
 -0.4
 -0.2
 0
 0.2
 0
 0.4
 -0.2
 0
 0.2
 0.4
 0.2
 0.4
 -0.2
 0
 0.2
 0.2
 0.4
 -0.2
 0
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0.2
 0

 q_2



Ressonância (2,3): $\Omega = 3/2$

 $l_2 = 2$: (4,6) Perturbation

 $l_2 = 1$: (2,3) Perturbation 0.2 p_2 -0.2-0.20.2 0 q_2



0.2 p_2 -0.2-0.20.2 0 q_2 $l_2 = 4$: (8,12) Perturbation 0.2 r 0 0 D ٥ 0 p_2 0 ٥ ٥ 0

0

-0.2└─ -0.2

0

0.2

0

0

 q_2

Ilhas internas:

Ressonância $(m_2, n_2) = (2, 3)$

Cada cor: cadeia diferente

Perturbação

 $(r_2, s_2) = (l_2 m_2, l_2 n_2)$: $|l_2|$ cadeias isócronas $n_2 = 3$ ilhas cada cadeia seção Poincaré $p_2 \times q_2$

M. C. de Sousa et al., J. Phys.: Conf. Ser. 641, 012003 (2015)

INTERAÇÃO ONDA-PARTÍCULA

- Ilhas ressonância:
 - Onda transfere grande quantidade energia para partículas
 - Partículas são aceleradas de forma regular
 - Importante conhecer posição ressonâncias e número cadeias no espaço fases

- Feixe baixa densidade formado por partículas relativísticas com carga q, massa repouso m
- Confinado por campo magnético externo uniforme: $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$, com potencial vetor $\mathbf{A} = B_0 x \hat{y}$
- Interagindo com onda eletrostática e estacionária, dada como série pulsos periódicos se propagam perpendicularmente a **B**: vetor de onda $\mathbf{k} = k\hat{x}$, período *T*, amplitude $\varepsilon / 2$
- Feixe baixa densidade não altera propagação onda, e partículas não interagem entre si

Obs: Onda eletrostática é produzida por campo elétrico dependente tempo com $\nabla \times \mathbf{E}(t) = 0$, $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$ e $\mathbf{E}(t) = -\nabla V(t)$

 Hamiltoniana (energia relativística partícula em campo B + energia potencial onda):

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p} - q\mathbf{A}|^2} + \frac{q\varepsilon}{2} \cos(kx) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

 Momento canônico de partícula relativística se movendo em campo magnético:

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} + q\mathbf{A}$$

com $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, e v a velocidade da partícula

 Considerando apenas dinâmica transversal a B, isto é, dinâmica no plano xOy:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_x^2 + c^2 (p_y - qB_0 x)^2} + \frac{q\varepsilon}{2} \cos(kx) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- *H* não é função de *y*. Logo, $\dot{p}_y = -\partial H/\partial y = 0$ e p_y é constante movimento
- Por simplicidade será considerado, sem perda de generalidade, $p_v = 0$:

$$H(x, p_x, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_x^2 + (cqB_0 x)^2} + \frac{q\varepsilon}{2} \cos(kx) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

• Importante ressaltar essa não é uma restrição física real. Embora p_y seja conservado, $dy/dt \neq 0$ e partícula descreve movimento bidimensional em xOy

- *H* não é função de *y*. Logo, $\dot{p}_y = -\partial H/\partial y = 0$ e p_y é constante movimento
- Por simplicidade será considerado, sem perda de generalidade, $p_v = 0$:

$$H(x, p_x, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_x^2 + (cqB_0 x)^2} + \frac{q\varepsilon}{2} \cos(kx) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- Importante ressaltar essa não é uma restrição física real. Embora p_y seja conservado, $dy/dt \neq 0$ e partícula descreve movimento bidimensional em xOy
- Quantidades adimensionais: $p_x/mc \rightarrow p_x$, $qB_0x/mc \rightarrow x$, $mck/qB_0 \rightarrow k$, $qB_0t/m \rightarrow t$, $qB_0T/m \rightarrow T$, $(q^2B_0/m^2c^2)\varepsilon \rightarrow \varepsilon$, e $H/mc^2 \rightarrow H$

$$H(x, p_x, t) = \sqrt{1 + p_x^2 + x^2} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(kx)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT)$$

• Hamiltoniana adimensional descreve dinâmica transversal a B:

$$H(x, p_x, t) = \sqrt{1 + p_x^2 + x^2} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(kx)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT)$$

- Entre dois pulsos onda consecutivos, Hamiltoniana integrável e não depende tempo: variáveis ângulo-ação $x = \sqrt{2I} \sin \theta$, $p_x = \sqrt{2I} \cos \theta$
- Hamiltoniana nas variáveis ângulo-ação (I, θ) :

$$H(I,\theta,t) = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

HAMILTONIANA -> MAPA

• A partir Hamiltoniana: obtemos mapa simplético que preserva forma canônica equações Hamilton, e preserva área espaço fases

$$(I_n, \theta_n) \qquad \begin{array}{c} I_n + \Delta_1 I = I_n^+ \\ \theta_n + \Delta_1 \theta = \theta_n^+ \\ t = nT \end{array} \qquad \begin{array}{c} I_n^+ + \Delta_2 I = I_{n+1} \\ \theta_n^+ + \Delta_2 \theta = \theta_{n+1} \\ t = (n+1)T \end{array}$$

Representação esquemática variação grandezas $I \in \theta$ entre instantes t = nT e t = (n+1)T

$$I_{w+1} = \frac{1}{2} \left\{ 2I_w \operatorname{sen}^2 \theta_w + \left[\sqrt{2I_w} \cos \theta_w + \frac{1}{2} \varepsilon k \operatorname{sen}(k \sqrt{2I_w} \operatorname{sen} \theta_w) \right]^2 \right\}$$

$$\theta_{w+1} = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sqrt{2I_w}\operatorname{sen}\theta_w}{2\sqrt{2I_w}\cos\theta_w + \varepsilon k\operatorname{sen}(k\sqrt{2I_w}\operatorname{sen}\theta_w)}\right] + \frac{T}{\sqrt{1+2I_{w+1}}}$$

- Mapa exato e explícito
- Esse mapa pode ser considerado versão relativística e magnetizada mapa padrão clássico (mapa de Chirikov-Taylor)

RESSONÂNCIAS PRIMÁRIAS



Ressonância (3,2): 2 cadeias

Ressonância (4,3): 2 cadeias

Ressonância (6,5): 1 cadeia

Ressonância (1,1): 4 cadeias

Ilhas ressonância: verde, vermelho, ciano, amarelo Cada ressonância: cores indicam cadeias ilhas independentes (isócronas)

M. C. de Sousa et al., Phys. Rev. E 88, 064901 (2013)

RESSONÂNCIA (1,1)

 Teorema Ponto Fixo Poincaré-Birkhoff não determina número cadeias isócronas para cada ressonância primária



 Cores verde, vermelho, ciano, amarelo: cadeias ilhas isócronas independentes

• Hamiltoniana sistema: $H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

• Hamiltoniana sistema: $H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

• Função delta:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Hamiltoniana sistema:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

• Função delta:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Hamiltoniana:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(k\sqrt{2I} \operatorname{sen} \theta - \frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Hamiltoniana sistema:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

• Função delta:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Hamiltoniana:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(k\sqrt{2I} \operatorname{sen} \theta - \frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Série Fourier-Bessel: $\cos\left(k\sqrt{2I}\operatorname{sen}\theta - \frac{2\pi l_1 t}{T}\right) = \sum_{l_2 = -\infty}^{+\infty} J_{l_2}(k\sqrt{2I})\cos\left(l_2\theta \pm \frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$

1 00

• Hamiltoniana sistema:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2}\cos(k\sqrt{2I}\sin\theta)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

• Função delta:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Hamiltoniana:
$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cos\left(k\sqrt{2I} \operatorname{sen} \theta - \frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$$

• Série Fourier-Bessel: $\cos\left(k\sqrt{2I}\operatorname{sen}\theta - \frac{2\pi l_1 t}{T}\right) = \sum_{l_2 = -\infty}^{+\infty} J_{l_2}(k\sqrt{2I})\cos\left(l_2\theta \pm \frac{2\pi l_1 t}{T}\right)$

• Hamiltoniana expandida: $H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_r(k\sqrt{2I}) \cos\left(r\theta - \frac{2\pi st}{T}\right)$

Hamiltoniana expandida série Fourier-Bessel:

$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_r(k\sqrt{2I}) \cos\left(r\theta - \frac{2\pi st}{T}\right)$$

Infinitas perturbações (r,s) com mesmo número rotação:

(m,n): ressonância gerada pelas perturbações (r, s) = (lm, ln)

 $\Omega = n/m$: número rotação que caracteriza ressonância (m, n)

|l|: número cadeias isócronas geradas perturbação individual (r, s) = (lm, ln)

m = r / l: número ilhas em cada cadeia

n = s / l: proporcional à velocidade angular partícula

POSIÇÃO RESSONÂNCIA - VARIÁVEL AÇÃO

- Hamiltoniana expandida: $H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_r(k\sqrt{2I}) \cos\left(r\theta \frac{2\pi st}{T}\right)$
- Frequência partícula em campo **B**: $\omega_0 = d\theta / dt \Big|_{H=H_0} = \partial H_0 / \partial I = (1+2I)^{-1/2}$
- Frequência onda: $\omega = 2\pi / T$

• Sistema é twist:
$$\Omega = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{T}{2\pi\sqrt{1+2I}}$$
 (função monotônica *I*)

Condição ressonância primária:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\theta - \frac{2\pi st}{T}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r\dot{\theta} = \frac{2\pi s}{T} \quad \Rightarrow \quad r\omega_0 \cong \frac{2\pi s}{T} \quad \Rightarrow \quad lm\omega_0 \cong \frac{2ln\pi}{T}$$
$$I_{m,n} \cong \frac{1}{8}\left(\frac{mT}{n\pi}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\left(\frac{T}{\pi\Omega_{m,n}}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

POSIÇÃO RESSONÂNCIA - VARIÁVEL ANGULAR

• Para $\varepsilon \rightarrow 0$, mapa sistema é linearizado em ε :

$$I_{w+1} = I_w + \frac{\varepsilon k}{2} \sqrt{2I_w} \cos \theta_w \operatorname{sen}(k \sqrt{2I_w} \operatorname{sen} \theta_w)$$

 Seguindo aproximação primeira ordem em ε nas sucessivas iterações mapa, e utilizando condição periodicidade ressonância (m,n):

$$G_{m,n}(\theta) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi n}{m}j\right) \sin\left[k\sqrt{2I_{m,n}}\sin\left(\theta + \frac{2\pi n}{m}j\right)\right] = 0$$

NÚMERO CADEIAS ISÓCRONAS



Todas curvas pretas obedecem mesmo tipo lei potência:

$$F(T) \equiv \left[\frac{1}{4}\left(\frac{mT}{n\pi}\right)^2 - 1\right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2I_{m,n}}}$$

M. C. de Sousa et al., Phys. Rev. E 88, 064901 (2013)

$$H = \sqrt{1+2I} + \frac{\varepsilon}{2T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_r(k\sqrt{2I}) \cos\left(r\theta - \frac{2\pi st}{T}\right)$$

- Número infinito termos ressonantes (r, s) = (lm, ln) com mesmo número rotação $\Omega = n/m$
- Exemplo: perturbações (2,1), (-2,-1), (4,2), (-4,-2), etc. são todas caracterizadas por $\Omega\!=\!\!1/2$
- Cada perturbação (r, s) = (lm, ln) pode gerar ilhas isócronas na mesma posição espaço fases
- Superposição altera número cadeias de acordo com parâmetros sistema



m > 4: superposição termos ressonantes mais complexa número cadeias não aumenta monotonicamente com $T \in k$

MÚLTIPLAS CADEIAS ISÓCRONAS

- Teorema Ponto Fixo Poincaré-Birkhoff: utiliza número rotação para descrever ressonâncias
- Número infinito perturbações (*lm*, *ln*) possuem mesmo $\Omega = n/m$
- Número rotação não é suficiente para caracterizar completamente ressonância
- Número cadeias isócronas é determinado pelas perturbações (*lm*, *ln*) que atuam sistema e sua superposição
- Uma perturbação (*lm*, *ln*): número cadeias isócronas constante e igual |*l*|
- Múltiplas perturbações (*lm*, *ln*): número cadeias pode variar com parâmetros sistema

EXPERIMENTOS EM UM TWT

• Válvula ondas progressivas (TWT, traveling wave tube) com 4 metros comprimento, especialmente concebida para investigar interações onda-partícula em plasmas (Laboratório PIIM, Aix-Marseille Université)



M. C. de Sousa et al., Phys. Plasmas 27, 093108 (2020)



(a) Estrutura TWT [Doveil *et al.*, *Chaos* **16**, 033103 (2006)]: (1) hélice; (2) canhão elétrons; (3) detector trocoidal velocidade; (4) antena móvel; (5) tubo vidro a vácuo; (6) cilindro radiofrequência aterrado, com ranhuras para movimento axial antenas; (7) bobina magnética principal; (8) terminações resistivas para reduzir reflexões.

(b) Foto TWT [M. C. de Sousa *et al.*, *Phys. Plasmas* 27, 093108 (2020)]:
(7) bobina principal - campo magnético axial para confinar feixe;
(9) bobinas retangulares - campos magnéticos perpendiculares direção axial para manter feixe alinhado com eixo TWT.

- Experimentos sobre interação feixe-plasma
- Plasma possui muito ruído de fundo
- TWT simula sistemas feixe-plasma com nível muito baixo ruído
- TWT: ondas eletromagnéticas interagem com feixe elétrons no vácuo
- Analisamos propagação ondas, feixe elétrons, sua interação, e comparamos com previsões teóricas (concordância ótima)
- Investigamos efeitos não-lineares devido trocas energia e momento entre ondas e elétrons: modulação energia feixe, crescimento onda, formação pacotes elétrons que são aprisionados potencial onda

M. C. de Sousa et al., Phys. Plasmas 27, 093108 (2020)

Estudos importantes para:

- Física plasmas,
- Dispositivos que usam interação onda-partícula;
- Melhoria TWTs industriais (2 a 30 cm comprimento), usados como amplificador sinal comunicações sem fio, principalmente telecomunicação espacial [ex: satélites, sondas como Rosetta (primeira a pousar em cometa), New Horizons (explorar Plutão), etc.]

Editor's pick: M. C. de Sousa *et al.*, "Wave-particle interactions in a long traveling wave tube with upgraded helix", *Phys. Plasmas* **27**, 093108 (2020)