

Estudo Dirigido

Pêndulo e Henon-Heiles

Iberê Luiz Caldas
Luis Fernando Bernardi de Souza

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

September 18, 2024

1. Introdução à integração numérica de sistemas Hamiltonianos
Hamiltonianas separáveis
2. Pêndulo
3. Integradores Simpléticos
4. Seções de Poincaré
5. Hamiltoniana de Hénon-Heiles

- Análise numérica de sistemas hamiltonianos não integráveis

- Integração numérica das equações de Hamilton
- Hamiltoniana com dois graus de liberdade
- Obter numericamente mapas de Poincaré
- Implementar programa numérico

Hamiltonianas separáveis

- Equações de Hamilton

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

- Integração numérica - Integrador convencional

$$\begin{aligned} q_j^{n+1} &= q_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{(q^{(n)}, p^{(n)})}, \\ p_j^{n+1} &= p_j^n - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q_j} \right|_{(q^{(n)}, p^{(n)})} \end{aligned} \tag{1}$$

nos quais $j = 1, 2, \dots, N$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$.

- Integração numérica - Euler simplético

$$\begin{aligned}q_j^{n+1} &= q_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{(q^{(n)}, p^{(n)})}, \\p_j^{n+1} &= p_j^n - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q_j} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}\end{aligned}\tag{2}$$

Hamiltoniana do Pêndulo

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} - \cos q$$

- (a)** Considerando a Hamiltoniana adimensional do pêndulo simples, descrita pela equação acima, escreva as expressões para $q^{(n+1)}$ e $p^{(n+1)}$, para o método de Euler convencional.
- (b)** Realize a implementação computacional do método de Euler convencional para resolver as equações de movimento do pêndulo simples.
- (c)** A partir do programa desenvolvido no exercício anterior, construa curvas de $q(t) \times t$ e $p(t) \times t$ considerando dois conjuntos de condições iniciais. Primeiramente, escolha uma condição inicial que resulte na libração do pêndulo. Em seguida, escolha uma condição inicial que resulte na rotação do pêndulo. Em cada caso, utilize três valores distintos para o passo de tempo, $t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, colocando as três curvas em um mesmo gráfico. Comente os resultados, ou seja, avalie se as curvas obtidas são consistentes com o comportamento esperado para as variáveis $q(t)$ e $p(t)$ do pêndulo simples.

Figura 1 – Libração do pêndulo simples

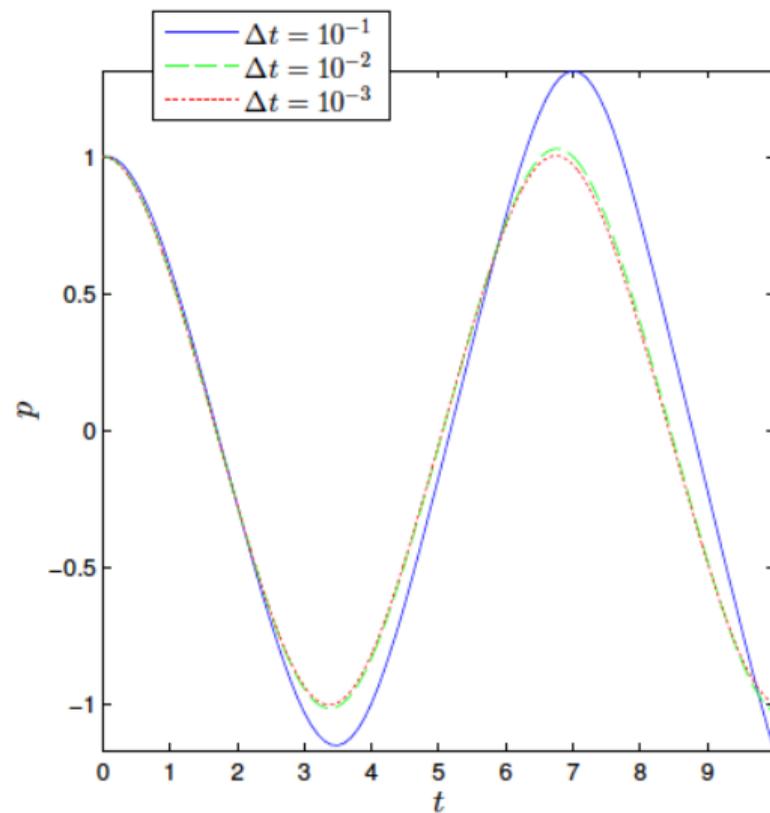
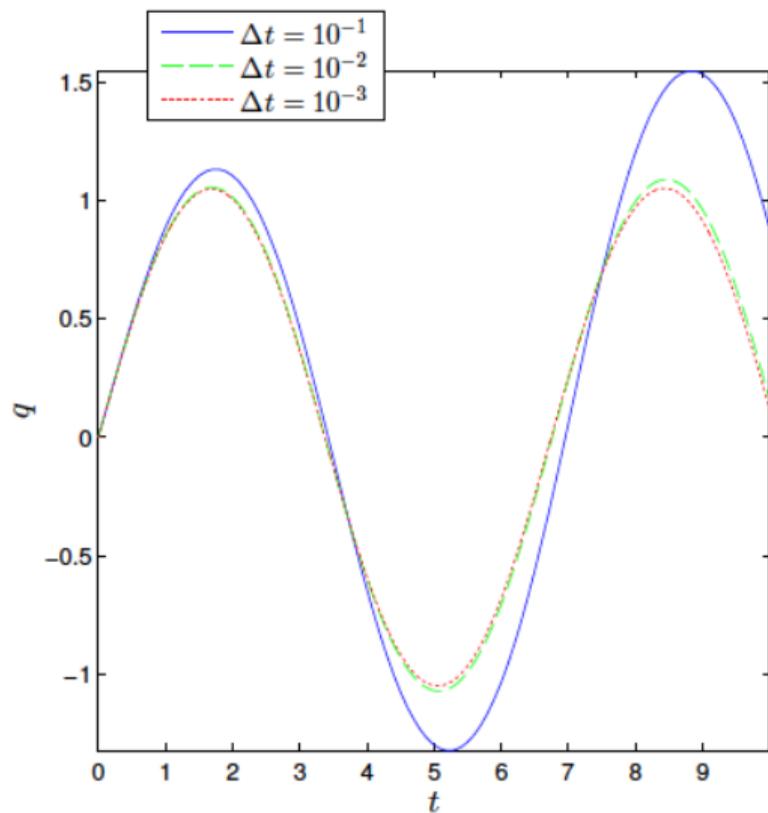
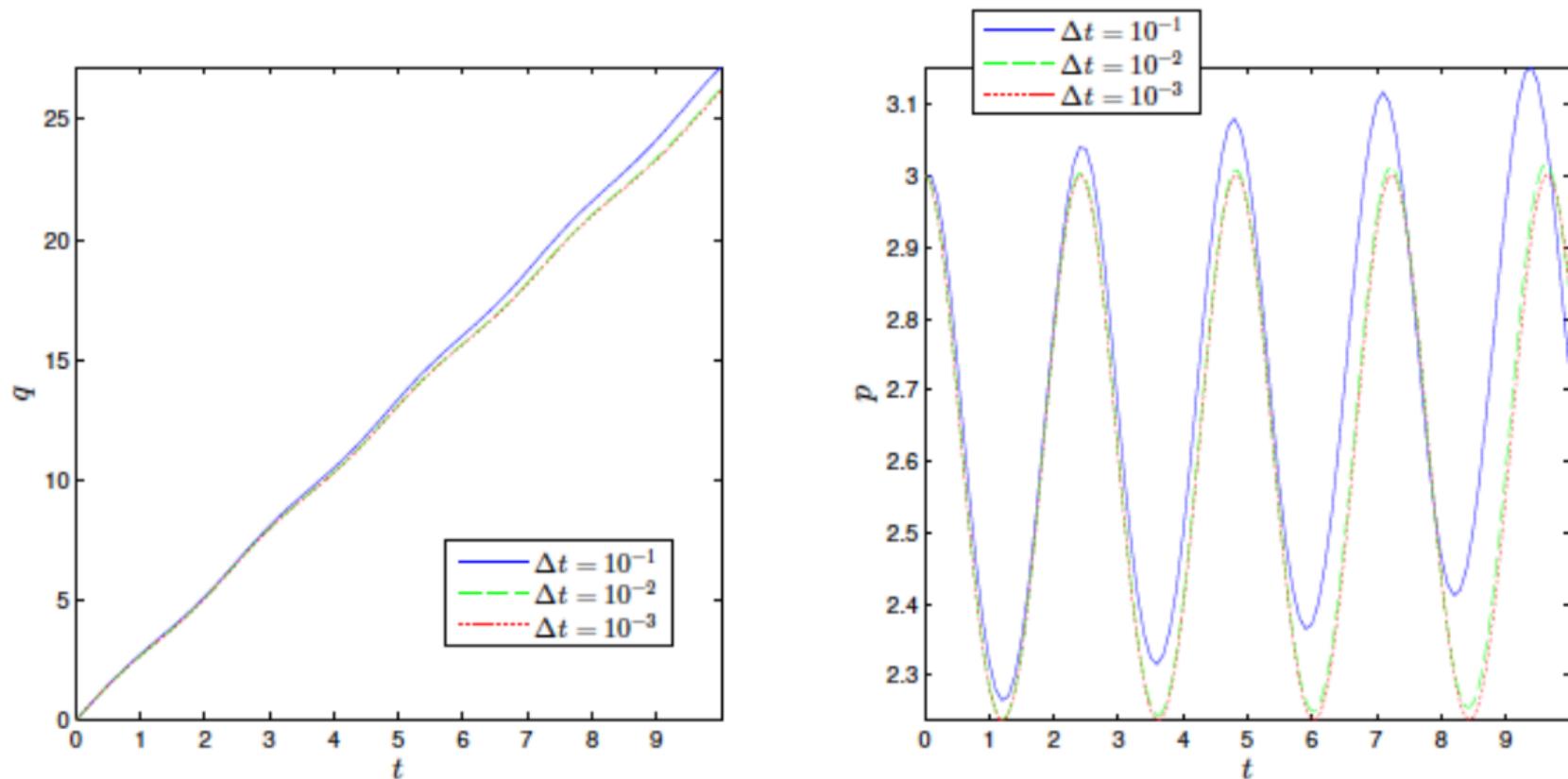


Figura 2 – Rotação do pêndulo simples



(d) Verifique numericamente o comportamento da energia total do pêndulo simples. Com este objetivo, construa os gráficos de $E(t) \times t$ para as duas condições iniciais utilizadas no exercício anterior. Utilize novamente os três valores distintos para o passo de tempo, $t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, colocando as três curvas obtidas em um mesmo gráfico. Anexe as figuras elaboradas ao seu trabalho. Comente os resultados, ou seja, avalie se as curvas obtidas são compatíveis com o comportamento esperado para a energia total do sistema.

Figura 3 – Energia de libração do pêndulo simples

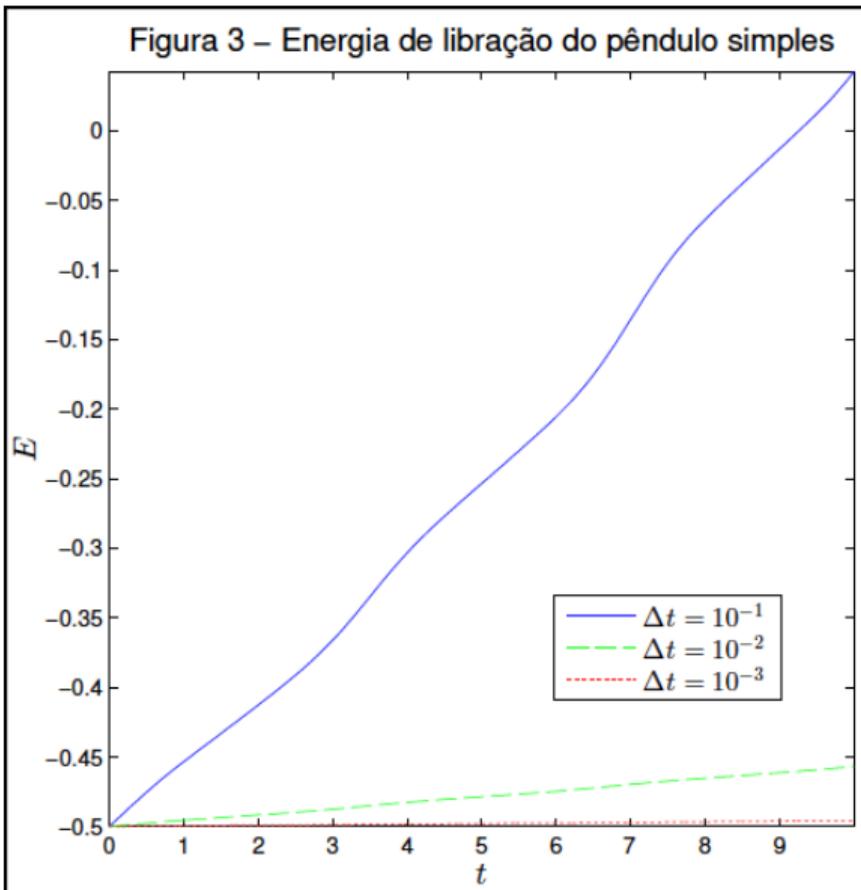
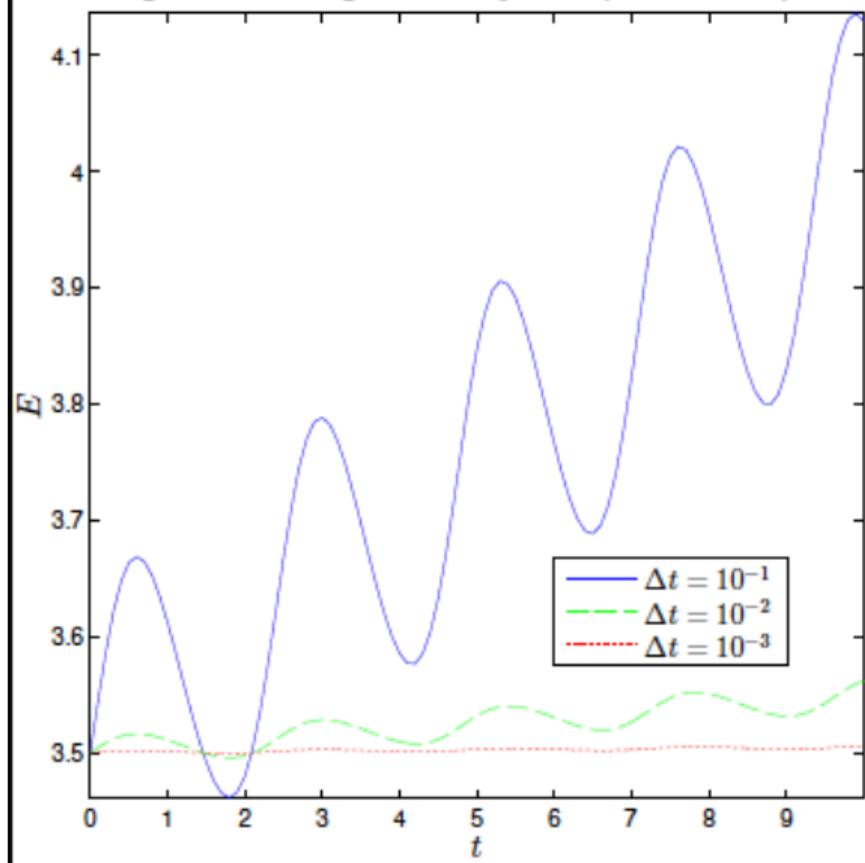


Figura 4 – Energia de rotação do pêndulo simples



(e) Construa os gráficos de $p(t) \times q(t)$ para as duas condições iniciais utilizadas nos exercícios anteriores. Em cada caso, utilize novamente os três tamanhos de passo de tempo, $t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, colocando todas as três curvas em um mesmo gráfico. Anexe as figuras elaboradas ao seu trabalho. Comente os resultados, ou seja, avalie se as trajetórias obtidas numericamente apresentam o comportamento esperado do pêndulo simples no espaço de fase.

Figura 5 – Trajetória de libração do pêndulo simples

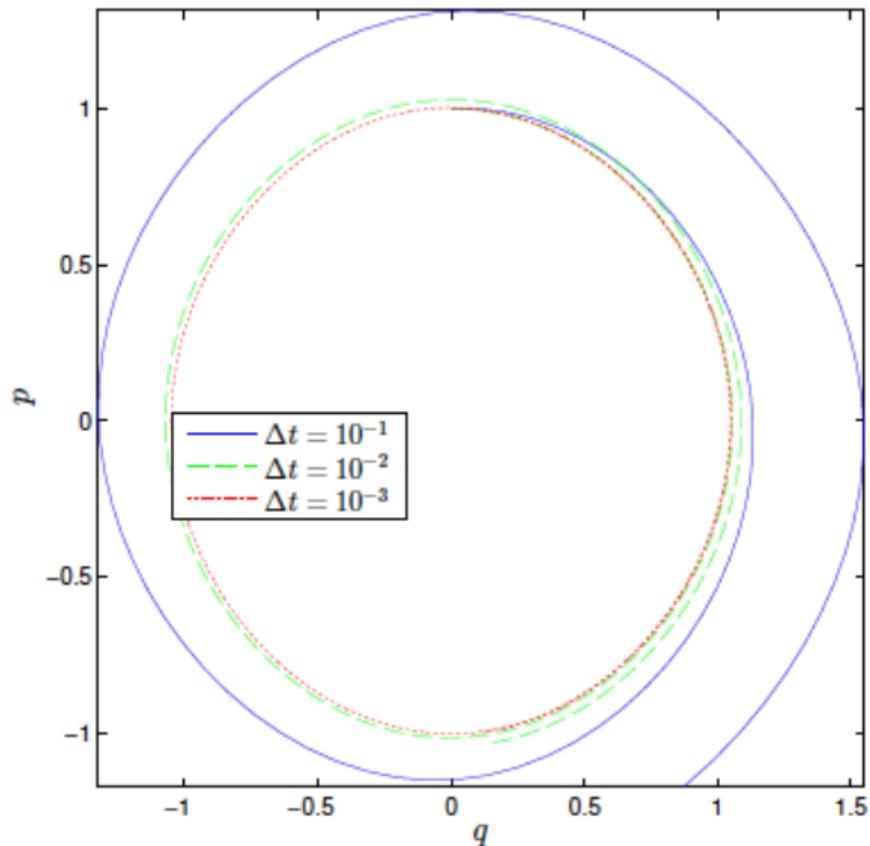
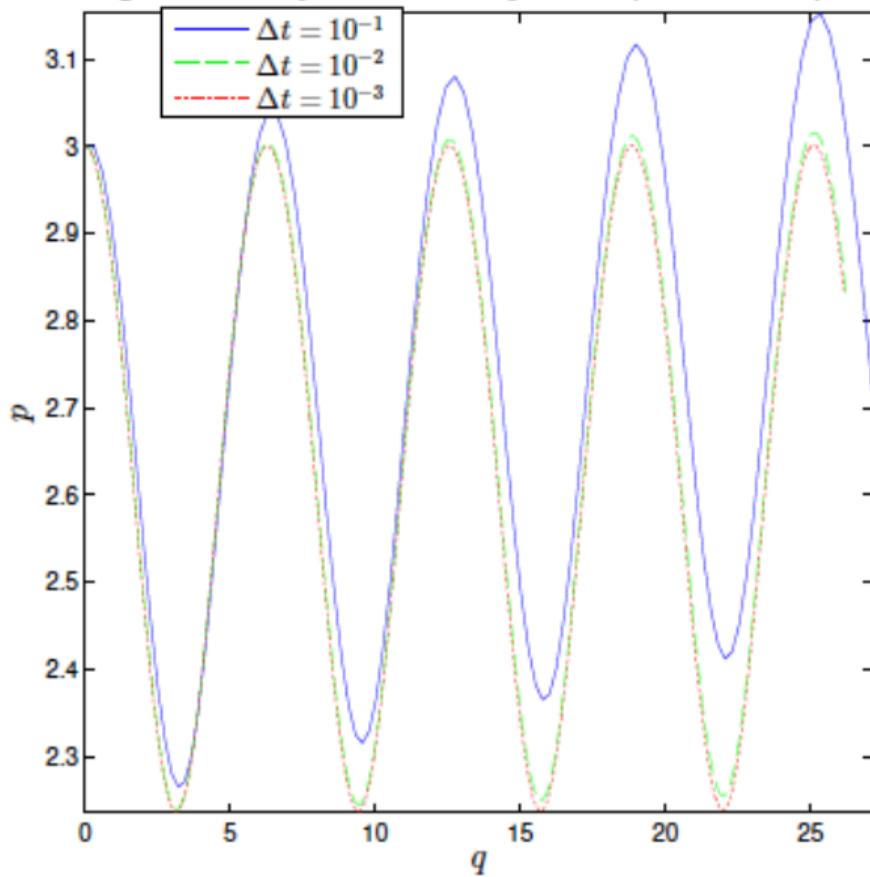


Figura 6 – Trajetória de rotação do pêndulo simples



- (f)** Considerando novamente a Hamiltoniana adimensional do pêndulo simples, escreva as expressões para $q^{(n+1)}$ e $p^{(n+1)}$ utilizando o método de Euler simplético.
- (g)** Realize a implementação computacional do método de Euler simplético para resolver as equações de movimento do pêndulo simples.
- (h)** Reproduza as figuras anteriores, mas agora utilizando o integrador simplético.

Figura 7 – Libração do pêndulo simples (versão modificada)

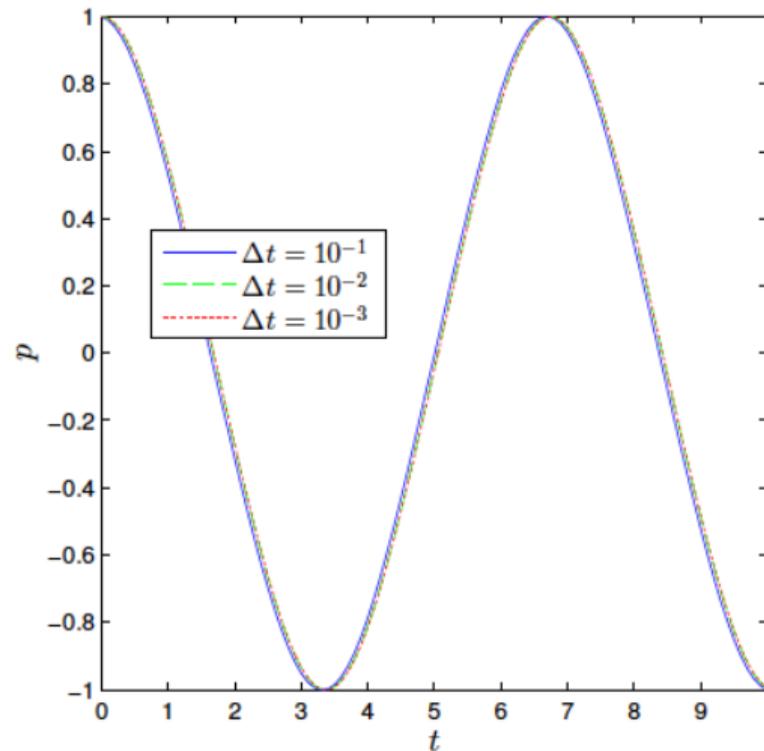
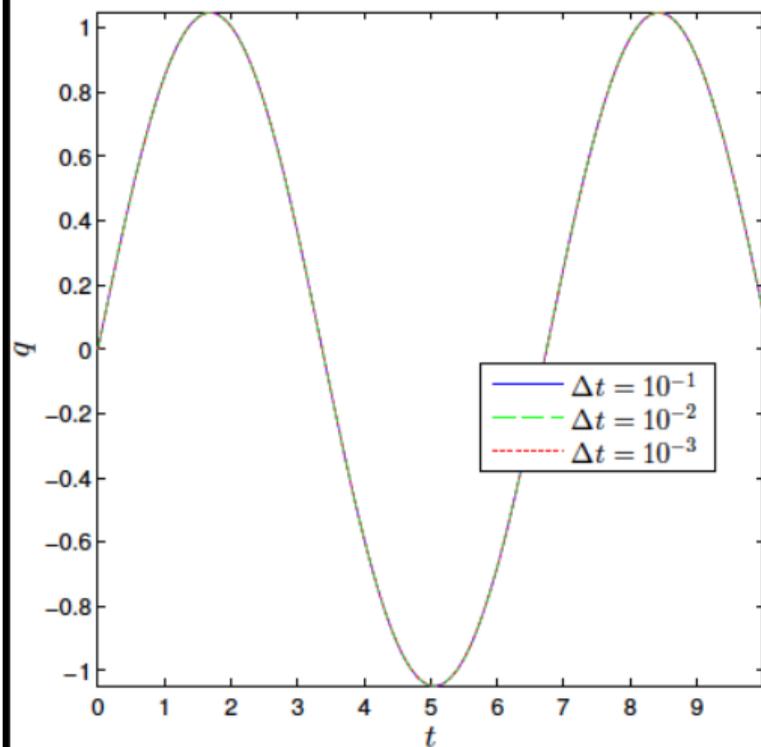


Figura 8 – Rotação do pêndulo simples (versão modificada)

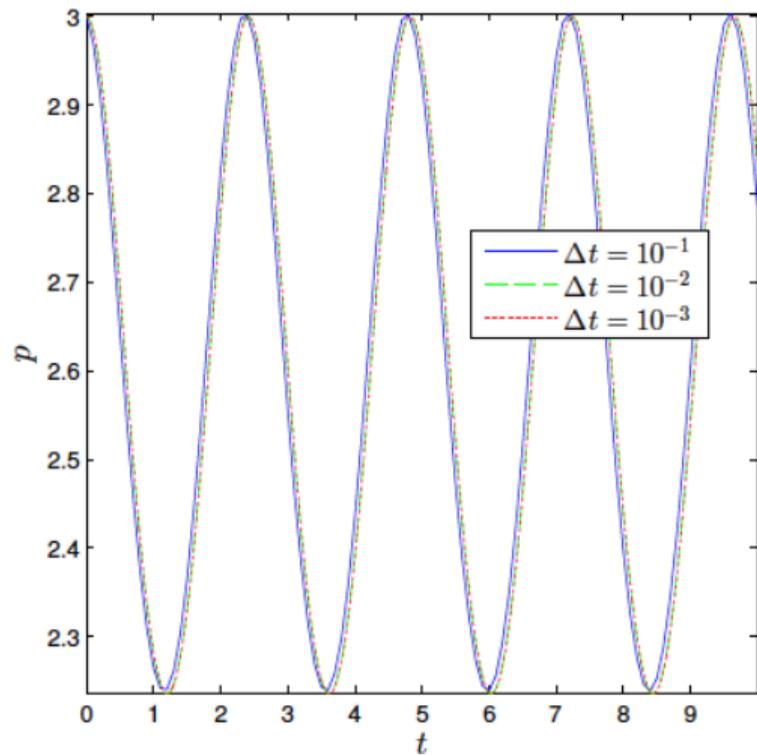
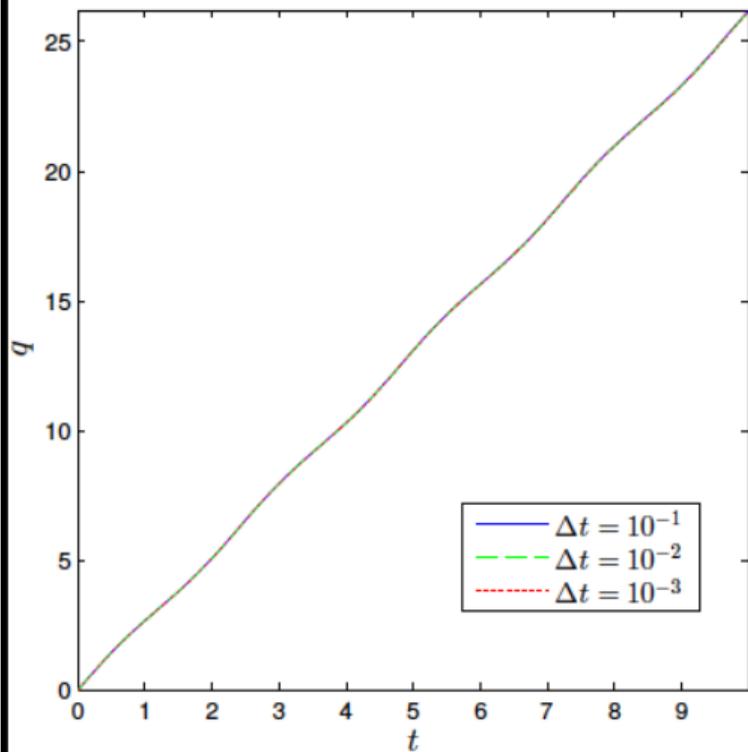


Figura 9 – Energia de libração do pêndulo simples (versão modificada)

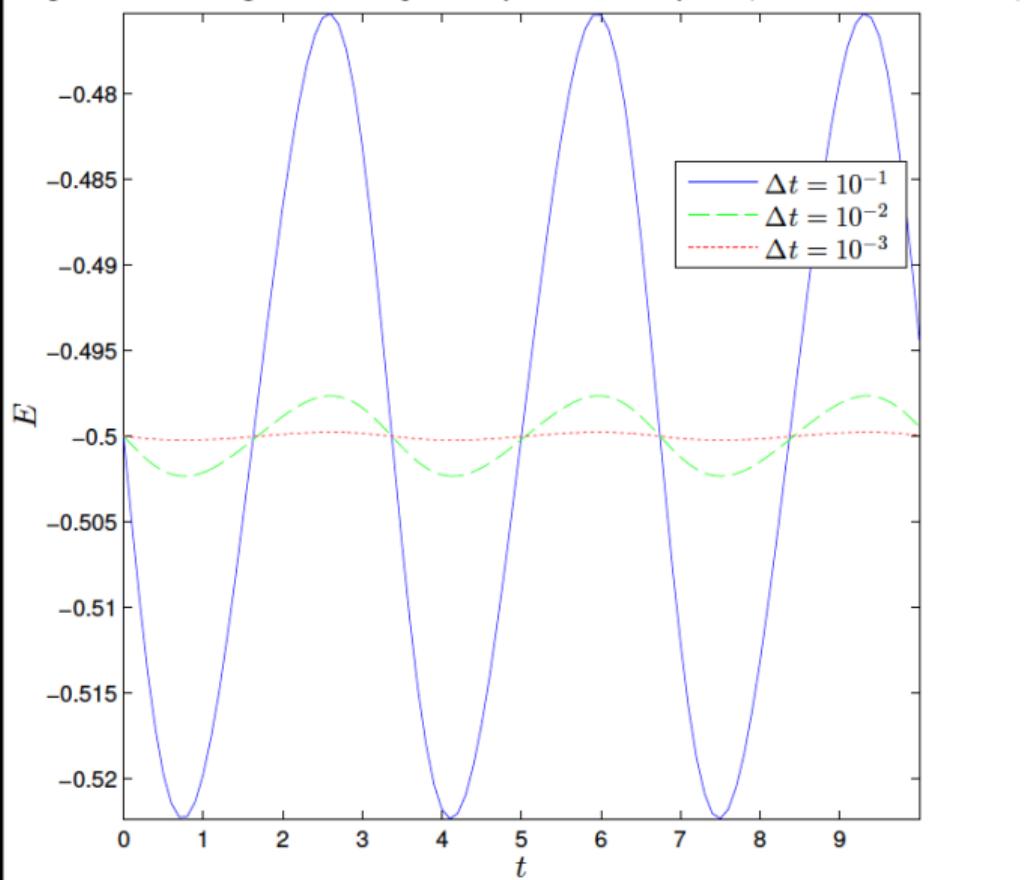


Figura 10 – Energia de rotação do pêndulo simples (versão modificada)

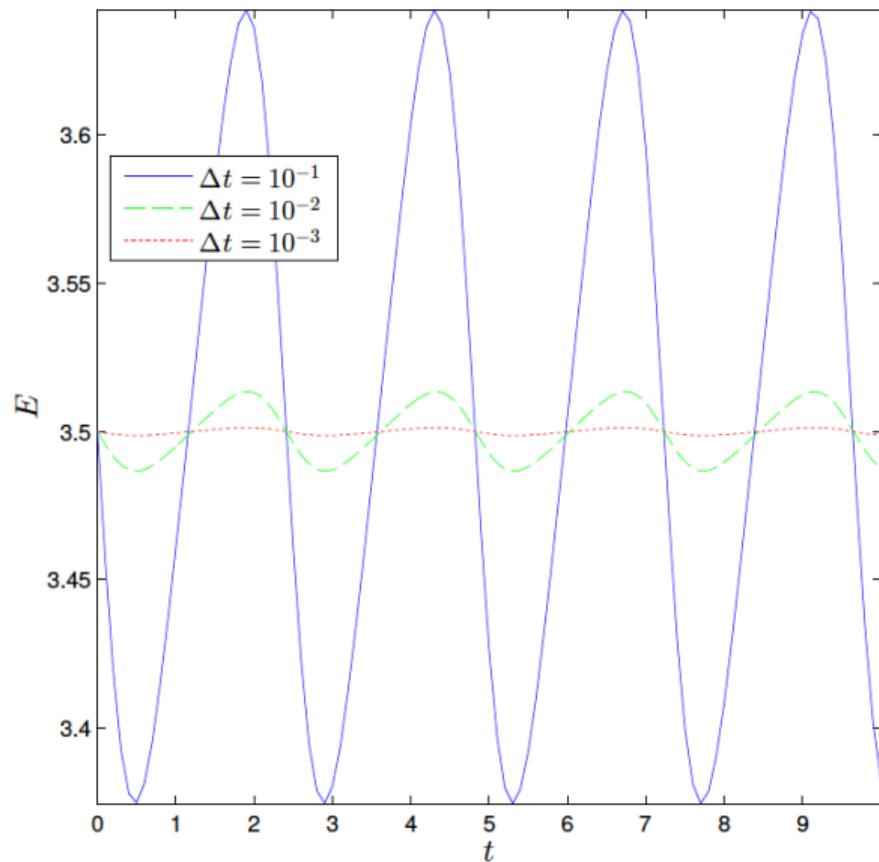


Figura 11 – Trajetória de libração do pêndulo simples (versão modificada)

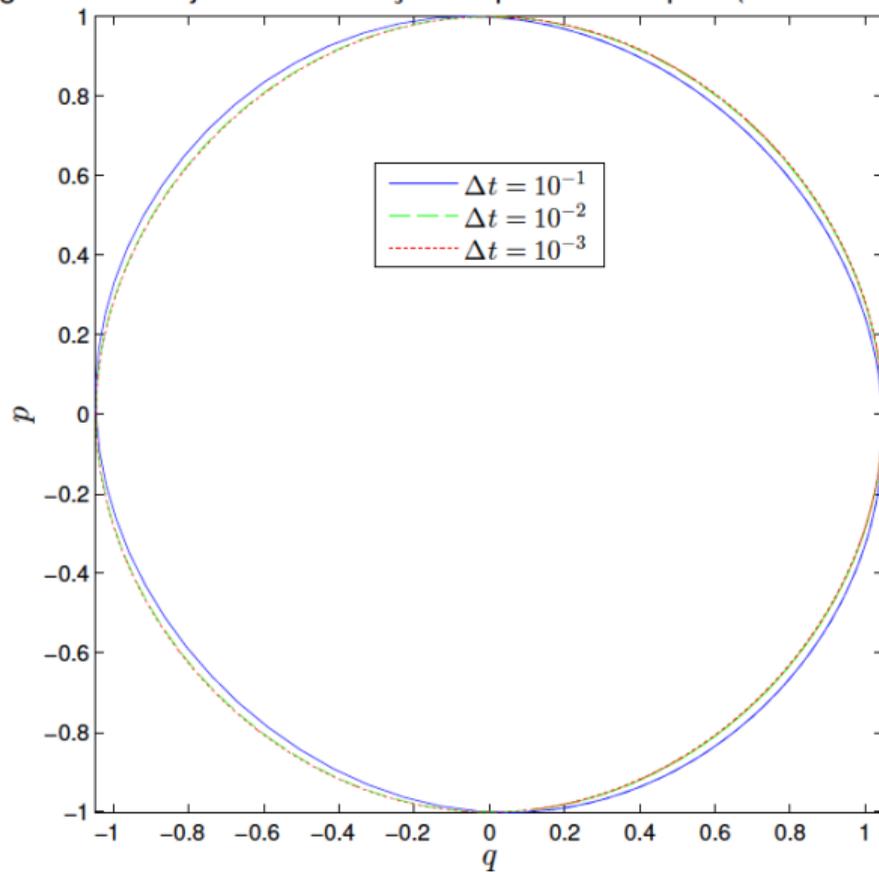
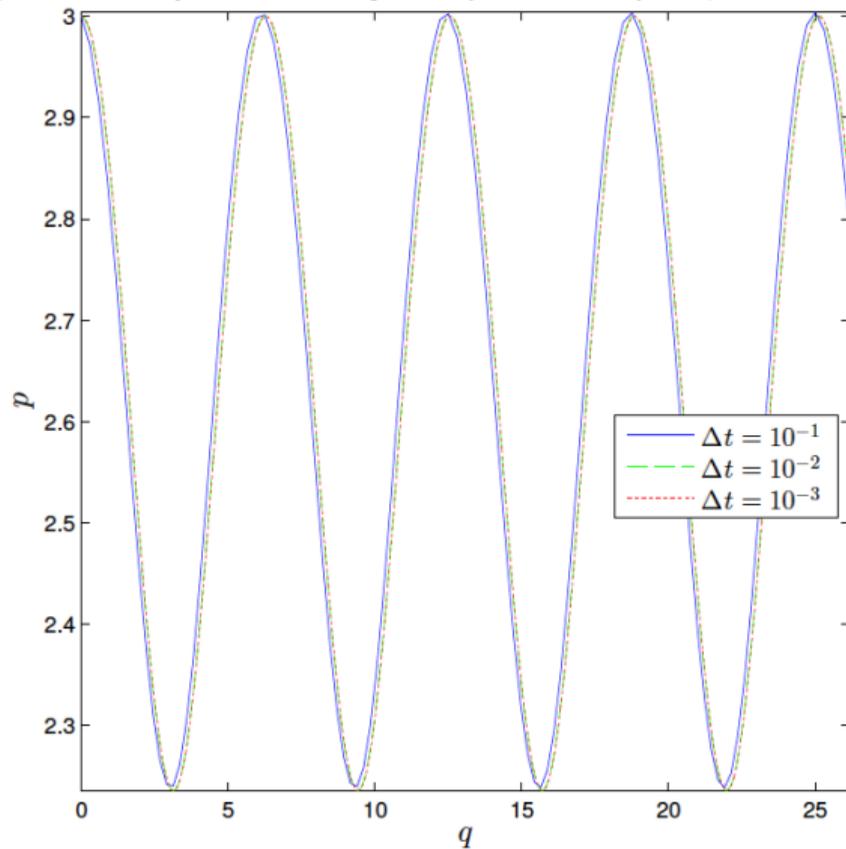


Figura 12 – Trajetória de rotação do pêndulo simples (versão modificada)



A alteração realizada sobre o programa, durante o exercício do pêndulo, produz um efeito drástico sobre a aproximação numérica. Este resultado decorre do fato que o mapa Euler simplético preserva uma importante propriedade estrutural das equações de Hamilton, as quais são caracterizadas como simpléticas. Ou seja, considerando três trajetórias separadas infinitesimalmente, designadas por $(p(t), q(t))$, $(p(t) + \delta p(t), q(t) + \delta q(t))$, temos que a quantidade

$$\delta^2 a = \delta p \cdot \delta q' - \delta q \cdot \delta p',$$

conhecida como *área simplética diferencial*, é independente do tempo. No caso de sistemas Hamiltonianos com um único grau de liberdade, a quantidade $\delta^2 a$ pode ser identificada como a área de um paralelogramo infinitesimal, conforme mostrado na figura 1.

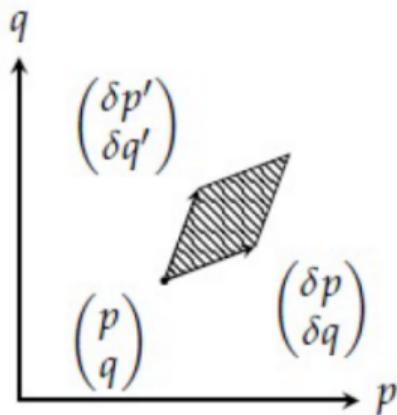


Figure: Área infinitesimal definida pelos vetores $(\delta p, \delta q)$ e $(\delta p', \delta q')$.

Em um espaço de fase bidimensional, a propriedade de conservação da área simplética coincide imediatamente com o teorema de Liouville, que determina a incompressibilidade do fluxo gerado por sistemas Hamiltonianos. Portanto, para verificar se um método de integração é simplético, precisamos apenas calcular o determinante Jacobiano do mapa que define o integrador numérico. Ou seja, no caso em que

$$|J| = \left| \frac{\partial(p^{(n+1)}, q^{(n+1)})}{\partial(p^{(n)}, q^{(n)})} \right| = 1,$$

podemos concluir que o mapa preserva áreas e, conseqüentemente, é simplético.

O método de integração correspondente ao mapa (3) é conhecido, apropriadamente, como Euler simplético (ou Euler-Cromer). Considerando um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, o método de Euler simplético é descrito pelo seguinte mapa:

$$\begin{aligned}q_j^{n+1} &= q_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial p_j} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}, \\p_j^{n+1} &= p_j^n - \Delta t \left. \frac{\partial H}{\partial q_j} \right|_{(q^{(n+1)}, p^{(n)})}\end{aligned}\tag{3}$$

no qual $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ e $j = 1, 2, \dots, N$. Diferentemente do mapa (2), a definição (3) também é aplicável a Hamiltonianas não separáveis, as quais não serão abordadas neste estudo dirigido.

No presente estudo dirigido, consideramos somente o caso de Hamiltonianas separáveis, de maneira que podemos escrever a seguinte realção:

$$H(p, q) = K(p) + U(q).$$

Como consequência da equação anterior, obtemos que

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial p} = \dot{q}(p)$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} = \dot{p}(q).$$

Observe que o pêndulo simples satisfaz as relações anteriores, ou seja, as derivadas da Hamiltoniana em relação a p ou q dependem somente da própria variável de derivação.

Cálculo de seções de Poincaré

De maneira geral, o cálculo numérico de seções de Poincaré é composto por duas partes. Primeiramente, precisamos de um método de integração, o qual utilizamos para obter as trajetórias do sistema dinâmico a partir de diversas condições iniciais. Esta primeira parte do procedimento de construção de um mapa de Poincaré está representada no presente estudo dirigido pelo método de Euler simplético. A segunda parte do problema consiste na detecção e cálculo das interseções entre as trajetórias e uma superfície Σ , que define a seção escolhida do espaço de fase. A proposta deste apêndice é apresentar o método de Hénon para a avaliação numérica destas interseções [1].

Considere o sistema dinâmico r -dimensional:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_1}{dt} &= f_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r), \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= f_2(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r), \\ &\vdots \\ \frac{d\mu_r}{dt} &= f_r(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r).\end{aligned}\tag{4}$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher as variáveis dinâmicas de modo que a superfície Σ seja definida por

$$\mu_r = \mu_r^s, \quad (5)$$

onde μ_r^s representa um valor particular da variável μ_r . Agora, considere dois instantes de tempo consecutivos do integrador numérico, representados por $\mu^{(n)}$ e $\mu^{(n+1)}$, para uma determinada condição inicial $\mu(0)$. Podemos afirmar que esta trajetória específica do sistema dinâmico atravessa a superfície Σ , em algum ponto entre $\mu^{(n)}$ e $\mu^{(n+1)}$, no caso em que a seguinte condição é satisfeita:

$$(\mu_r^{(n+1)} - \mu_r^s)(\mu_r^{(n)} - \mu_r^s) < 0. \quad (6)$$

Empregando a relação anterior podemos detectar o cruzamento da trajetória com a superfície Σ . No entanto, os valores das variáveis $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1})$, no instante do cruzamento, permanecem desconhecidos. Além disso, também desconhecemos o valor de t na interseção entre a trajetória e a superfície.

Com o intuito de calcular os valores das variáveis dinâmicas no instante exato da interseção com a superfície Σ , utilizaremos um simples artifício matemático: reformularemos o sistema dinâmico de maneira que a variável μ_r torne-se a variável independente. Ou seja, para $f_r \neq 0$ nas vizinhanças da interseção, podemos reescrever o sistema (4) no seguinte formato:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{d\mu_r} &= \frac{f_1}{f_r}, \\ \frac{d\mu_2}{d\mu_r} &= \frac{f_2}{f_r}, \\ &\vdots \\ \frac{d\mu_{r-1}}{d\mu_r} &= \frac{f_{r-1}}{f_r}, \\ \frac{dt}{d\mu_r} &= \frac{1}{f_r}. \end{aligned} \tag{7}$$

Inserindo o sistema (7) em um integrador numérico, podemos determinar imediatamente os valores de interseção da trajetória com a superfície Σ . Este objetivo é alcançado com a utilização do seguinte passo de integração:

$$\Delta\mu_r = \mu_r^s - \mu_r^{(n)}. \quad (8)$$

Note que a equação anterior supõe a quantidade $\mu^{(n)}$ como o ponto de partida para a integração numérica do sistema (7).

Por fim, resumamos as etapas para a construção numérica de uma seção de Poincaré na superfície Σ definida pela equação (5):

1. Escolha uma condição inicial $\mu^{(0)}$.
2. Utilize um integrador numérico para calcular a evolução temporal do sistema (4). A cada passo de tempo, realize a verificação da condição (6).
3. Sempre que a condição (6) for satisfeita, empregue o sistema (7) para a realização de um único passo de integração, cujo valor está indicado na equação (8). Neste caso, utilize as coordenadas $\mu(n)$ como ponto de partida.
4. Após a integração com passo μ_r , os valores $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1})$, que constituem a interseção da trajetória com a superfície Σ , são obtidos. Estes valores são utilizados na construção da seção de Poincaré.
5. Continue a integração numérica do sistema (4), a partir de $\mu^{(n+1)}$, até que uma nova interseção seja detectada.
6. A integração numérica da trajetória com condição inicial $\mu^{(0)}$ deve ser realizada por um longo período de tempo. Consequentemente, os procedimentos 2,3,4 e 5 serão repetidos diversas vezes.
7. Repita todos os procedimentos anteriores para várias condições iniciais. No caso de um sistema Hamiltoniano, escolha as novas condições iniciais na mesma superfície energética da primeira trajetória. Além disso, as novas condições iniciais devem ser escolhidas de maneira a explorar adequadamente o espaço de fase energeticamente acessível.

Hamiltoniana de Hénon-Heiles

Esta seção do estudo dirigido refere-se à função Hamiltoniana apresentada no artigo de Hénon e Heiles [2], que descreve o movimento de uma estrela em uma galáxia com potencial gravitacional de simetria cilíndrica. A Hamiltoniana de Hénon-Heiles é descrita pela expressão

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

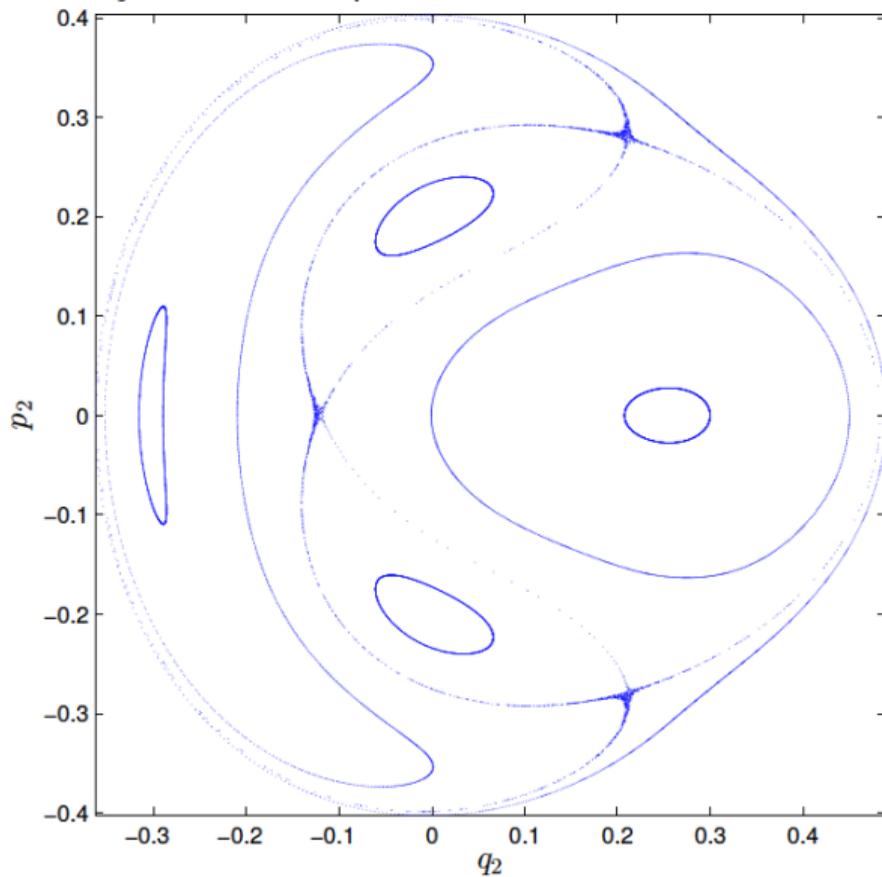
Observe que a Hamiltoniana anterior satisfaz a condição de separabilidade descrita pela equação (6).

(a) Considerando a Hamiltoniana (15), obtenha as equações para $q(n+1)$ e $p(n+1)$ de acordo com o método de Euler simplético.

(b) Realize a implementação computacional do método de Euler simplético para a Hamiltoniana de Hénon-Heiles. O programa desenvolvido será utilizado nos próximos exercícios para a construção de seções de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$, considerando $q_1 = 0$ e $p_1 > 0$. De maneira complementar ao método de Euler simplético, implemente também o algoritmo de Hénon para a construção de seções de Poincaré. Anexe o código do programa desenvolvido ao seu trabalho.

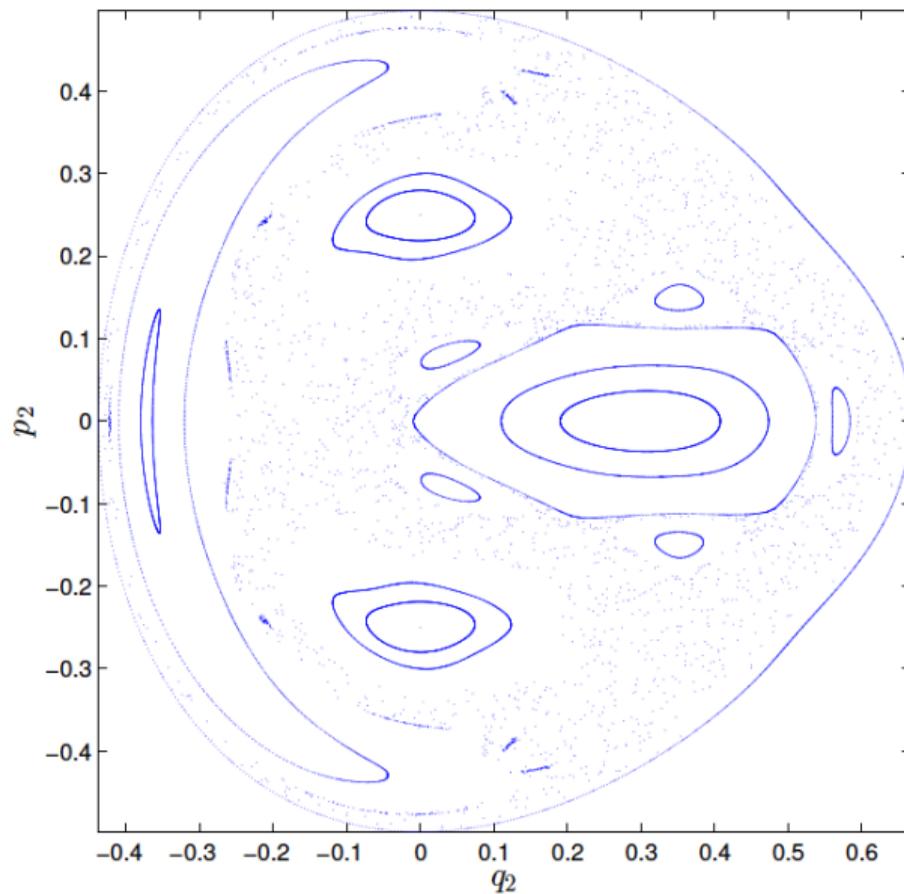
(c) Construa uma seção de Poincaré para trajetórias com energia total $E = 0.08333$. Anexe o gráfico obtido ao seu trabalho. Observe que a figura elaborada no presente exercício corresponde à figura 4 do artigo de Hénon e Heiles.

Figura 13 – Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Hénon–Heiles ($E=0.08333$)



(d) Repita os procedimentos do item anterior para $E = 0.125$. Anexe o gráfico obtido ao seu trabalho. Esta nova figura corresponde à figura 5 do artigo de Hénon e Heiles.

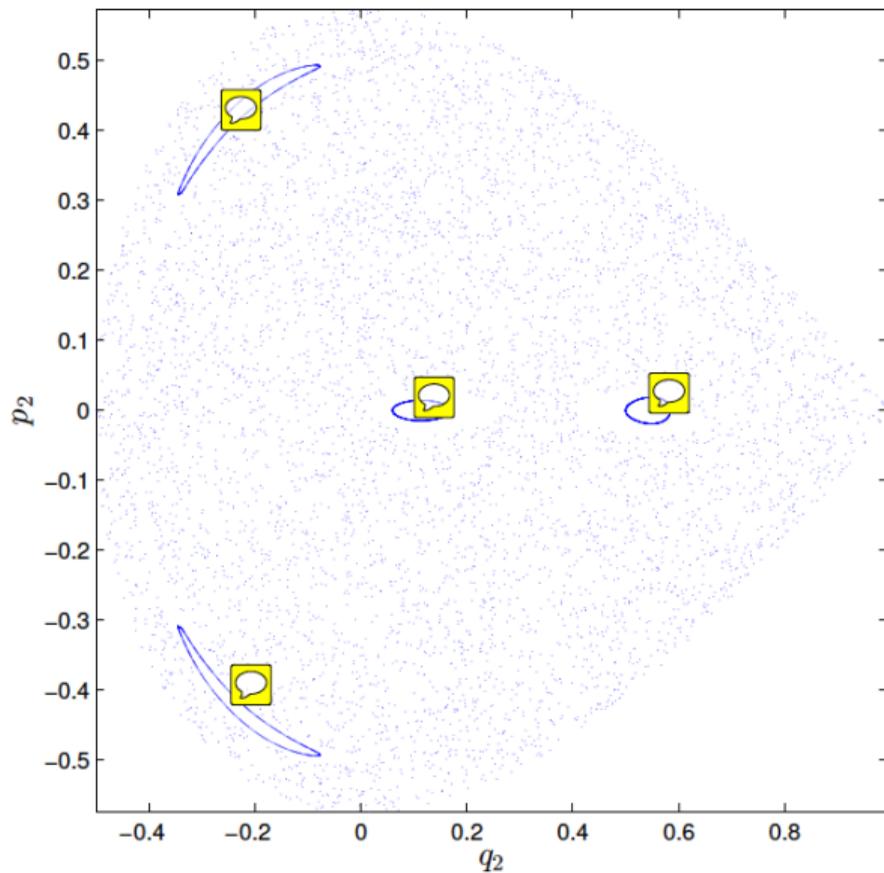
Figura 14 – Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Hénon–Heiles ($E=0.125$)



(e) Escolha uma condição inicial correspondente a uma trajetória periódica ou quase periódica na seção de Poincaré com $E = 0.125$. Considerando a condição inicial escolhida, utilize o método de Euler simplético para a construção de uma figura com os valores de $q_1 \times t$, $p_1 \times t$, $q_2 \times t$ e $p_2 \times t$. Anexe o gráfico obtido ao seu trabalho. Com o propósito de permitir uma visualização adequada do comportamento regular nas curvas apresentadas, selecione cuidadosamente o intervalo total de integração temporal.

(f) Construa uma seção de Poincaré para trajetórias com energia total $E = 0.16667$.

Figura 15 – Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Hénon–Heiles ($E=0.16667$)



References

- [1] M. Henon. “On the Numerical Computation of Poincaré Maps”. In: *Physica D* 5 (1982), pp. 412–414.
- [2] M. Henon and C. Heiles. “The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments”. In: *The Astronomical Journal* 69 (1964), pp. 73–79.

Estudo Dirigido

Walker-Ford

Iberê Luiz Caldas

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

September 18, 2024

1. Introdução à integração numérica de sistemas Hamiltonianos
2. Hamiltoniana Walker-Ford

- Análise numérica de sistemas hamiltonianos não integráveis
- Hamiltonianas não separáveis

- Integração numérica das equações de Hamilton
- Hamiltoniana com dois graus de liberdade
- Obter numericamente mapas de Poincaré
- Implementar programa numérico

Hamiltonianas não separáveis - Mapas implícitos

Em nosso primeiro estudo dirigido, consideramos apenas a integração numérica de sistemas dinâmicos decorrentes de Hamiltonianas separáveis. Ou seja, nosso interesse restringiu-se a Hamiltonianas com o seguinte formato:

$$H(q, p) = K(p) + U(q). \quad (1)$$

Entretanto, a separação de variáveis indicada acima não é factível em grande parte dos sistemas Hamiltonianos. No caso de Hamiltonianas não separáveis, as equações canônicas de movimento assumem a seguinte forma:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}(p, q), \quad (2a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}(p, q), \quad (2b)$$

nas quais, de maneira geral, ambas as quantidades \dot{q} e \dot{p} possuem dependência funcional simultânea na posição e momento canônicos. Portanto, em um determinado instante de tempo, a variação temporal de uma variável dinâmica constitui uma função desta mesma variável. Esta característica resulta em complicações durante a aplicação de métodos simpléticos de integração numérica, uma vez que a evolução temporal do sistema é descrita por um mapa implícito.

Considerando um sistema Hamiltoniano canônico com N graus de liberdade e Hamiltoniana não separável, o método de Euler simplético é descrito pelas seguintes equações:

$$q_j^{(n+1)} = q_j^{(n)} + \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^{(n+1)}, p^{(n)}), \quad (3a)$$

$$p_j^{(n+1)} = p_j^{(n)} - \Delta t \frac{\partial H}{\partial q_j}(q^{(n+1)}, p^{(n)}), \quad (3b)$$

nas quais $q^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \dots, q_N^{(n)})$, $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_N^{(n)})$ e $j = 1, 2, \dots, N$. Como esperado, as identidades (3) geralmente correspondem a um mapa implícito, uma vez que a derivada parcial $\frac{\partial H}{\partial p_j}$, quando calculada em $(q^{(n+1)}, p^{(n)})$, possui uma bastante provável dependência na variável $q_j^{(n+1)}$. Conseqüentemente, a determinação dos valores das posições canônicas $q^{(n+1)}$ está condicionada à resolução das equações (3a), as quais usualmente constituem um sistema algébrico não linear. De maneira distinta, os valores dos momentos canônicos não estão determinados implicitamente, visto que podemos utilizar as identidades (3b) para o cálculo imediato do vetor $p^{(n+1)}$, após conhecido o valor de $q^{(n+1)}$.

Resolução numérica de mapas implícitos

Com o propósito de utilizar o método de Euler simplético para a integração numérica de um sistema dinâmico com Hamiltoniana não separável, precisamos estabelecer um procedimento para a resolução do sistema algébrico constituído pelas equações (3a) a cada passo de tempo. No presente estudo dirigido, realizamos uma breve apresentação do método de Newton, o qual representa uma ferramenta numérica bastante simples e poderosa para a busca de soluções em sistemas algébricos não lineares. Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}g_1(q_1^{(n+1)}, q_2^{(n+1)}, \dots, q_N^{(n+1)}) &= 0, \\g_2(q_1^{(n+1)}, q_2^{(n+1)}, \dots, q_N^{(n+1)}) &= 0, \\&\vdots \\g_N(q_1^{(n+1)}, q_2^{(n+1)}, \dots, q_N^{(n+1)}) &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

no qual as quantidades g_j representam funções das variáveis reais $q_j^{(n+1)}$, para $j = 1, 2, \dots, N$. Por exemplo, no caso do método de Euler simplético, uma comparação entre as expressões (3a) e (4) resulta no seguinte formato para as funções g_j :

$$g_j(q_1^{(n+1)}, q_2^{(n+1)}, \dots, q_N^{(n+1)}) = q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)} - \Delta t \frac{\partial H}{\partial p_j}(q^{(n+1)}, p^{(n)}).\tag{5}$$

De maneira a facilitar a exibição do método de Newton, podemos reescrever o sistema de equações (4) em notação vetorial:

$$g(q^{(n+1)}) = 0 \quad (6)$$

na qual introduzimos a função vetorial $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)$. O método de Newton consiste basicamente em aproximar o conjunto de equações não lineares (6) por um sistema algébrico linear. Para esta finalidade, realizamos uma aproximação por série de Taylor em primeira ordem:

$$g(q^{(n+1)}) \approx g(q^{(n+1,0)}) + J(q^{(n+1,0)})(q^{(n+1)} - q^{(n+1,0)}), \quad (7)$$

na qual o vetor $q^{(n+1,0)}$ simboliza uma aproximação inicial para a solução das equações (6). Observe que, durante a aplicação do método de Euler simplético, uma escolha interessante para a aproximação inicial seria $q^{(n+1,0)} = q^{(n)}$. A matriz J , também introduzida na expressão (7), representa o Jacobiano das funções g , o qual definimos pela seguinte relação:

$$J(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1^{(n+1)}} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2^{(n+1)}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial q_N^{(n+1)}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1^{(n+1)}} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2^{(n+1)}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial q_N^{(n+1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial q_1^{(n+1)}} & \frac{\partial g_N}{\partial q_2^{(n+1)}} & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial q_N^{(n+1)}} \end{pmatrix}_{q^{(n+1)}=q} \quad (8)$$

Substituindo a aproximação (7) na equação (8), obtemos a definição para a primeira iteração do método de Newton:

$$J(q^{(n+1,0)})q^{(n+1,1)} = J(q^{(n+1,0)})q^{(n+1,0)} - g(q^{(n+1,0)}), \quad (9)$$

na qual o vetor $q^{(n+1,1)}$ corresponde à primeira solução resultante do algoritmo de Newton. Note que, para a obtenção da aproximação $q^{(n+1,1)}$, precisamos apenas resolver um sistema de equações lineares com matriz de coeficientes $J(q^{(n+1,0)})$ e vetor constante $J(q^{(n+1,0)})q^{(n+1,0)} - g(q^{(n+1,0)})$.

Com o objetivo de obter uma solução mais precisa, podemos empregar o resultado $q^{(n+1,1)}$ como a aproximação inicial em uma nova iteração do método de Newton. Evidentemente, podemos repetir este procedimento de retroalimentação diversas vezes, até que a precisão desejada seja alcançada. Portanto, conhecida a solução aproximada $q^{(n+1,m)}$, podemos realizar uma subsequente iteração do método de Newton com a utilização da seguinte fórmula:

$$J(q^{(n+1,m)})q^{(n+1,m+1)} = J(q^{(n+1,m)})q^{(n+1,m)} - g(q^{(n+1,m)}). \quad (10)$$

Conforme mencionado anteriormente, devemos prosseguir com as iterações do método de Newton até que encontremos uma solução com a precisão pretendida.

Como critério para a interrupção do processo iterativo, podemos empregar a seguinte relação:

$$|g(q^{(n+1,m+1)})| < \epsilon, \quad (11)$$

na qual o parâmetro ϵ simboliza um número real positivo com valor próximo a zero. Ou seja, quando uma solução $q^{(n+1,m+1)}$ satisfaz a identidade (6) com suficiente precisão, consideramos que o sistema algébrico não linear está numericamente resolvido. Desta forma, dentro da margem de erro permitida pelo parâmetro ϵ , a seguinte igualdade torna-se válida:

$$q^{(n+1)} = q^{(n+1,m+1)}. \quad (12)$$

Hamiltoniana Walker-Ford

Nesta seção, com o auxílio dos métodos numéricos discutidos anteriormente, realizaremos o estudo da Hamiltoniana de Walker-Ford (referência 3.1), cujo propósito é ilustrar o aparecimento de regiões caóticas no espaço de fase como consequência da interação de ressonâncias não lineares e a destruição de toros KAM. Podemos descrever a Hamiltoniana de Walker-Ford como a soma entre um termo integrável H_0 e uma perturbação H_1 :

$$H = H_0 + H_1, \quad (13a)$$

$$H_0 = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2, \quad (13b)$$

$$H_1 = \alpha J_1 J_2 \cos(2\phi_1 - 2\phi_2) + \beta J_1 J_2^3 \cos(2\phi_1 - 3\phi_2). \quad (13c)$$

Observe que a perturbação H_1 é constituída por dois termos ressonantes, cujas intensidades são controladas pelos parâmetros α e β . As quantidades ϕ_k e J_k , para $k = 1, 2$, denotam respectivamente as variáveis canônicas de ângulo e ação para a Hamiltoniana não perturbada.

- H com duas ressonâncias primárias $2/2$ e $2/3$
- Ilhas (primárias) $2/2$ existem para $E < 3/13 = 0.23$. Em $E = 0.23$ ocorre uma bifurcação
- Ilhas (primárias) $2/3$ existem para $E < 0.16$. Em $E = 0.16$ ocorre uma bifurcação

(a) Demonstre que a Hamiltoniana H é uma constante de movimento para quaisquer valores dos parâmetros α e β . Em seguida, mostre que as funções $F_1 = J_1 + J_2$, para $\beta = 0$, e $F_2 = 3J_1 + 2J_2$, para $\alpha = 0$, também representam constantes de movimento. Note que, como consequência dos resultados anteriores, determinamos que a Hamiltoniana de Walker-Ford é integrável nos casos em que os parâmetros α ou β são nulos.

(b) Considerando a Hamiltoniana (13a), escreva as equações para $\phi_k^{(n+1)}$ e $J_k^{(n+1)}$ de acordo com o método de Euler simplético.

(c) Realize a implementação computacional das equações obtidas no exercício anterior. Em seu programa, de maneira complementar ao método de Euler simplético, realize também a implementação do método de Newton, uma vez que a resolução de sistemas algébricos não lineares será necessária para a integração das equações de movimento. Conforme mencionado anteriormente, a utilização do método de Newton está condicionada à resolução iterativa de sistemas algébricos lineares. Portanto, a implementação em seu programa do algoritmo de decomposição LU para a resolução numérica de sistemas lineares também é necessária. Em breve, os resultados do presente exercício serão utilizados para a construção de seções de Poincaré. Desta maneira, o algoritmo de Hénon para a determinação de seções de Poincaré também deve ser implementado em seu programa. Anexe o código do programa desenvolvido ao seu trabalho.

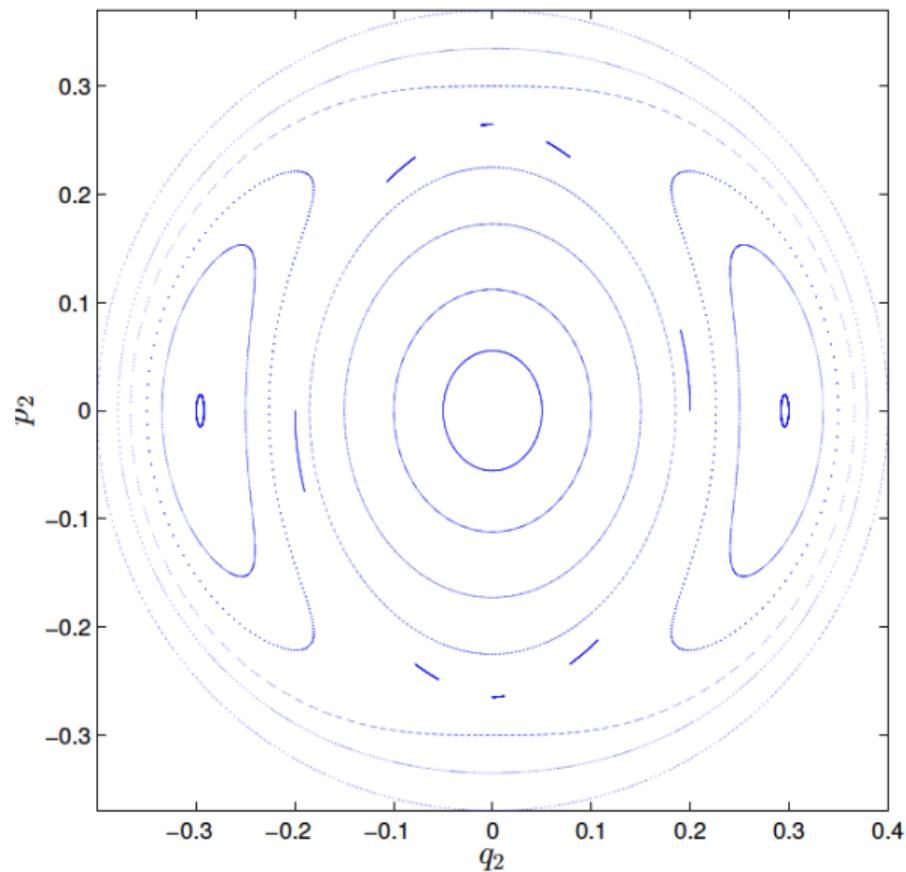
(d) Considere a seguinte transformação de variáveis:

$$q_k = \sqrt{2J_k} \cos \phi_k, \quad (14a)$$

$$p_k = -\sqrt{2J_k} \sin \phi_k, \quad (14b)$$

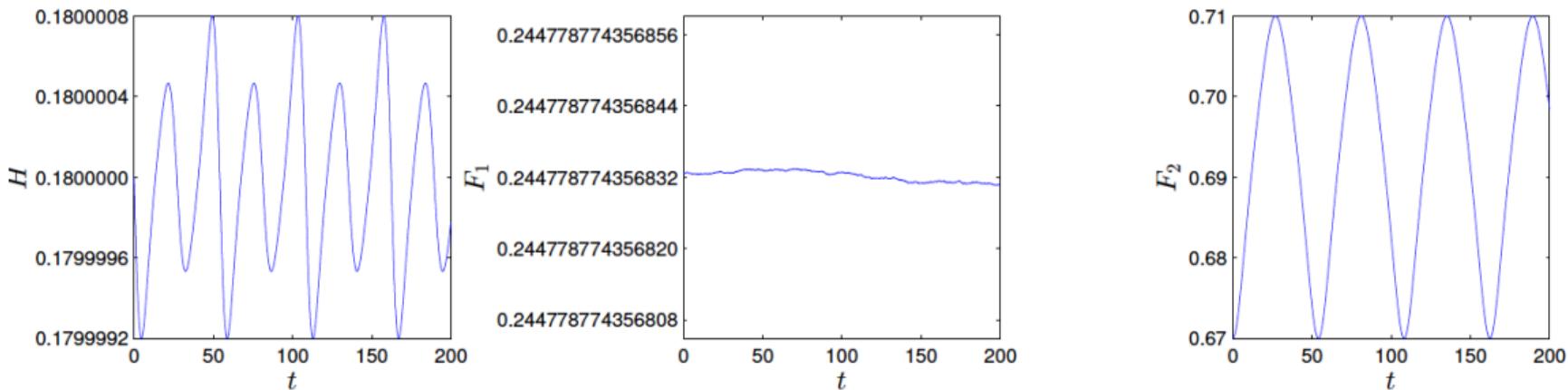
na qual as quantidades q_k e p_k , para $k = 1, 2$, representam respectivamente variáveis canônicas de posição e momento. Construa uma seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = 0, 1$, $\beta = 0$ e energia total $E = 0, 18$. Observe que as condições $q_1 = 0$ e $p_1 \geq 0$ equivalem à identidade $\phi_1 = 3\pi/2$. Indique os pontos fixos elípticos e hiperbólicos em seu gráfico. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Note que o gráfico elaborado no presente exercício é semelhante à figura 6 do artigo de Walker e Ford.

Figura 1 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-For
($\alpha = 0.1$, $\beta = 0$ e $E = 0.18$)



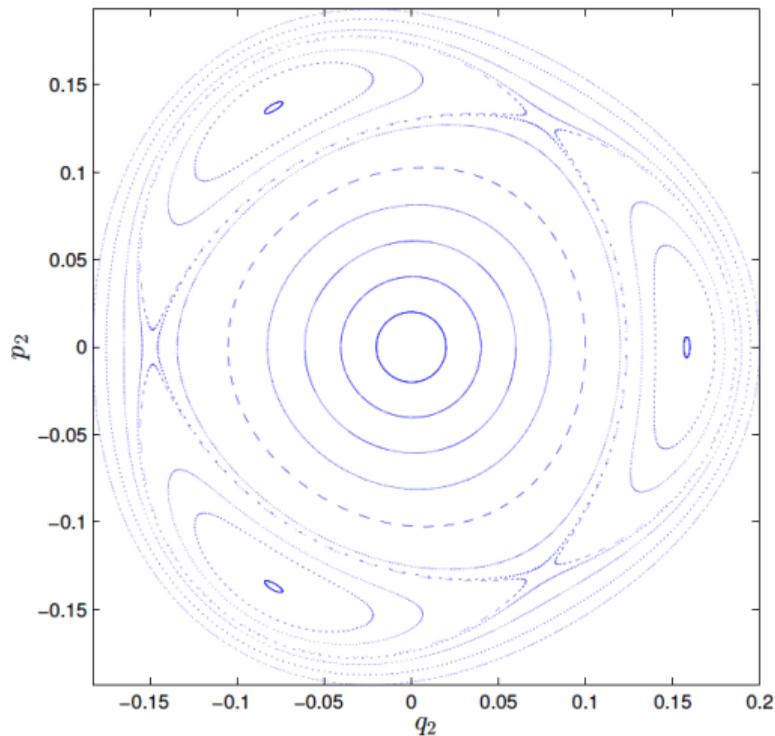
(e) Escolha uma trajetória utilizada para a construção da seção de Poincaré para $(\alpha = 0.1, \beta = 0, e E = 0.18)$ e elabore gráficos para as funções H , F_1 e F_2 em função do tempo. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Comente os resultados.

Figura 2 - Funções H , F_1 e F_2 em função do tempo
($\alpha = 0.1, \beta = 0$ e $E = 0.18$)



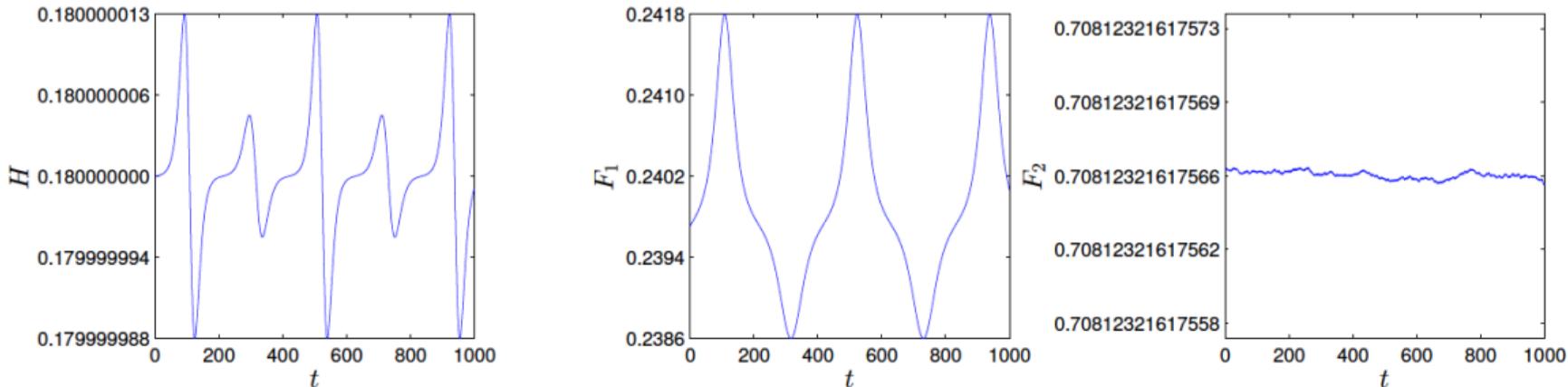
(f) Obtenha a seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = \beta = 0,02$ e $E = 0,18$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Indique os termos da perturbação H_1 que produzem ressonâncias visíveis nesta seção de Poincaré. Identifique estas ressonâncias em sua figura. O gráfico elaborado neste exercício corresponde à figura 9 do artigo de Walker e Ford.

Figura 3 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-Ford
($\alpha = 0$, $\beta = 0.1$ e $E = 0.18$)



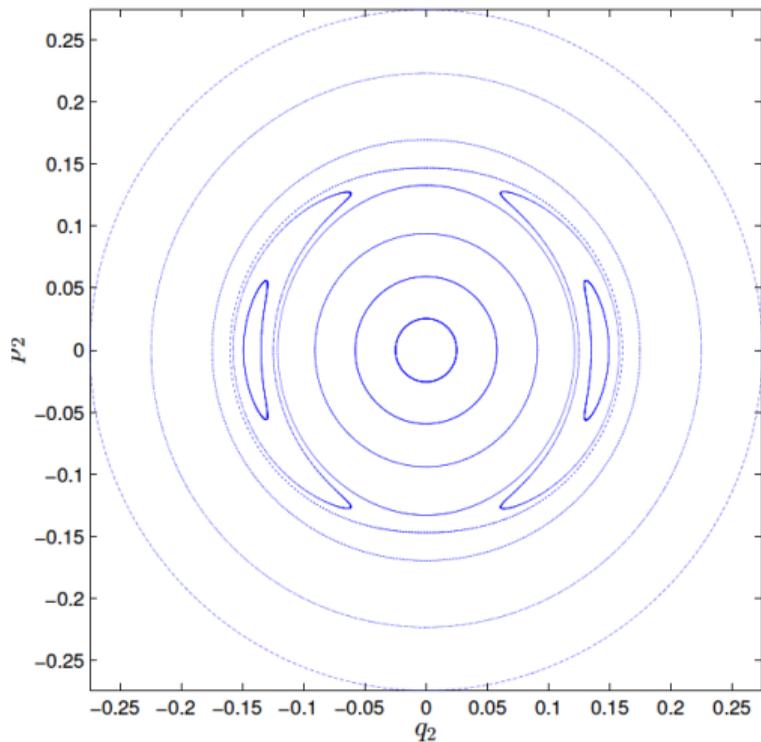
(g) Escolha uma trajetória utilizada para a construção da seção de Poincaré para ($\alpha = 0, \beta = 0.1, e E = 0.18$) e elabore gráficos para as funções H, F_1 e F_2 em função do tempo. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Comente os resultados.

Figura 4 - Funções H, F_1 e F_2 em função do tempo
($\alpha = 0, \beta = 0.1$ e $E = 0.18$)



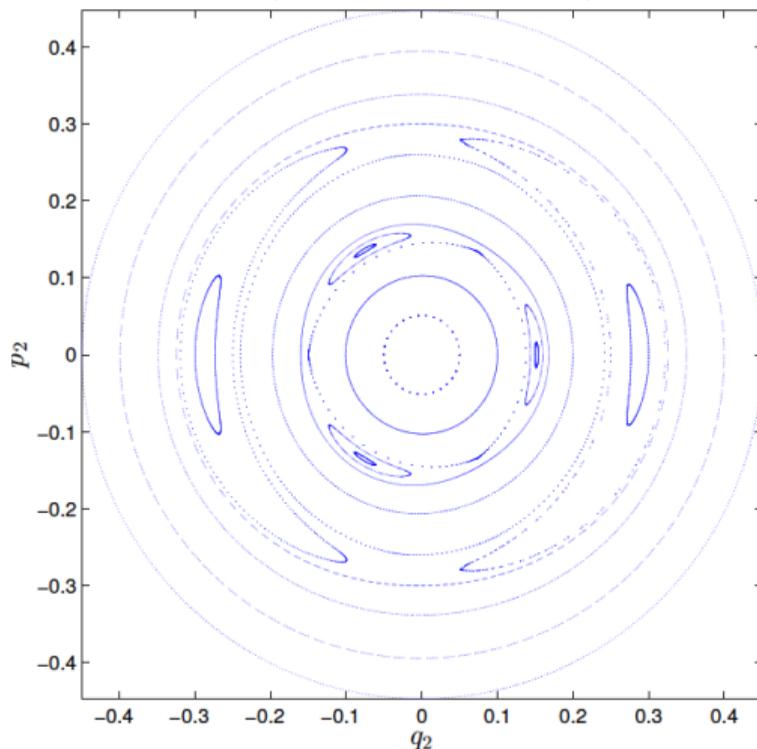
(h) Construa uma seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = \beta = 0,02$ e $E = 0,0561$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Indique os termos da perturbação H_1 que produzem ressonâncias visíveis nesta seção de Poincaré. Identifique estas ressonâncias em sua figura. O gráfico elaborado neste exercício corresponde à figura 8 do artigo de Walker e Ford.

Figura 5 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-Ford
($\alpha = \beta = 0.02$ e $E = 0.0561$)



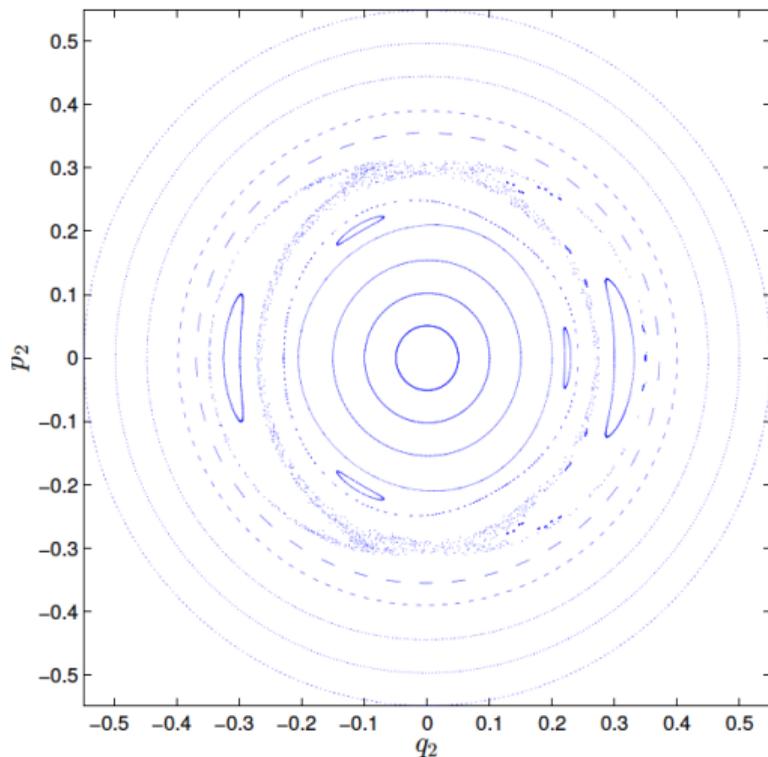
(i) Obtenha a seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = \beta = 0,02$ e $E = 0,18$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Indique os termos da perturbação H_1 que produzem ressonâncias visíveis nesta seção de Poincaré. Identifique estas ressonâncias em sua figura. O gráfico elaborado neste exercício corresponde à figura 9 do artigo de Walker e Ford.

Figura 6 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-Ford
($\alpha = \beta = 0.02$ e $E = 0.18$)



(j) Elabore uma seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = \beta = 0,02$ e $E = 0,20$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. Indique em sua figura as ressonâncias secundárias visíveis. O gráfico obtido neste exercício corresponde à figura 12 do artigo de Walker e Ford.

Figura 7 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-Ford
($\alpha = \beta = 0.02$ e $E = 0.20$)



(k) Construa uma seção de Poincaré no plano $p_2 \times q_2$ para $q_1 = 0$, $p_1 \geq 0$, $\alpha = \beta = 0,02$ e $E = 0,2095$. Anexe a figura obtida ao seu trabalho. O gráfico obtido neste exercício corresponde à figura 11 do artigo de Walker e Ford.

Figura 8 - Seção de Poincaré para a Hamiltoniana de Walker-Ford
($\alpha = \beta = 0.02$ e $E = 0.2095$)

