



MAPA PADRÃO COM POUCA DISSIPACÃO

Carlos A. C. Jousseph

**Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Medianeira -
Departamento Acadêmico de Física**

27 de janeiro de 2017

Conteúdo

❑ Características

❑ Introdução Teórica

- Sistemas Discretos
- Teorema KAM
- Teorema de Poincaré-Birkhoff

❑ Mapa padrão

- Conservativo
- Dissipativo

❑ Transição para o Dissipativo

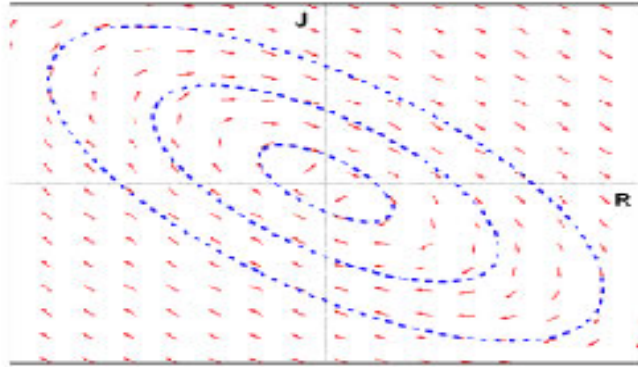
- Mapa Padrão

↳ Expoente de Lyapunov → Reortonormalização de Gram-Schmidt

- .

❑ Considerações

Sistema Conservativo

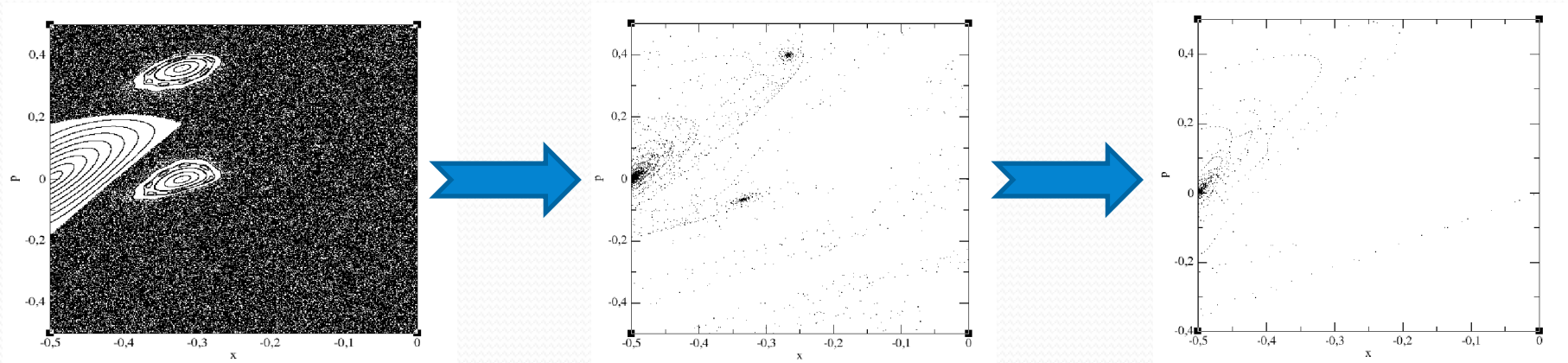


* Conservação do Volume do Espaço de Fases

Sistema Dissipativo

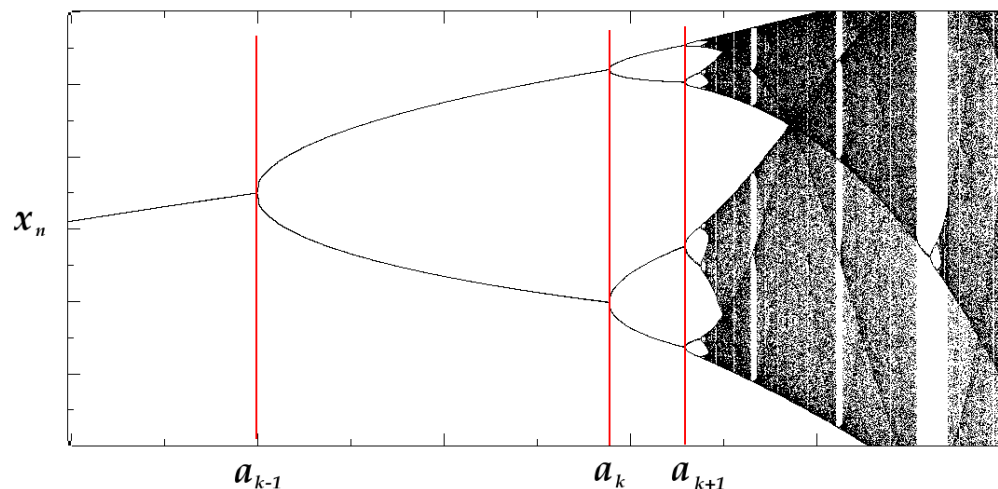


* Contração do Volume do Espaço de Fases



Redução da *Constante de Feigenbaum*

→ razão entre o intervalo de parâmetros entre duas sucessivas bifurcações.



$$\delta \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \right)$$

Conservativo

$$\delta \approx 8,72$$

(Lichtenberg, Lieberman,
Reg. and Chaotic Dynamics,
1992)



Dissipativo

$$\delta \approx 4,66$$

(Feigenbaum et al., 1980),
(Reinout, Quispel 1985),
(Weele et al., 1986).

Conteúdo

❑ Características

❑ Introdução Teórica

- Sistemas Discretos
- Teorema KAM
- Teorema de Poincaré-Birkhoff

❑ Mapa padrão

- Conservativo
- Dissipativo

❑ Transição para o Dissipativo

- Mapa Padrão

↳ Expoente de Lyapunov → Reortonormalização de Gram-Schmidt

- .

❑ Considerações

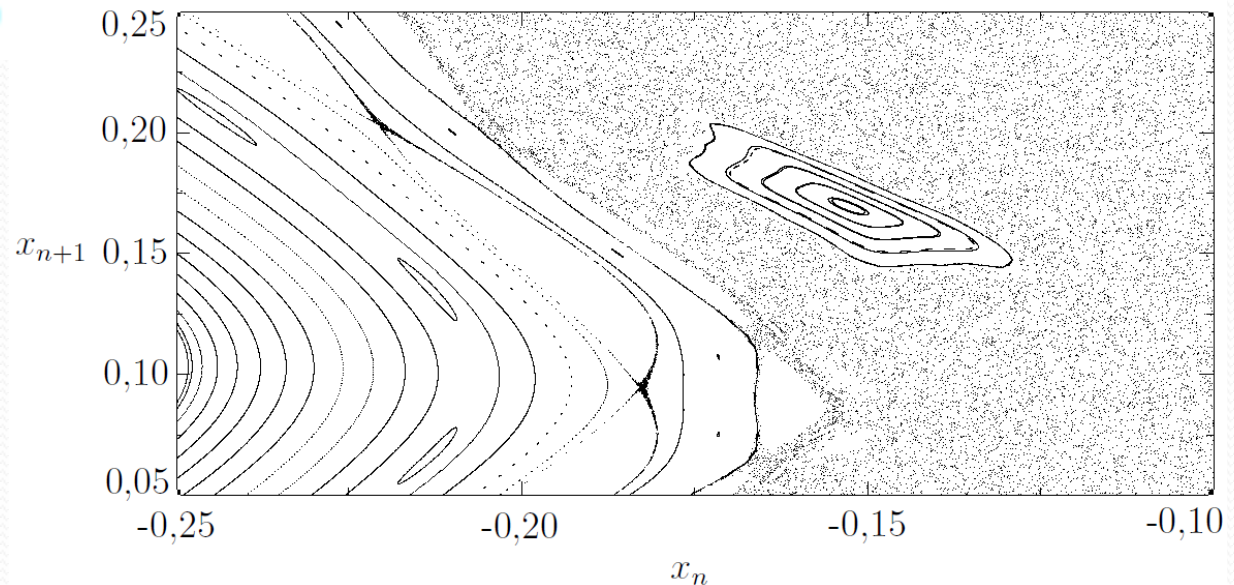
Sistemas Discretos

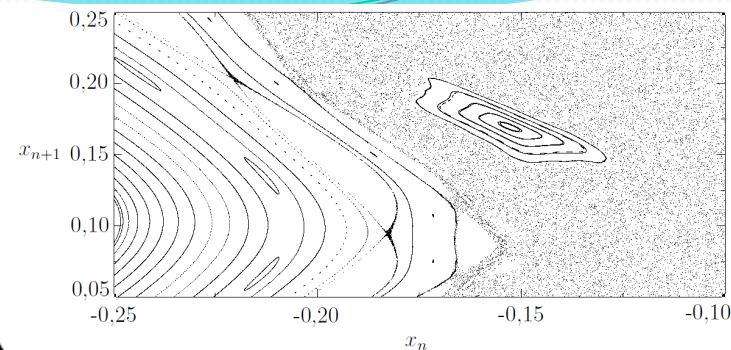
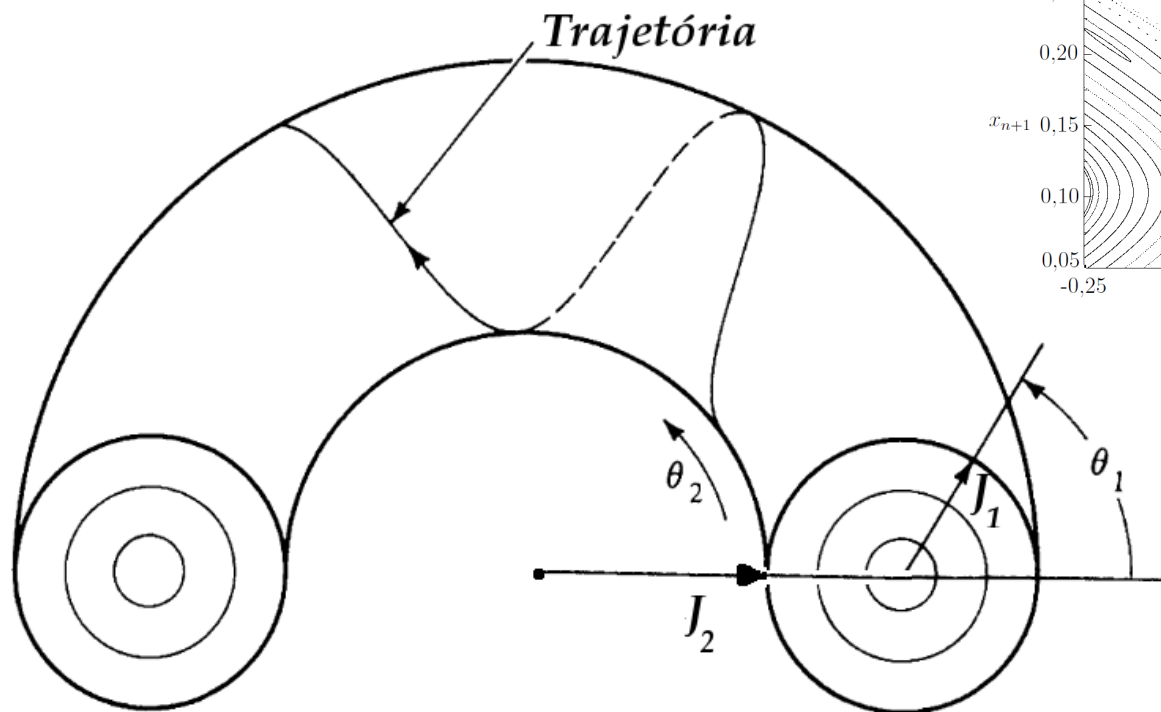
- $t \rightarrow$ *discreto*.
- *Mapas* $\rightarrow$ *Evolução se dá por meio de iterações e as soluções aparecem sob a forma de uma relação de recorrência.*
- *Soluções* $\rightarrow$ *Órbitas (trajetórias).*

$$x_{n+1} = F(x_n)$$



$$\begin{aligned}x_1 &= F(x_0) \\x_2 &= F(x_1) \\&\vdots \\x_{n+1} &= F(x_n)\end{aligned}$$





Lichtenberg, Lieberman, Reg. and Chaotic Dynamics, 1992

$$\omega_1 = d\theta_1/dt$$

$$\omega_2 = d\theta_2/dt$$



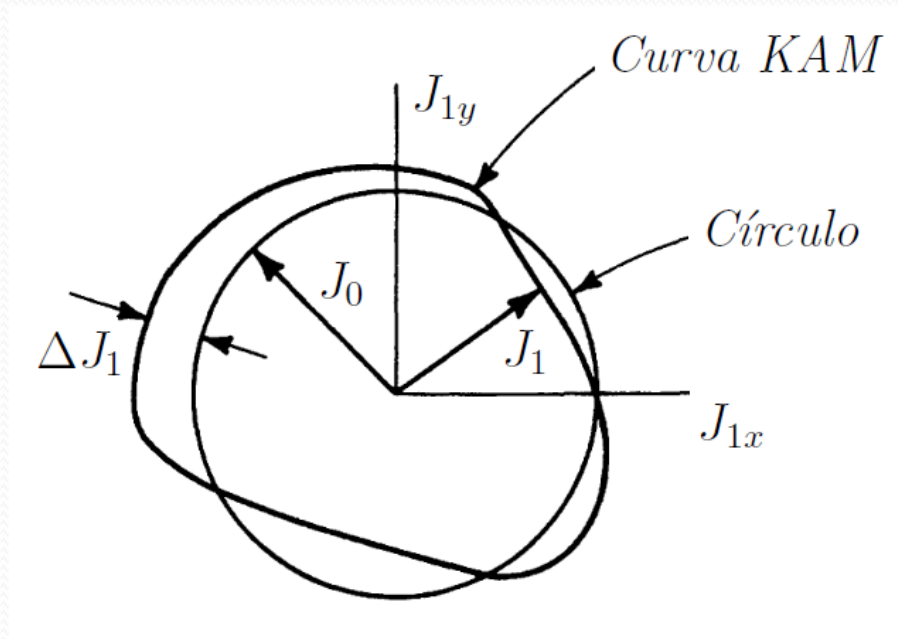
$$\alpha = \omega_1/\omega_2$$

$\alpha = \text{racional}$
Pontos Periódicos

$\alpha = \text{irracional}$
Curvas contínuas

Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)

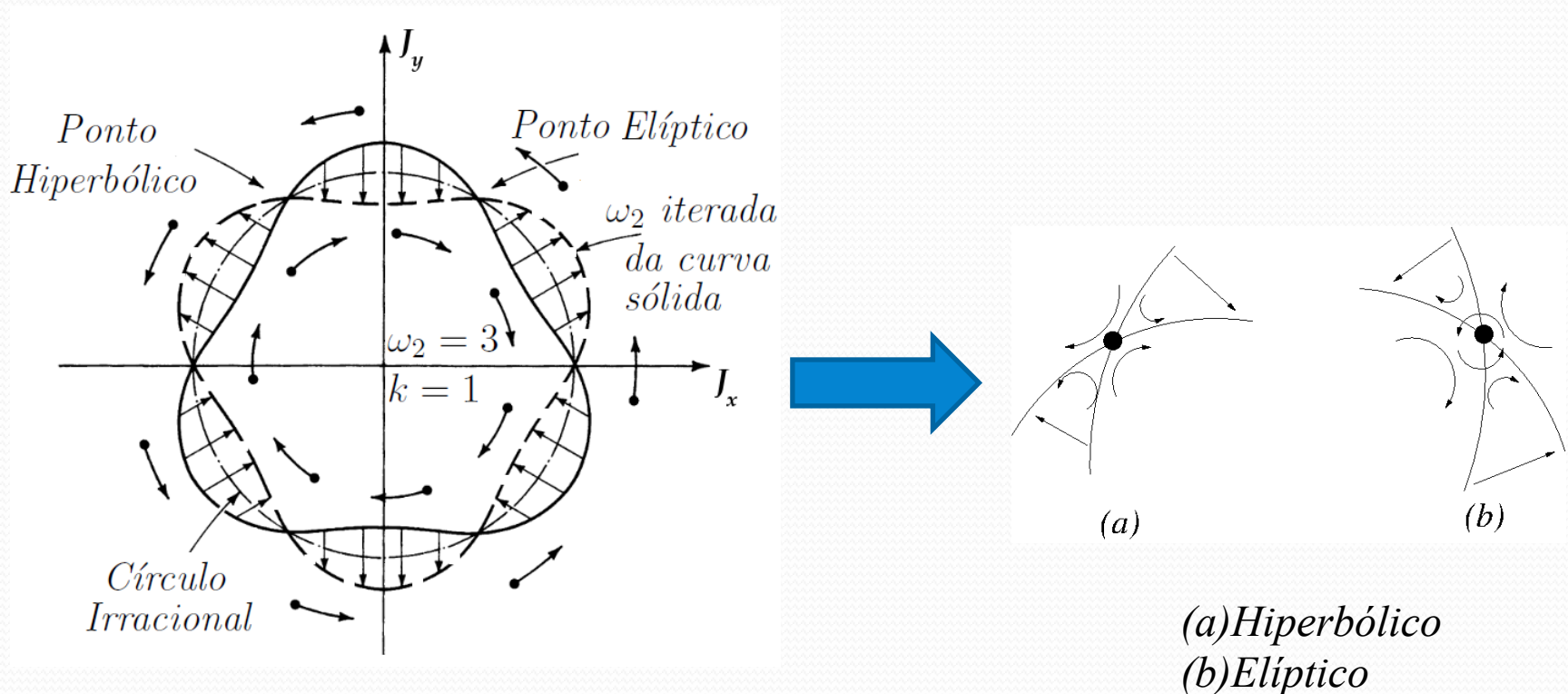
Para um sistema 2D quase-integrável (integrável sujeito a uma perturbação), alguns torus são deformadas e outros destruídos. Os torus com $\alpha = \omega_1/\omega_2$ mais irracionais são os que mais resistem às perturbações.



$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$$

Teorema de Poincaré-Birkhoff

Quando um torus é destruído, há o aparecimento de $2k\omega_2$ pontos no lugar do torus. Metade são selas (hiperbólicos) e metade são centros (elípticos).



Conteúdo

❑ Características

❑ Introdução Teórica

- Sistemas Contínuos/Discretos
- Teorema KAM
- Teorema de Poincaré-Birkhoff

❑ Mapa padrão

- Conservativo
- Dissipativo

❑ Transição para o Dissipativo

- Mapa Padrão

↳ Expoente de Lyapunov → Reortonormalização de Gram-Schmidt

- .

❑ Considerações

Mapa padrão - Conservativo

✓ *B. V. Chirikov, Research Concerning the Theory of Nonlinear Resonance and Stochasticity, Preprint nº 267, 1969.*

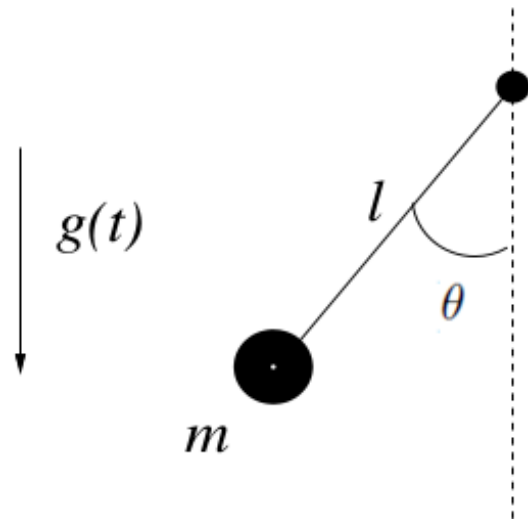
✓ *G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, and Joseph Ford, Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum Under a Periodic Perturbation, 1979.*

✓ *Aplicações → Física do Estado Sólido, Mecânica Estatística, Física de Plasma.*

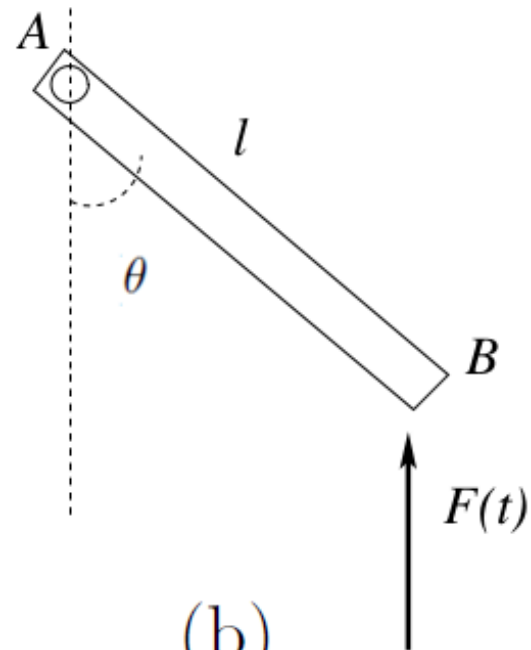
$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & p_n + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad MOD(1) \\ x_{n+1} & = & x_n + p_{n+1} \quad MOD(1) \end{array} \right.$$

➡

$$H(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} + k \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - n)$$



(a)



(b)

✓ *Matriz Jacobiana*

$$J = \begin{pmatrix} \partial p_{n+1}/\partial p_n & \partial p_{n+1}/\partial x_n \\ \partial x_{n+1}/\partial p_n & \partial x_{n+1}/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \cos(2\pi x) \\ 1 & 1 + k \cos(2\pi x) \end{pmatrix}.$$

✓ $\det(J) = 1 \rightarrow$ *Sistema Conservativo*

✓ $J \rightarrow$ *Pontos Fixos*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \\ x_{n+1} &= x_n \end{aligned}$$



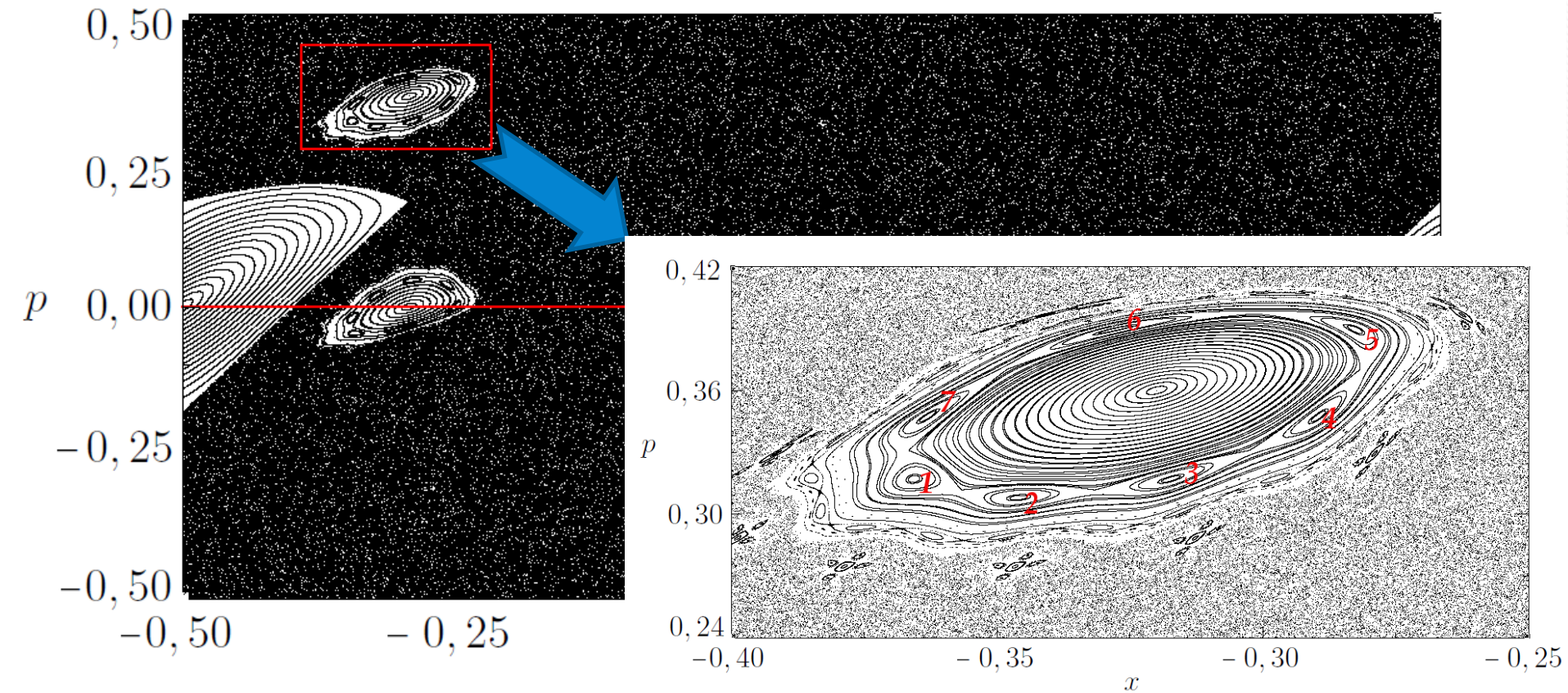
$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow \{0; 0, 5; 1, 0; \dots\} \\ p_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

✓ *Análise de Estabilidade*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm k \\ 1 & 1 \pm k \end{pmatrix}$$

- ✓ *Estabilidade dos Pontos Fixos* $\rightarrow | \text{traço} | < 2$.
- ✓ *Ponto fixo $(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = (0,0; 0,0)$* $\rightarrow |2 + k| \rightarrow$ *sempre instável.*
- ✓ *Ponto fixo $(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = (0,5; 0,0)$* $\rightarrow |2 - k| \rightarrow$ *estável para $\{0 < k < 4\}$.*

Retrato de Fases



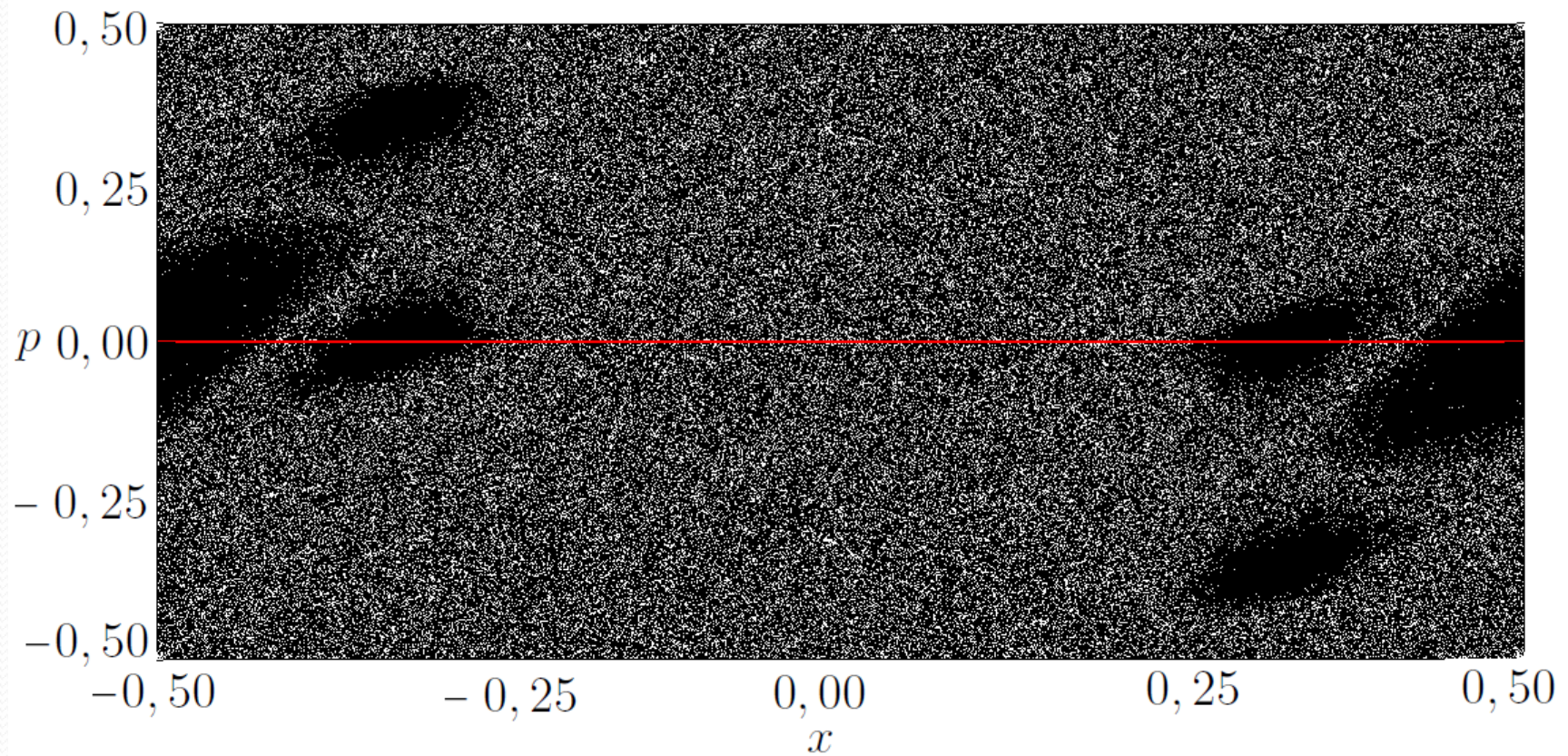
C.I. $\rightarrow$ 200 pontos na linha $p_0 = 0,0$ e $\{-0,5 < x_0 < 0,5\}$ e $k = 2, 5$.

Mapa padrão - Dissipativo

- ✓ *Termo de dissipação dado por γ .*
- ✓ *Energia reduzida a cada iterada.*
- ✓ *Aparecimento de atratores.*
- ✓ *Aplicações $\rightarrow$ Física de Plasma, Aceleradores.*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & (1 - \gamma)p_n + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \quad MOD(1) \\ x_{n+1} & = & x_n + p_{n+1} \quad MOD(1) \end{array} \right.$$

Retrato de Fases



C.I. $\rightarrow$ 200 pontos na linha $p_0 = 0,0$ e $\{-0,5 < x_0 < 0,5\}$ com $\gamma = 0,001$ e $k = 2,5$.

Conteúdo

❑ Características

❑ Introdução Teórica

- Sistemas Discretos
- Teorema KAM
- Teorema de Poincaré-Birkhoff

❑ Mapa padrão

- Conservativo
- Dissipativo

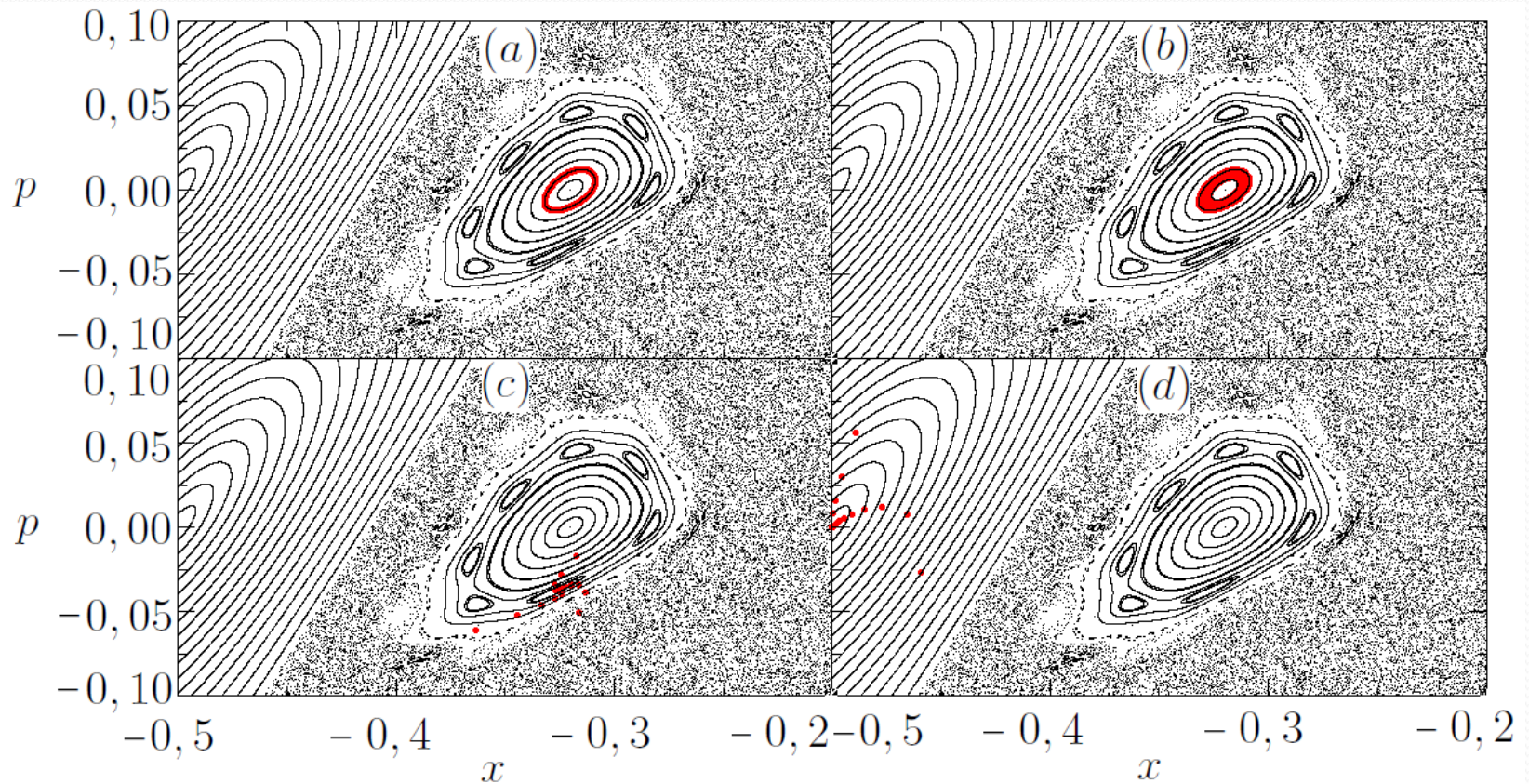
❑ Transição para o Dissipativo

➤ Mapa Padrão

↳ Expoente de Lyapunov → Reortonormalização de Gram-Schmidt

➤ .

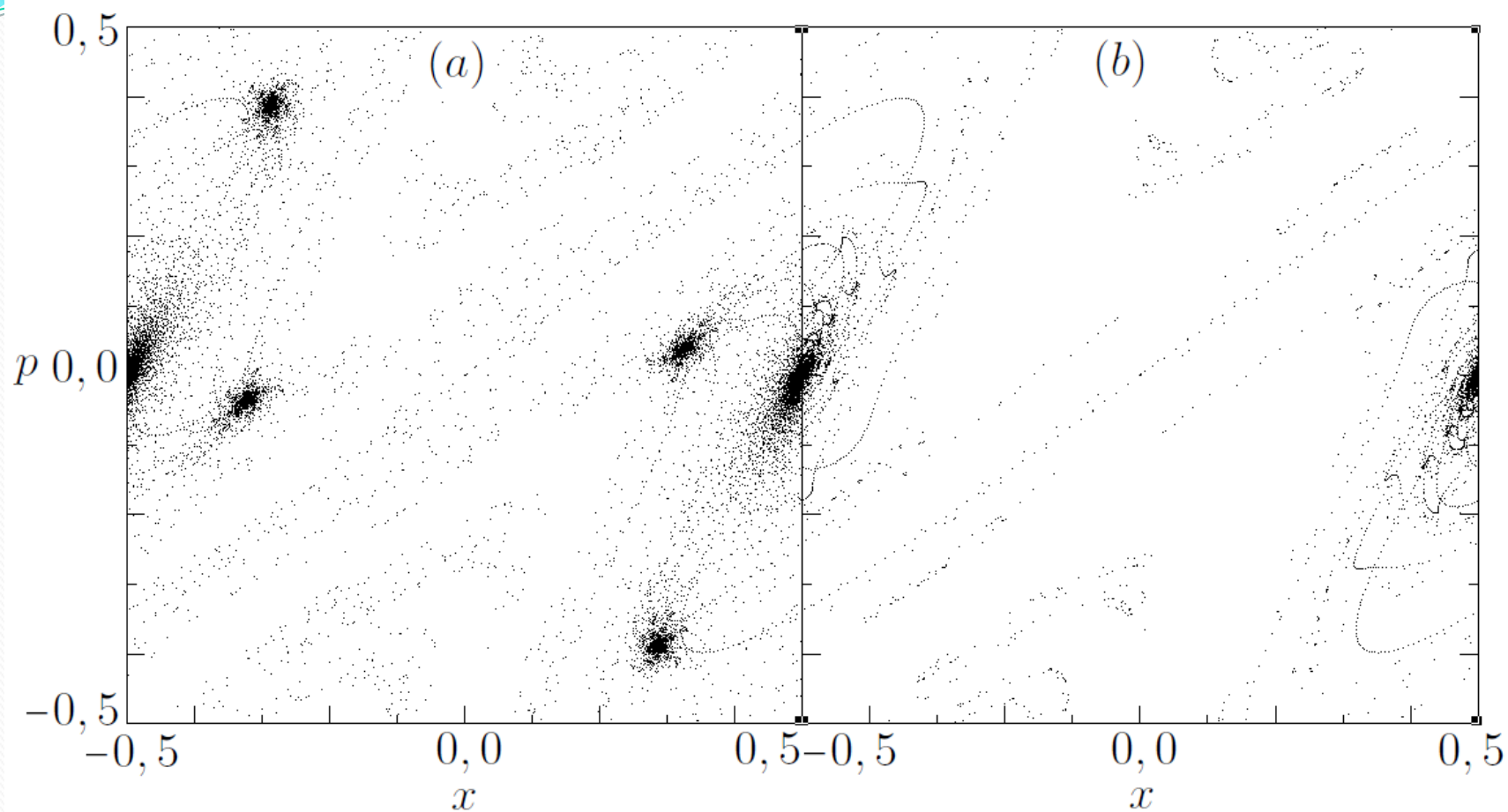
❑ Considerações



Preto $\rightarrow$ Espaço de Fases Conservativo

Vermelho $\rightarrow$ Esp. de Fases dissipativo com 1 (uma) C.I.
 C.I. $\rightarrow (x_0, p_0) = (-0,31; 0,00)$

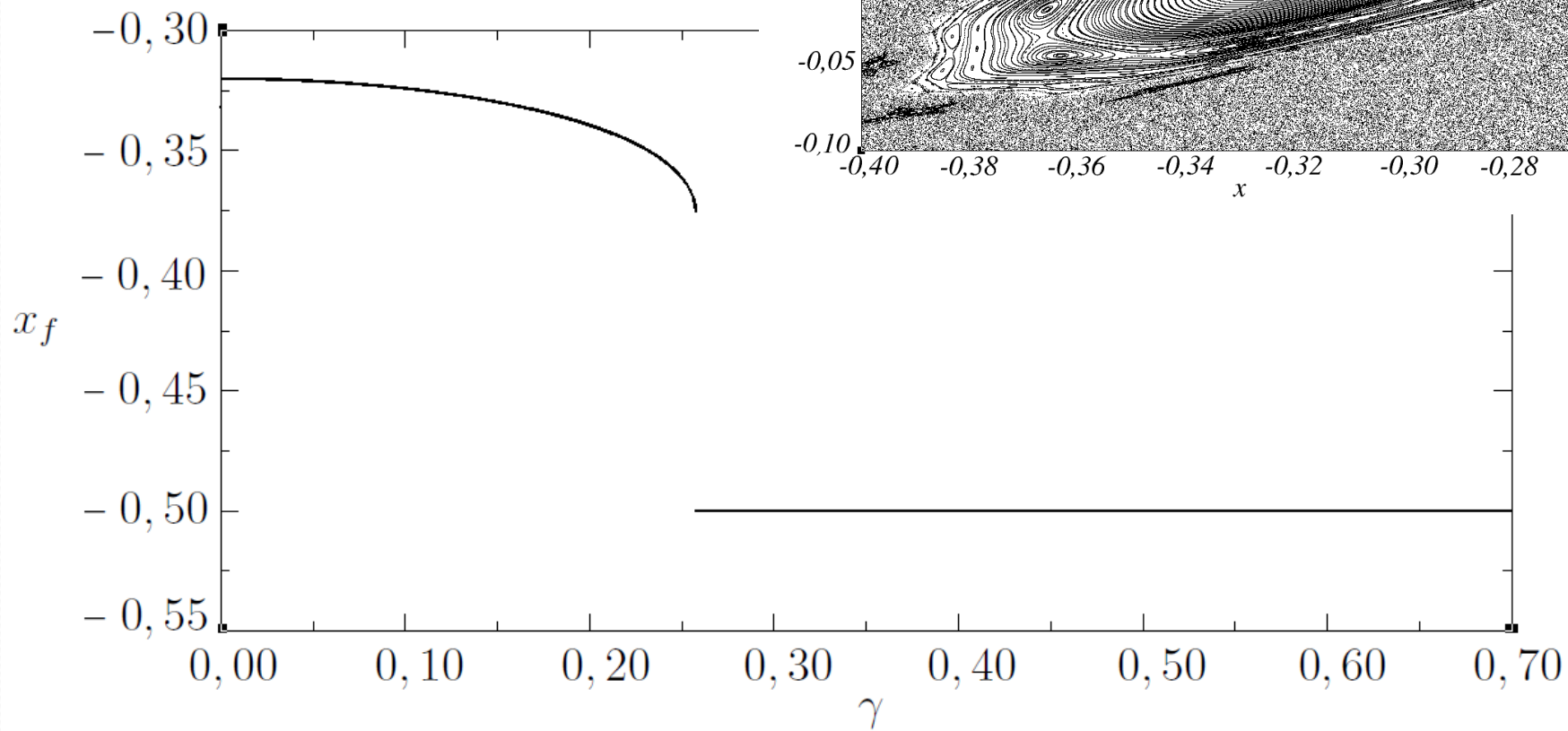
(a) $\gamma = 0,0$
 (b) $\gamma = 0,0001$
 (c) $\gamma = 0,1$
 (d) $\gamma = 0,3$



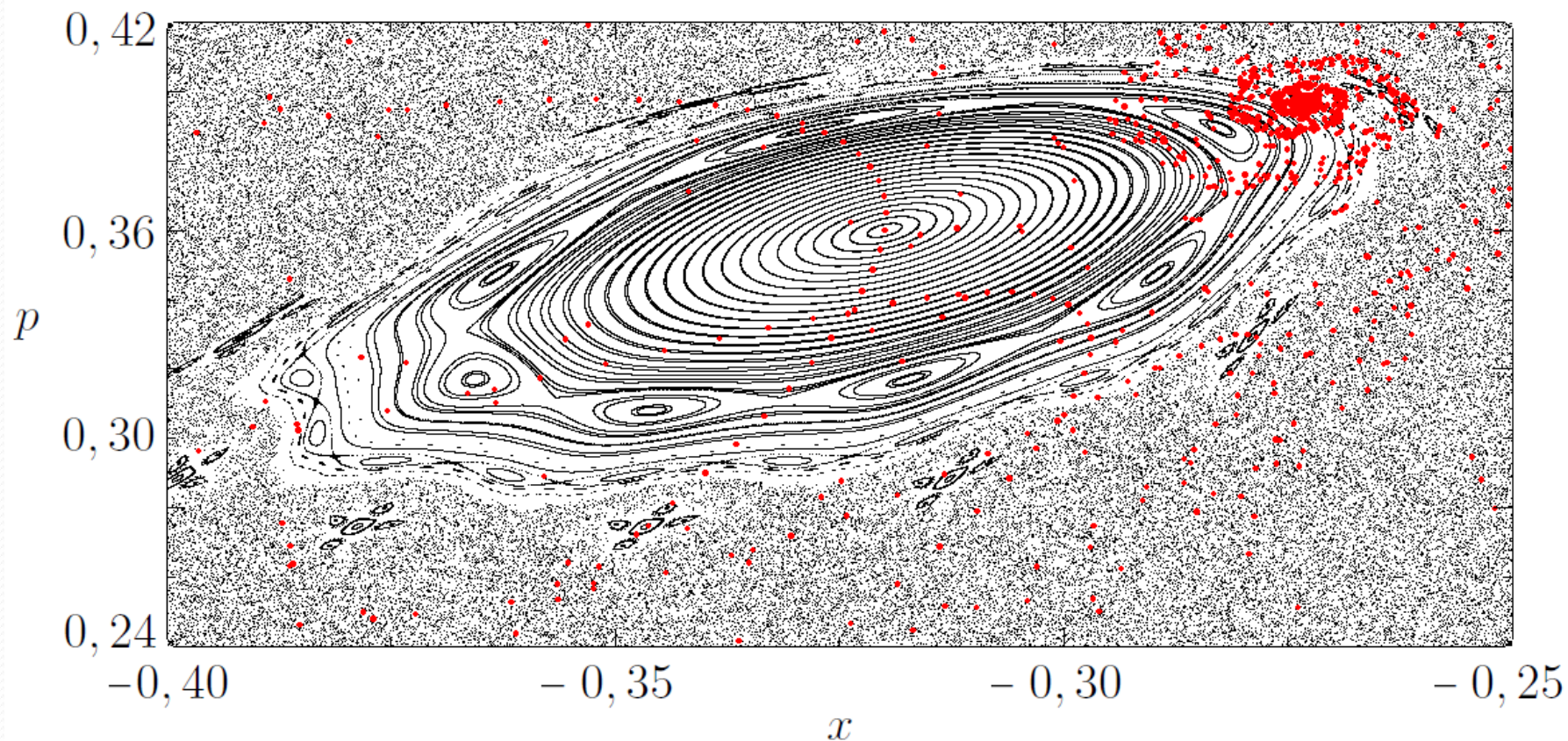
(a) $\gamma = 0,1$.

(b) $\gamma = 0,3$.

C.I. $\rightarrow$ 200 pontos na linha $p_0 = 0,0$ e $\{-0,5 < x_0 < 0,5\}$ e $k = 2,5$.

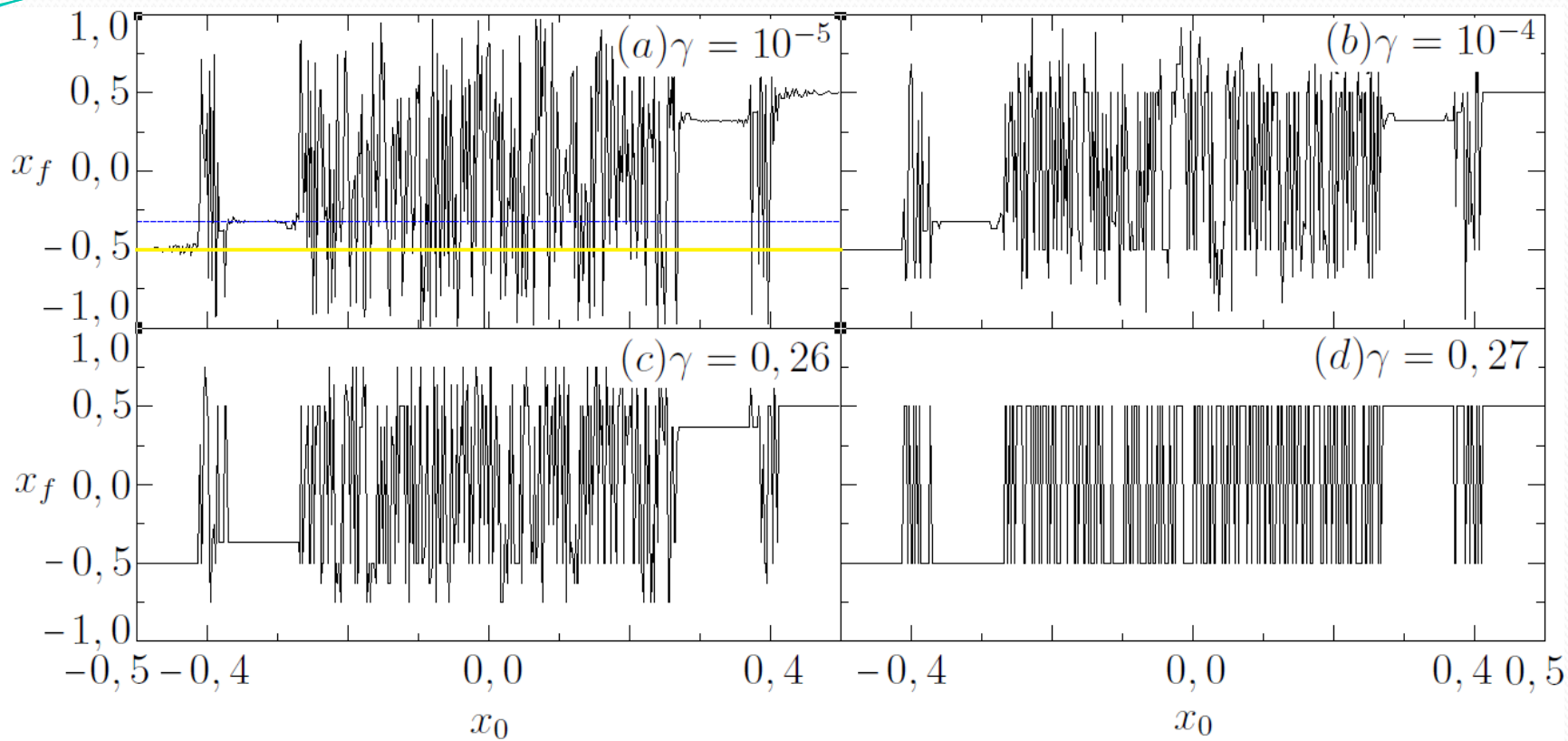


C.I. $\rightarrow (x_0; p_0) = (-0,31; 0,00)$ com $k = 2, 5$.

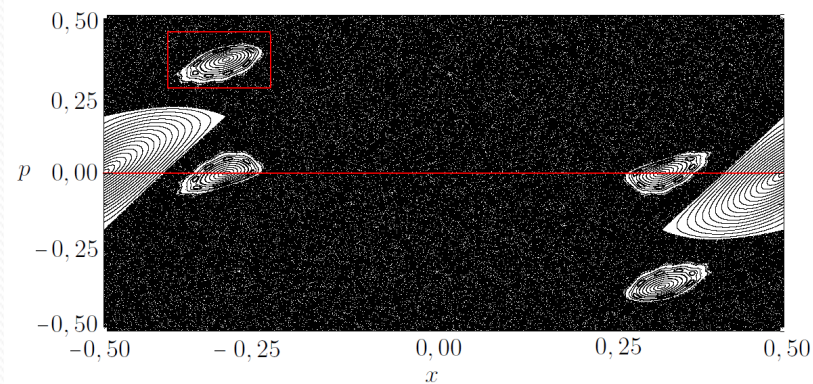


Preto → *conservativo.*

Vermelho → *dissipativo com $\gamma = 0,15$.*



{ *Linha Amarela* $\rightarrow x_f = -0,50.$
Linha Azul $\rightarrow x_f = -0,32.$



Expoente de Lyapunov a Tempos Finitos

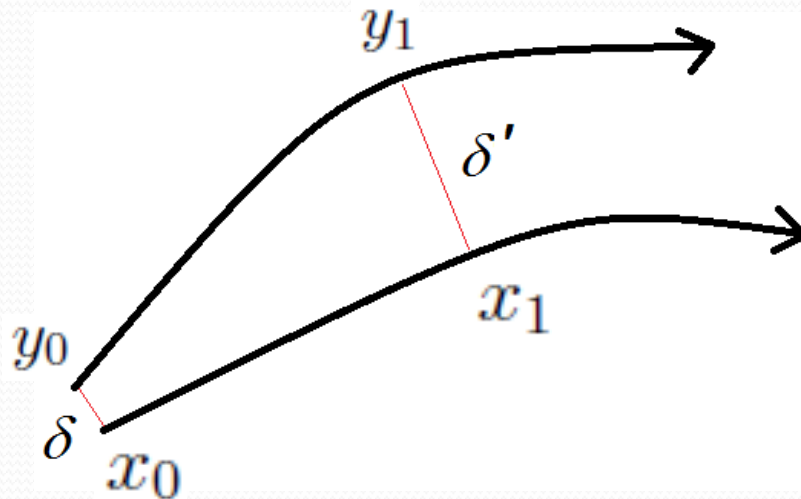
→ Mede a divergência/convergência exponencial entre trajetórias iniciadas próximas.

$$\delta = y_0 - x_0.$$

$$\delta' = y_1 - x_1.$$

$$\delta' = e^L \delta.$$

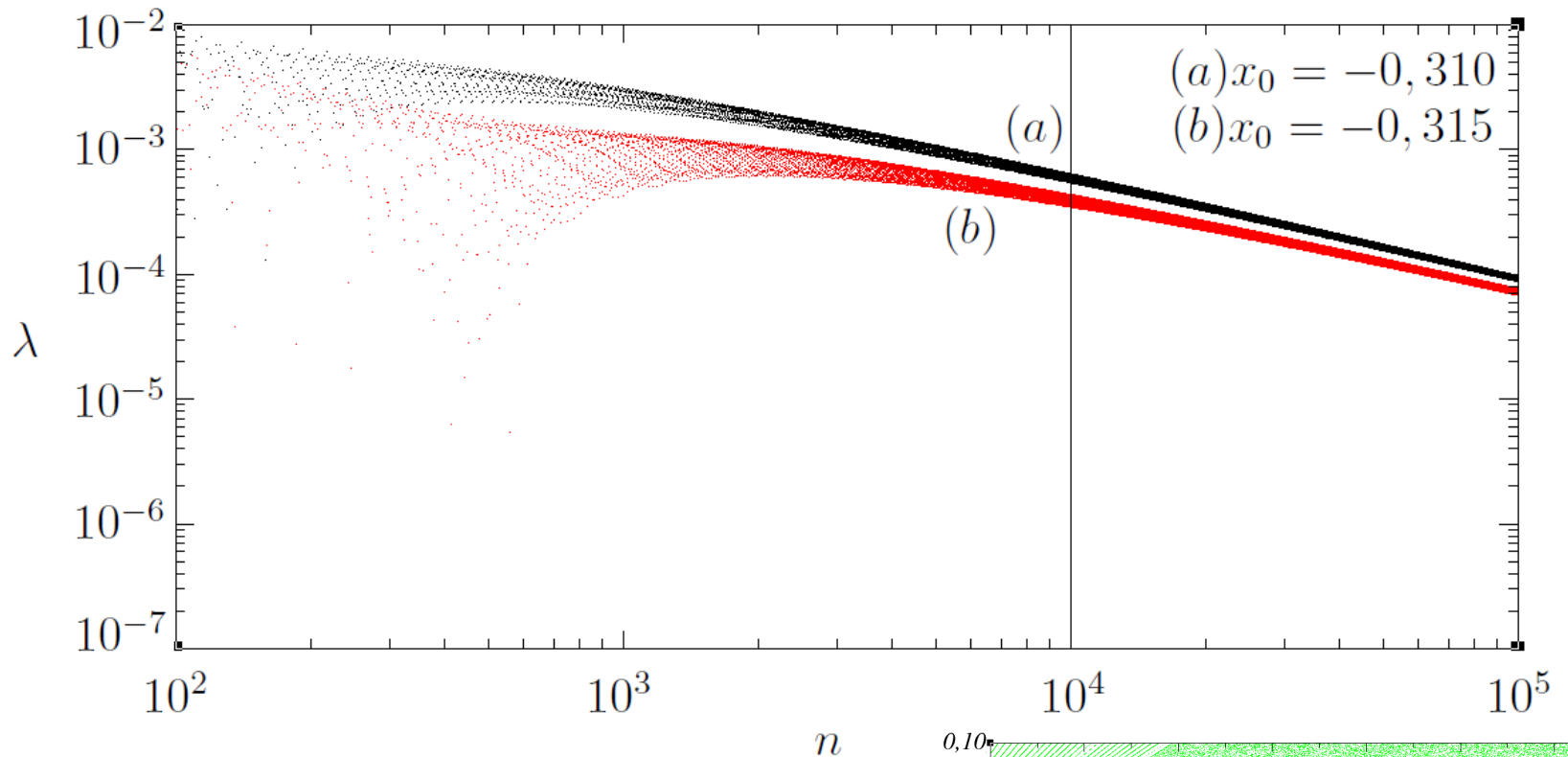
$$x_{n+1} = F(x_n)$$



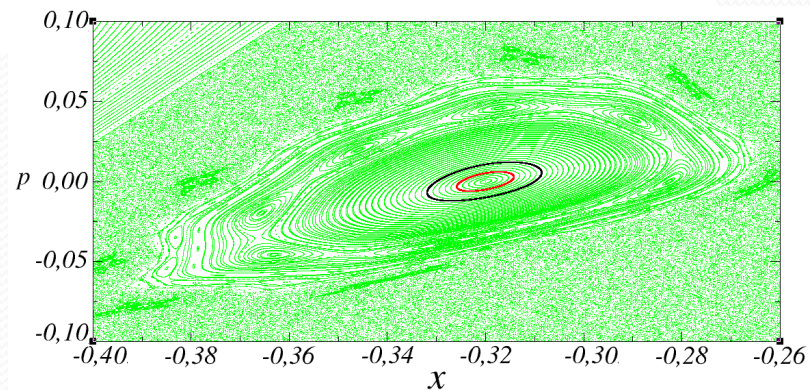
$$\lambda(x_0) = L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \right|$$

✓ *Caso CONSERVATIVO.*

✓ *Duas Condições Iniciais (C.I.) diferentes.*

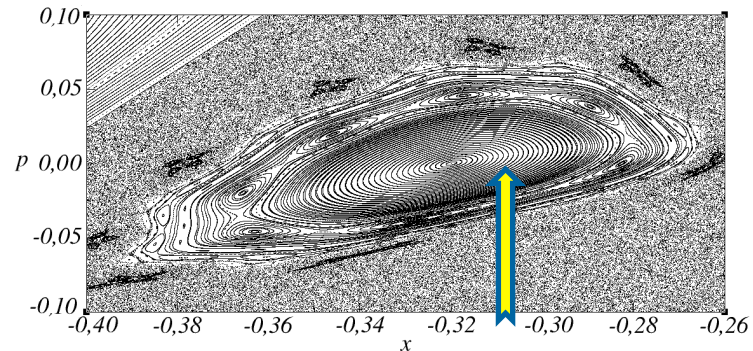
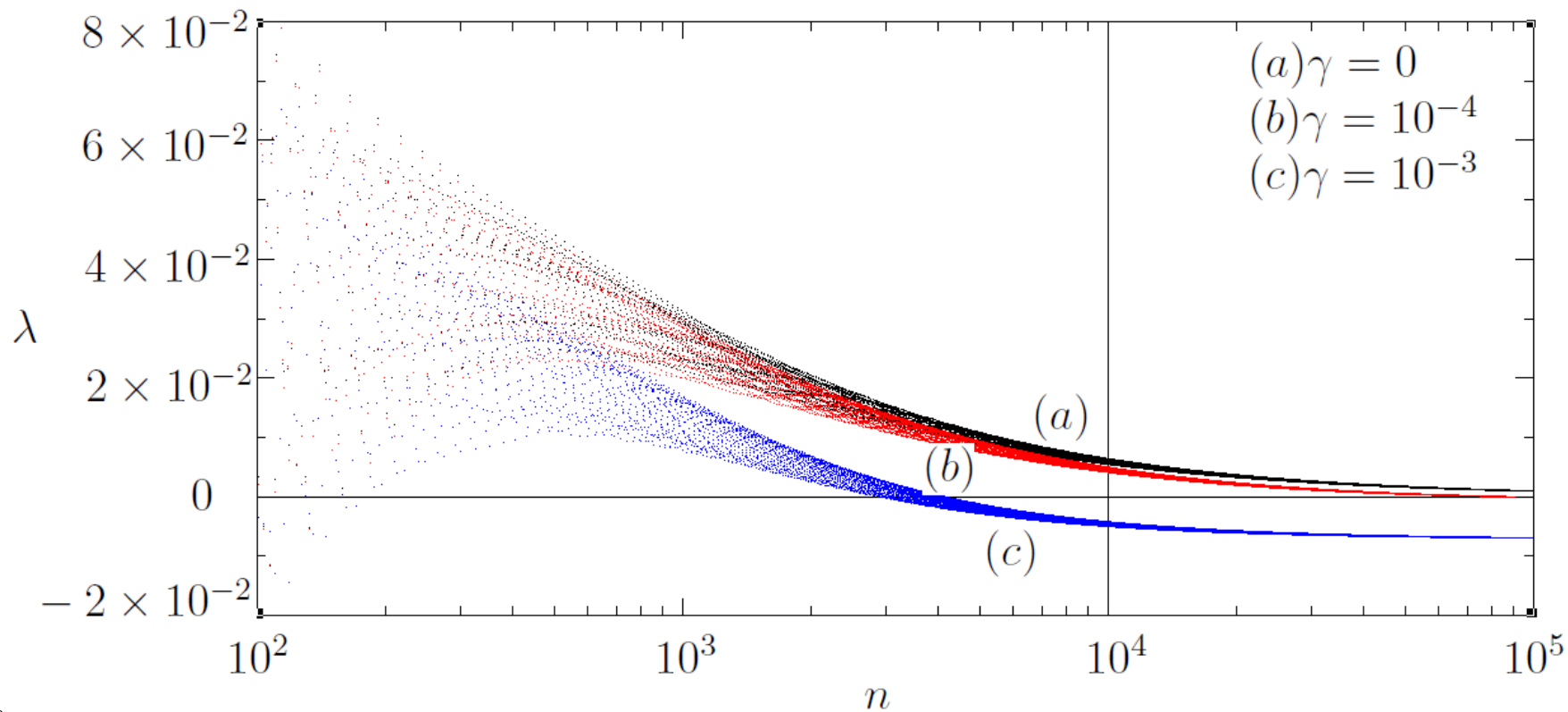


Ponto Ressonante $(x,p) = (-0,32; 0,00)$.



✓ *Mesma Condição Inicial* → $(x,p) = (-0,31; 0,00)$.

✓ *Diferentes parâmetros de dissipação.*



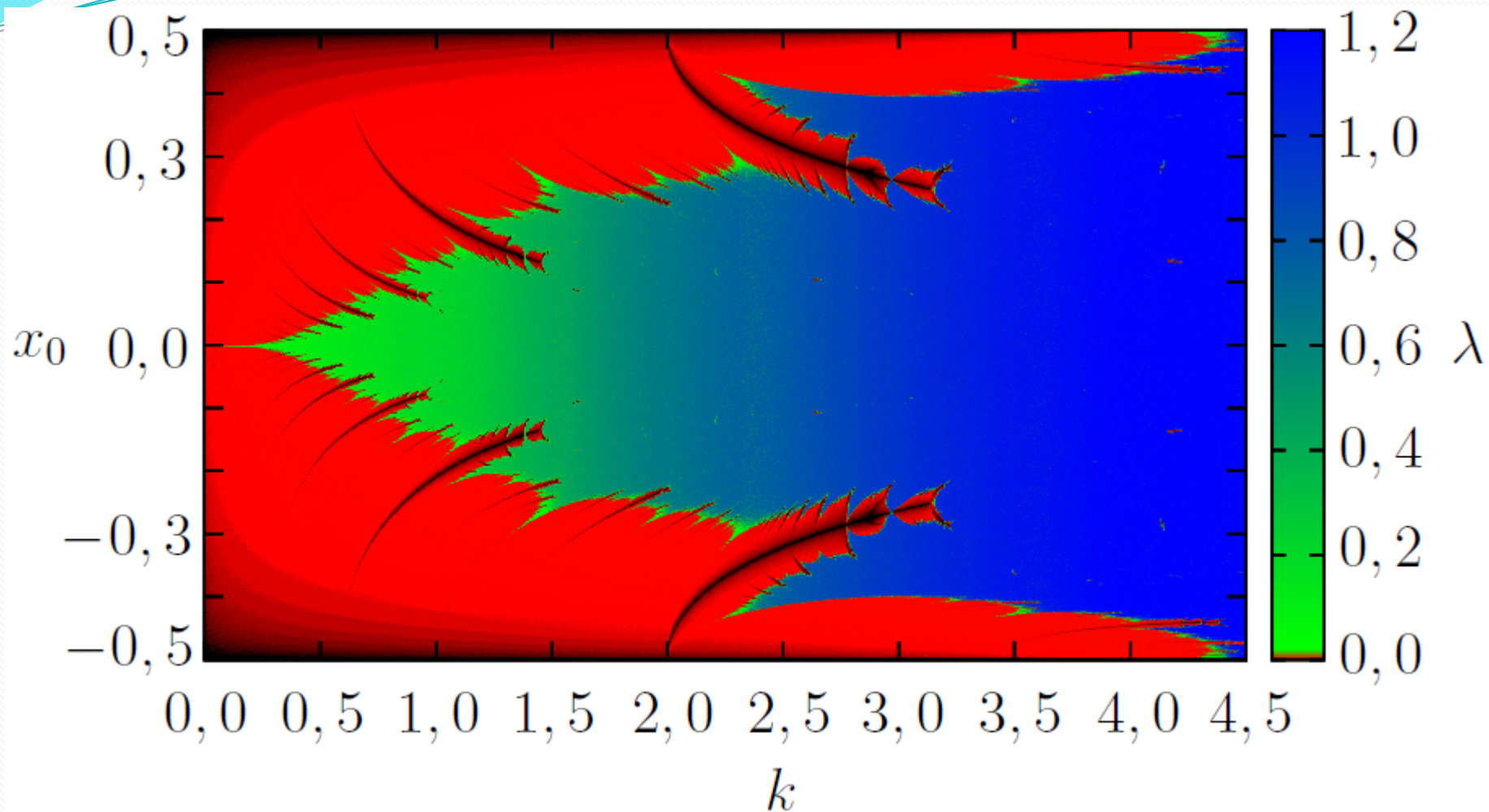
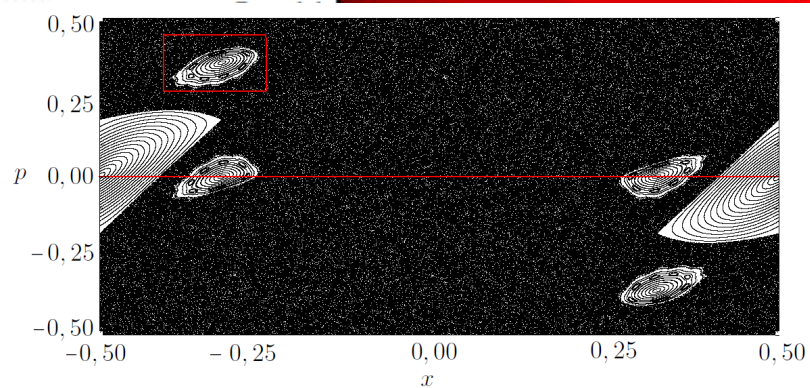
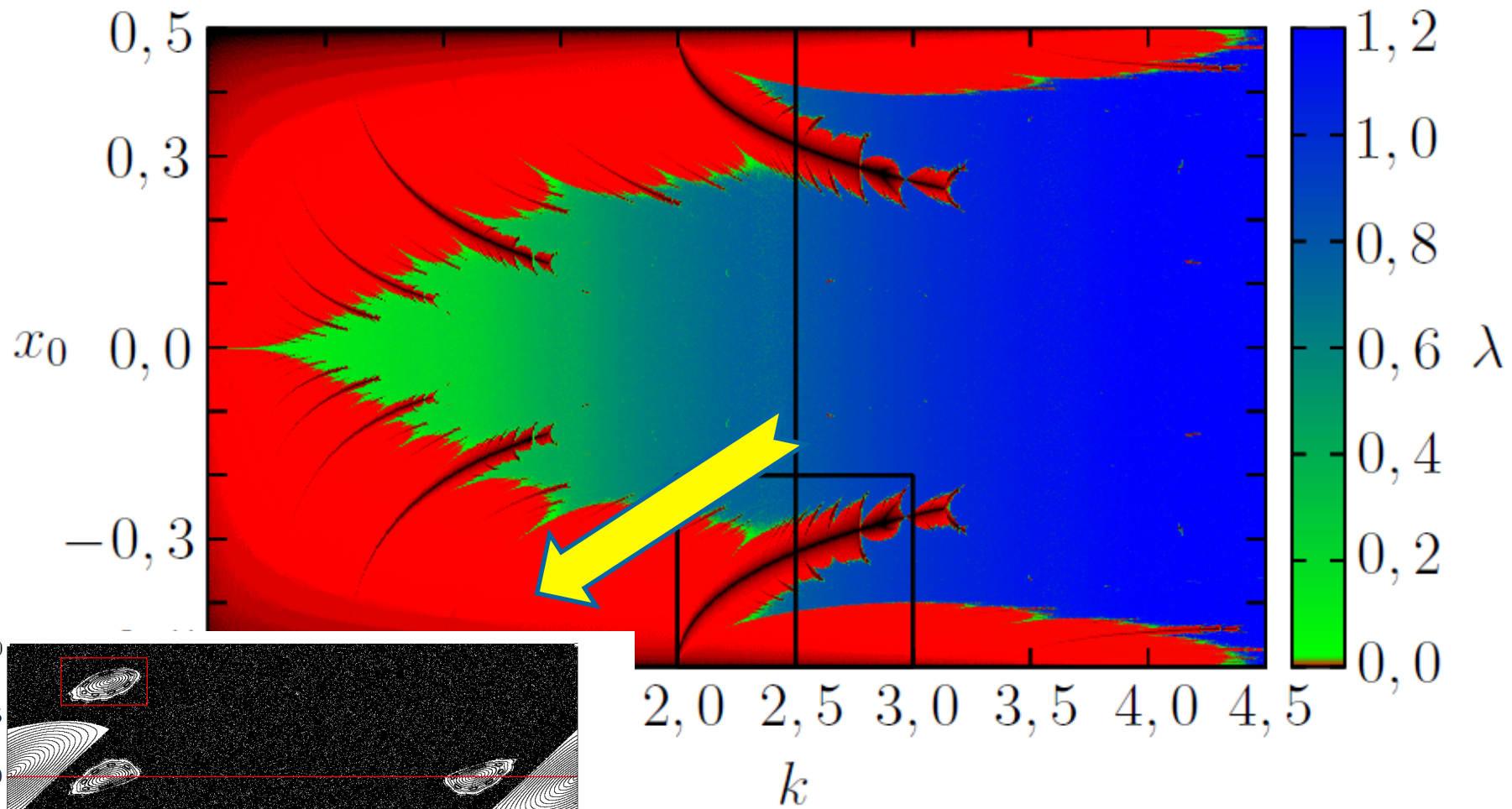
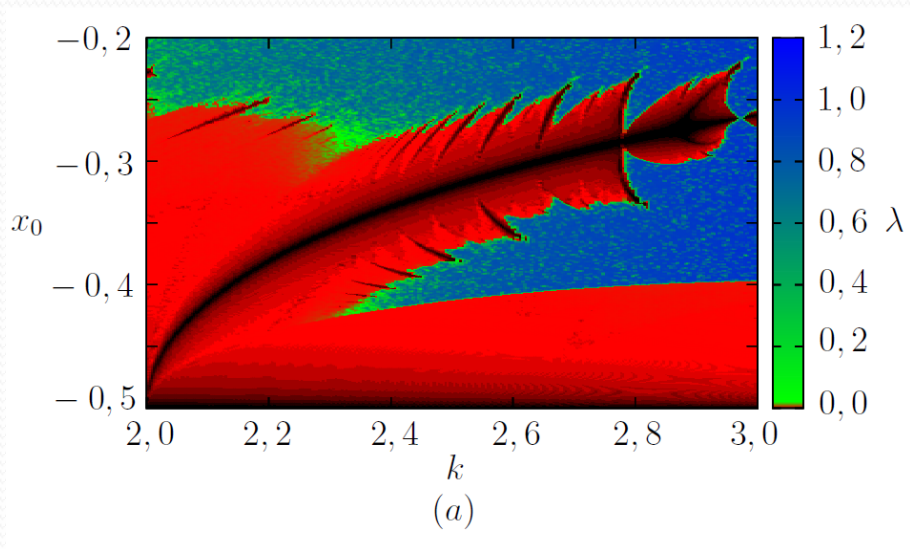
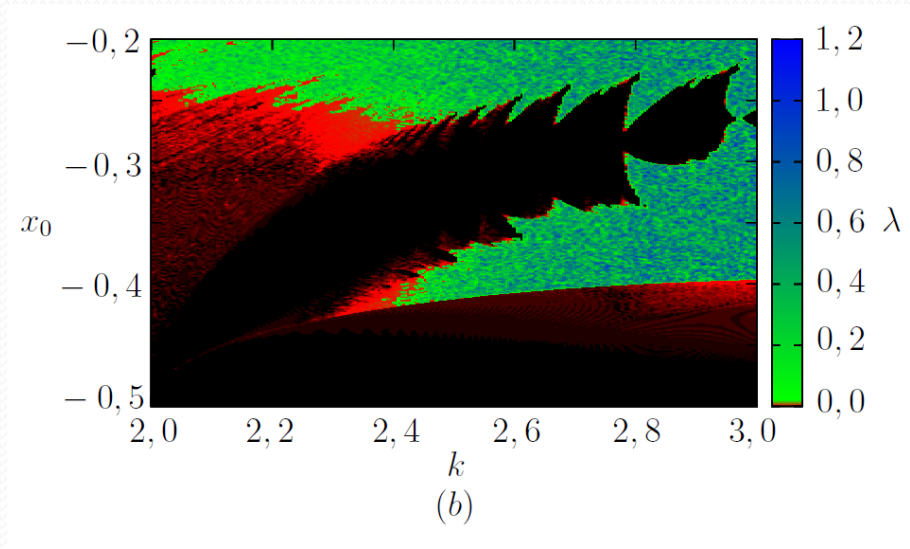


Diagrama de bifurcação 2D → M. Beims e C. Manchein, Phys. Lett. A. (2013).

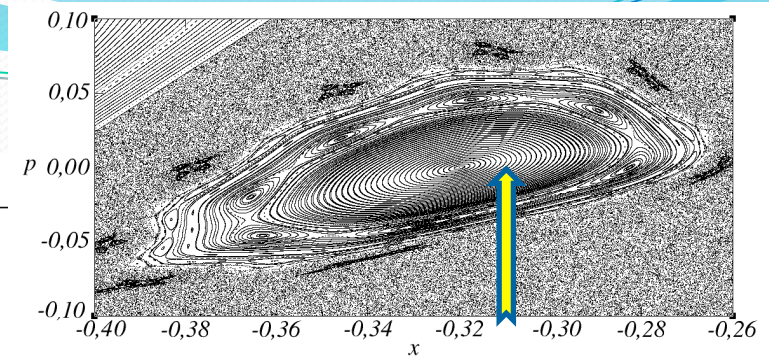
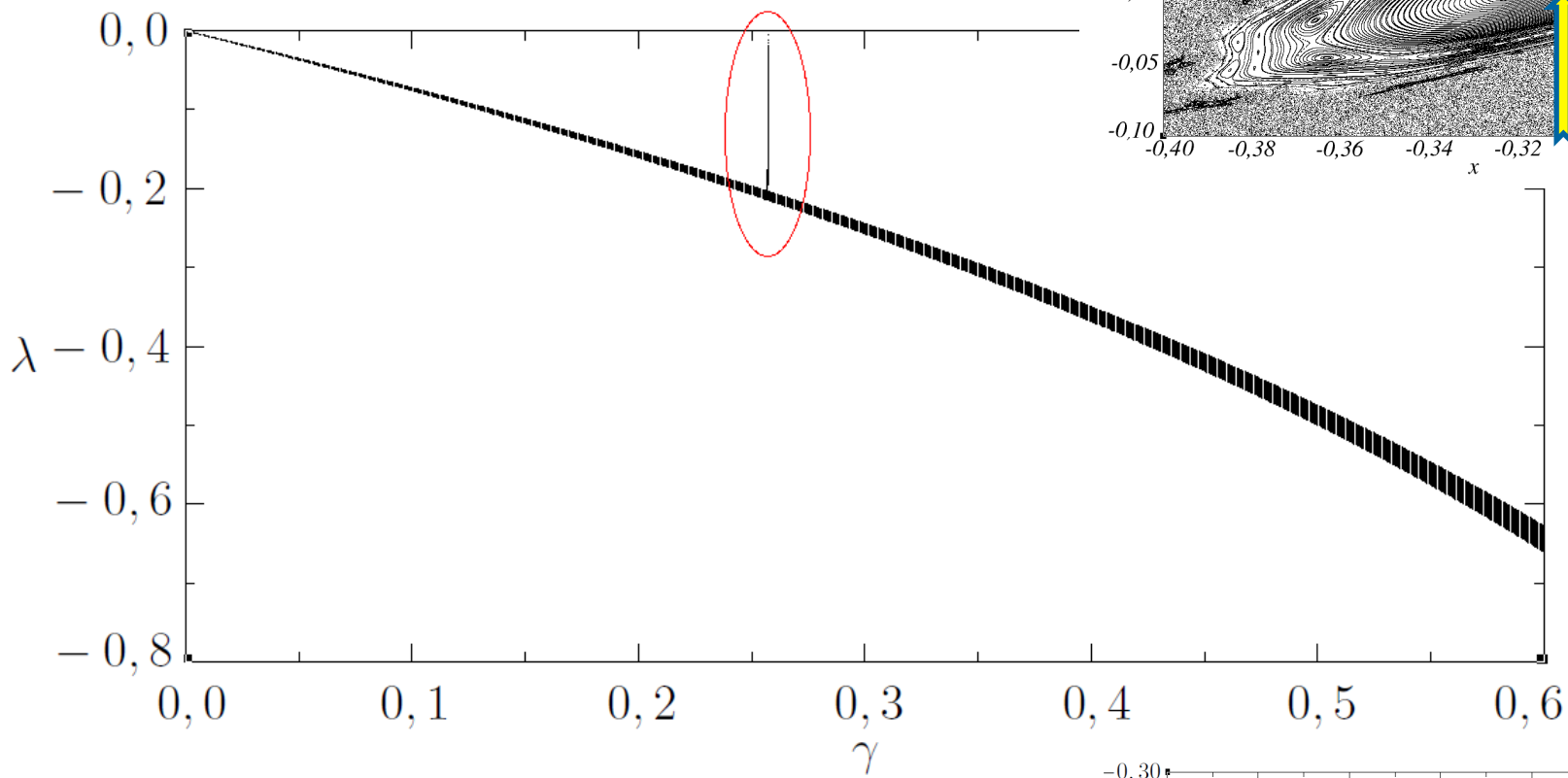




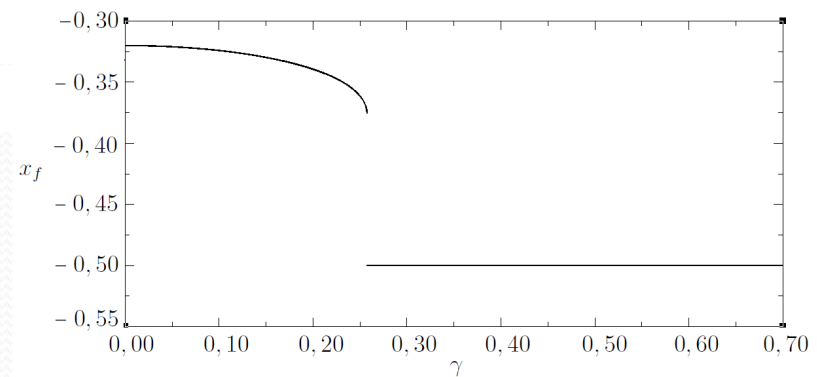
$$\gamma = 10^{-4}$$



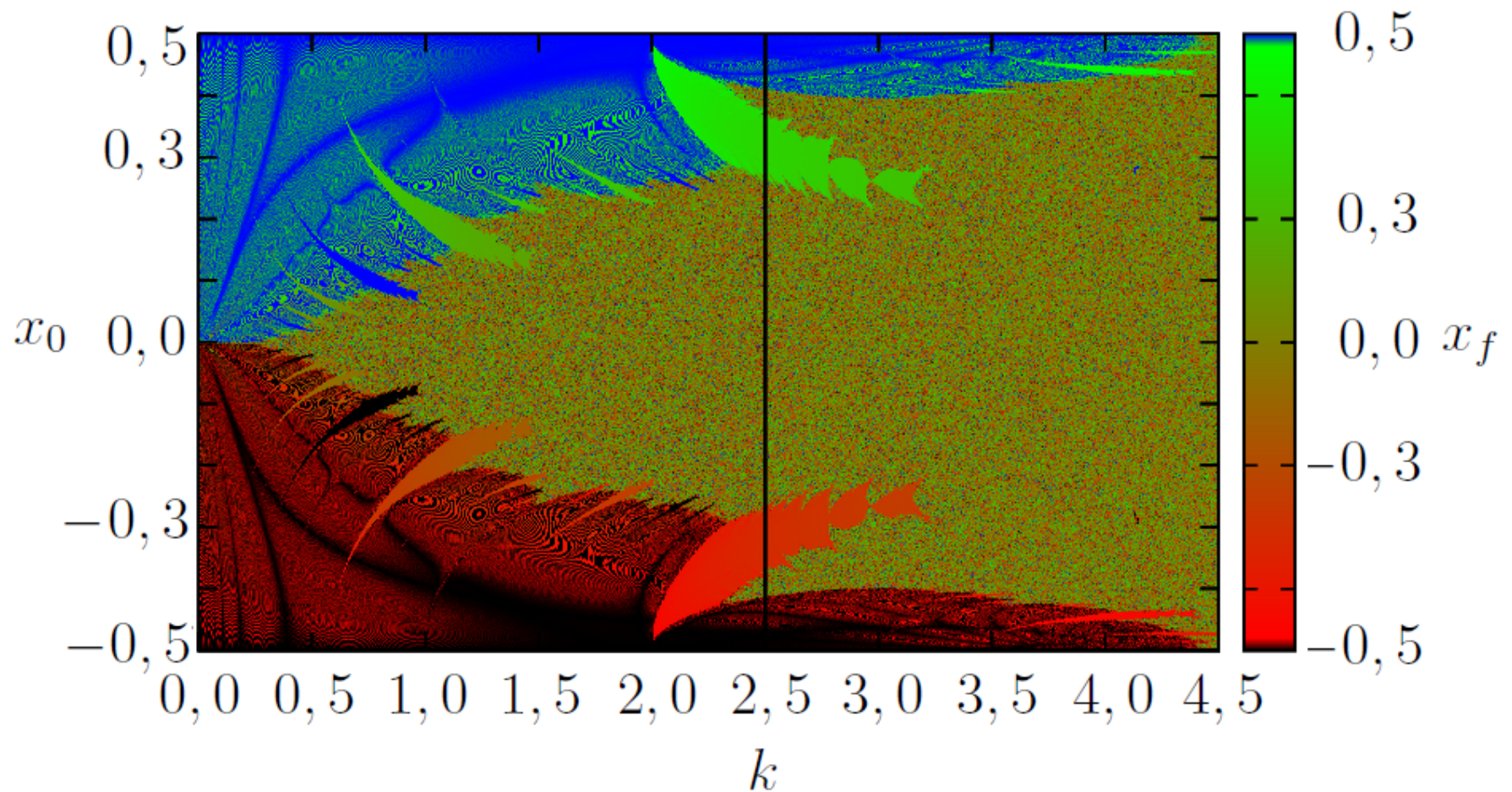
$$\gamma = 10^{-3}$$

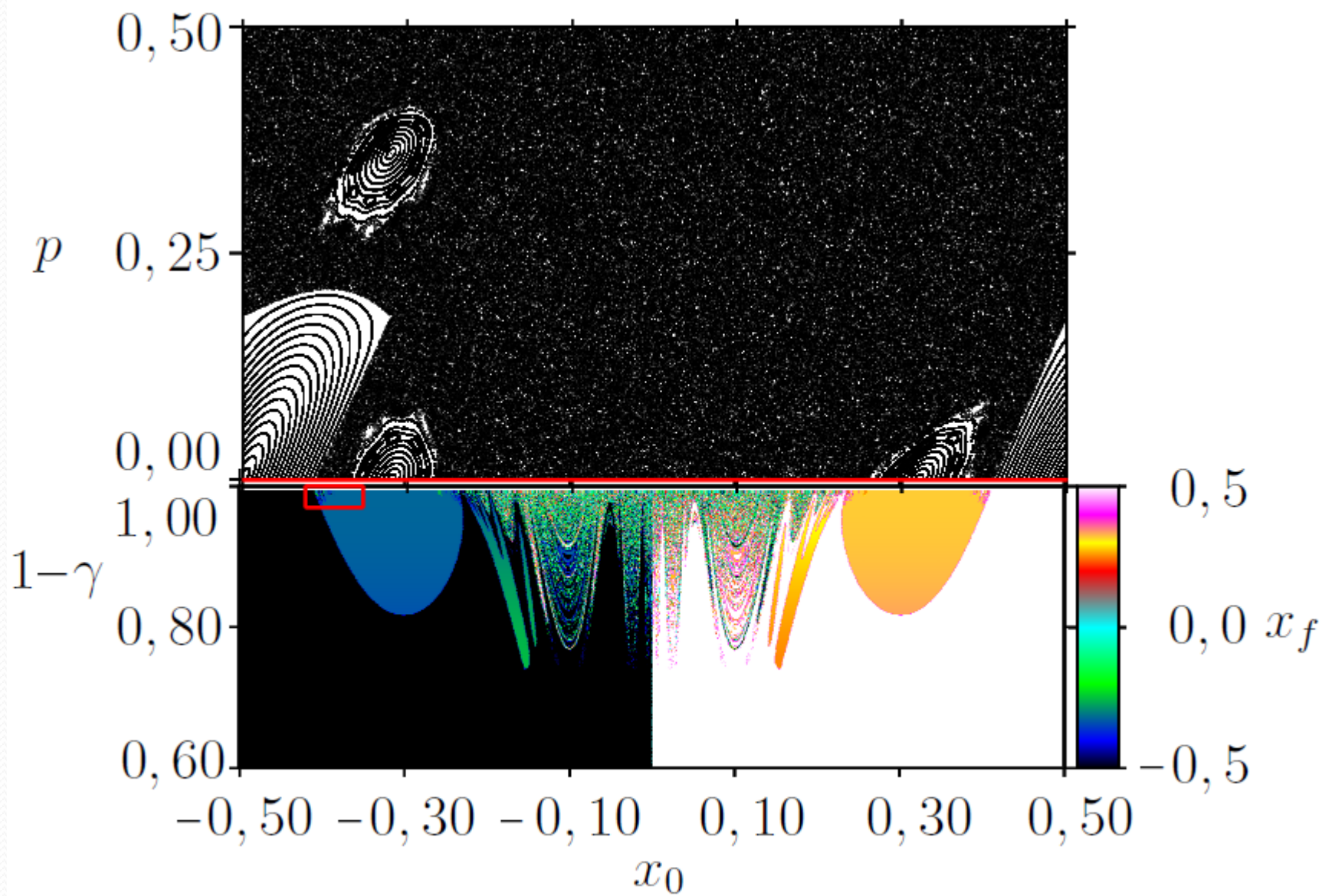


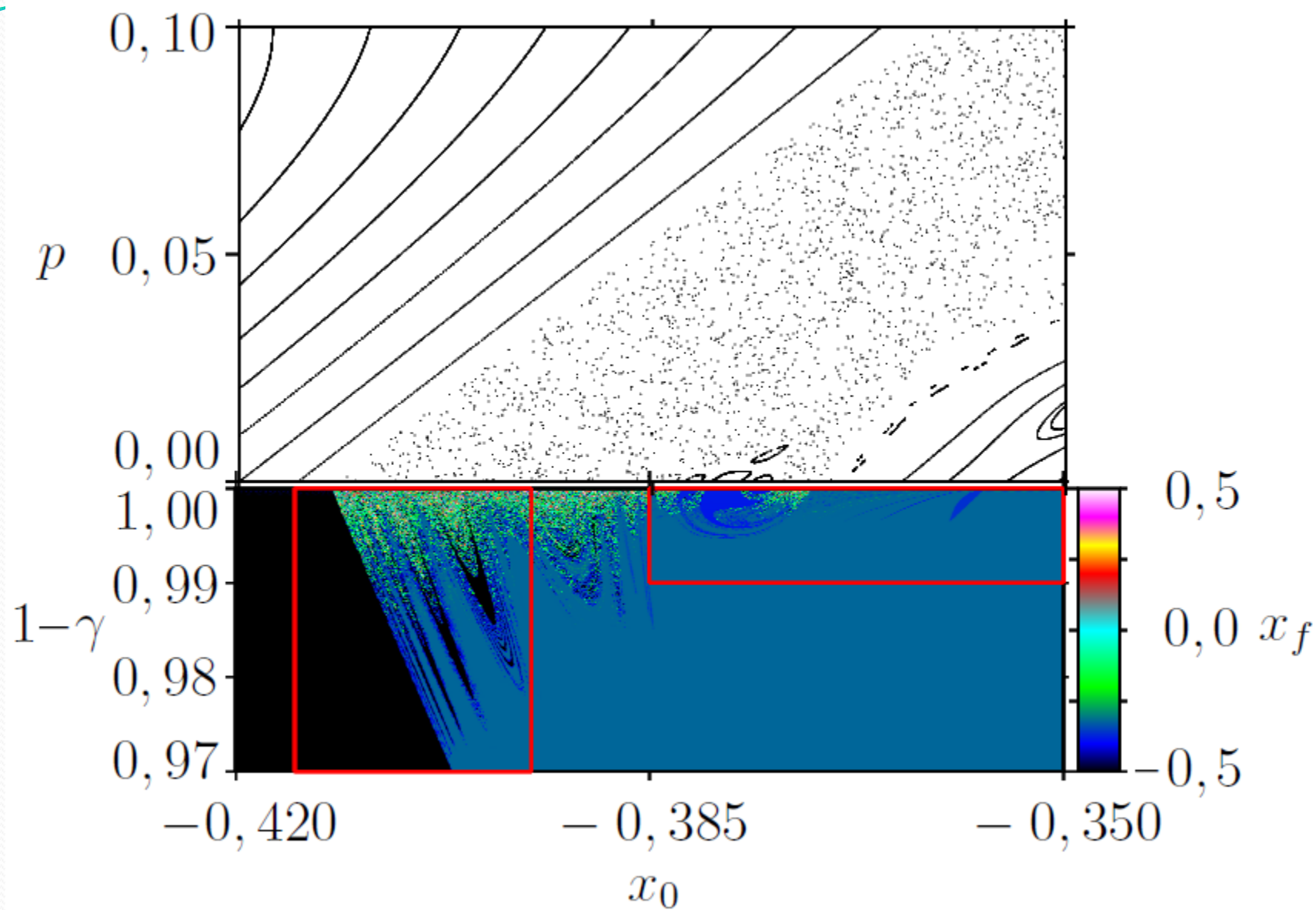
C.I. $\rightarrow (x_0; p_0) = (-0,31; 0,00)$ com $k = 2, 5$.

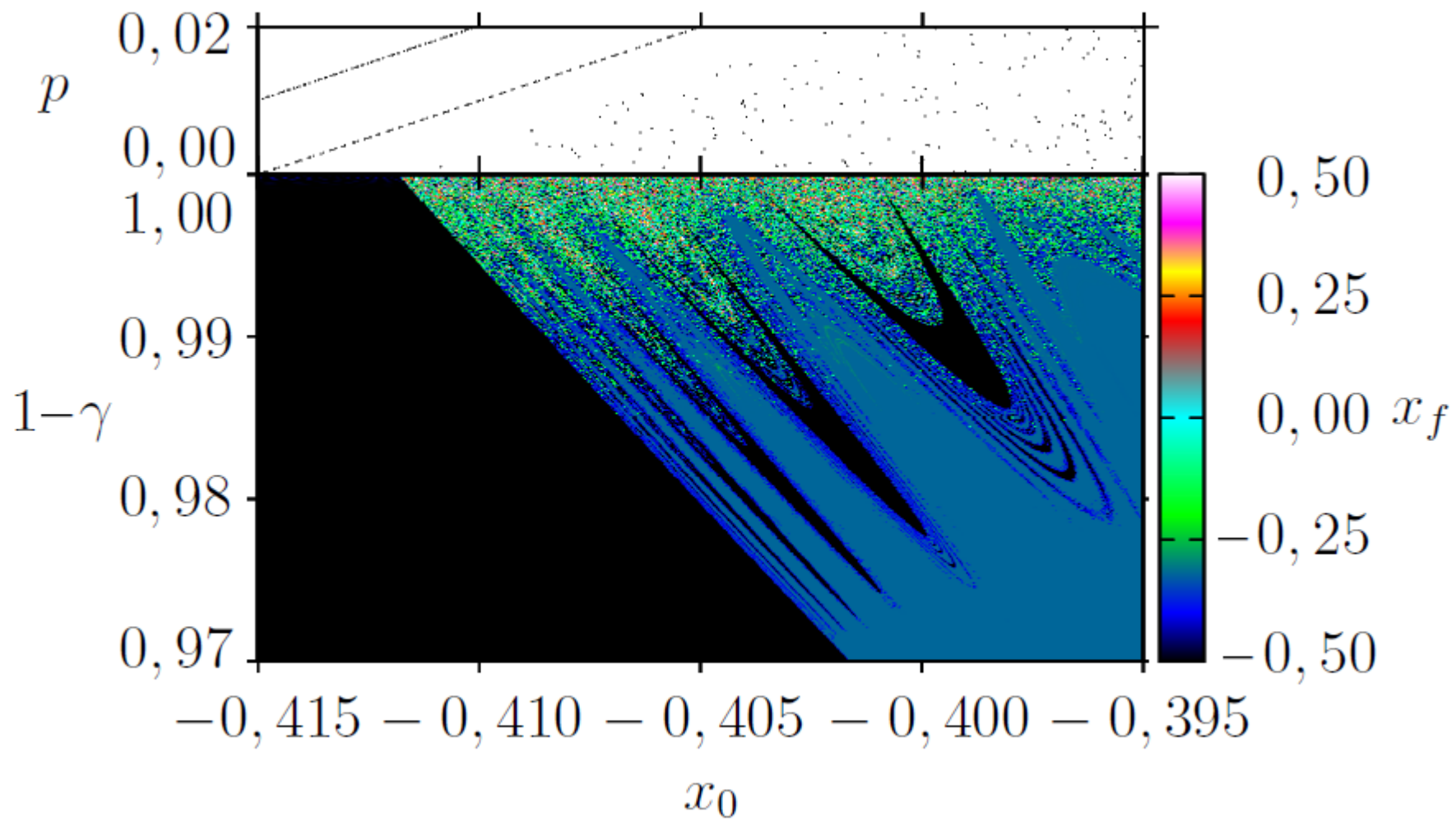


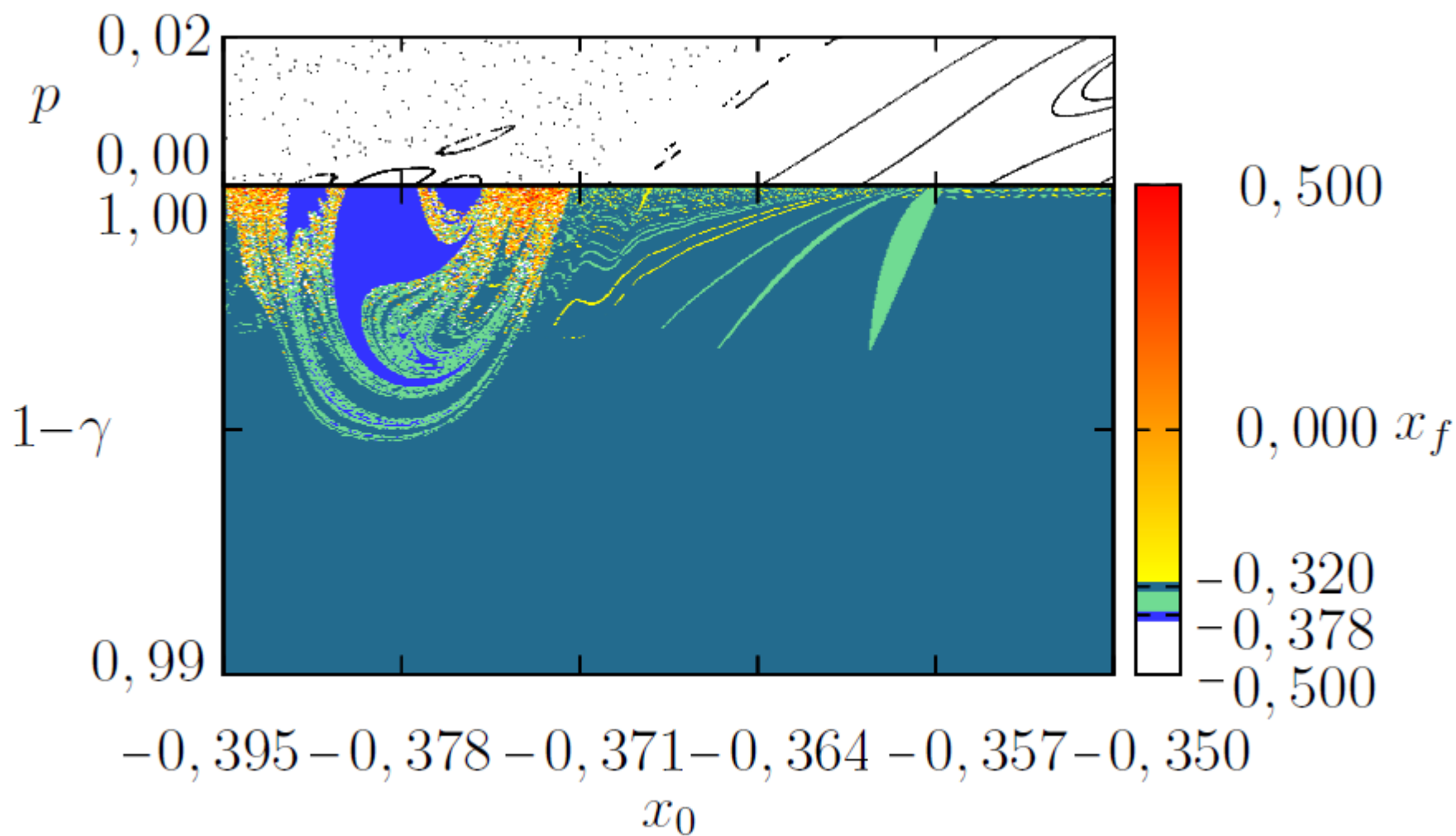
Convergência das Trajetórias

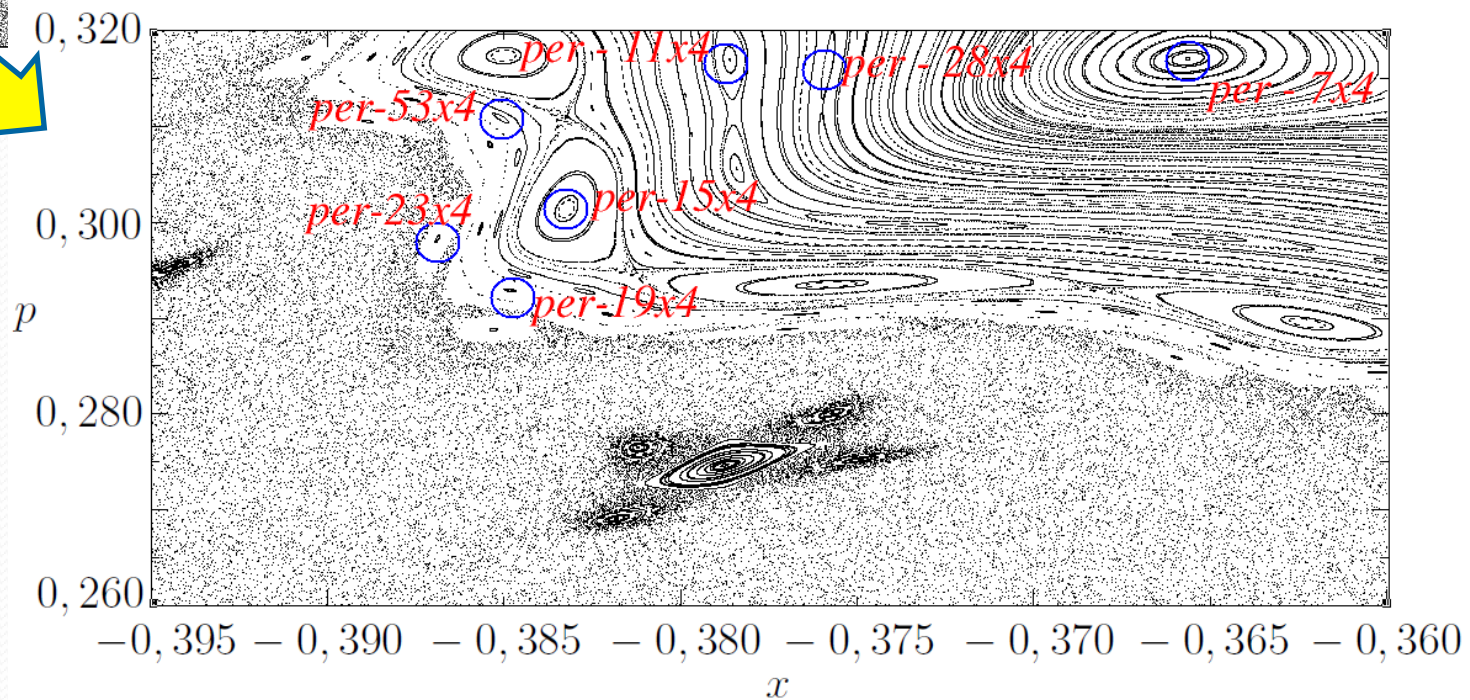
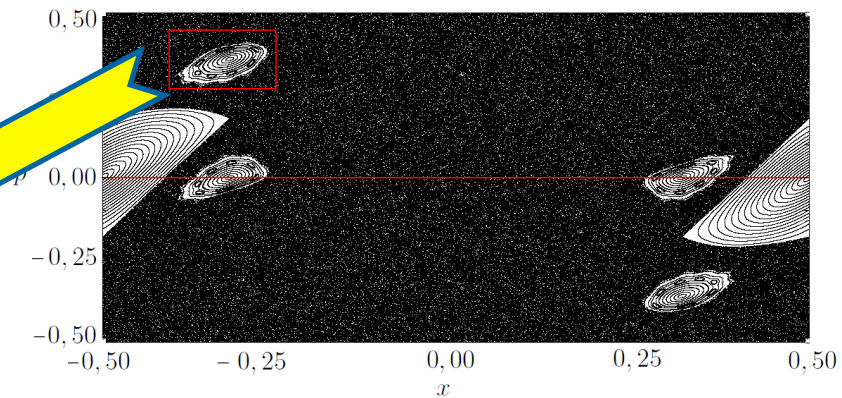
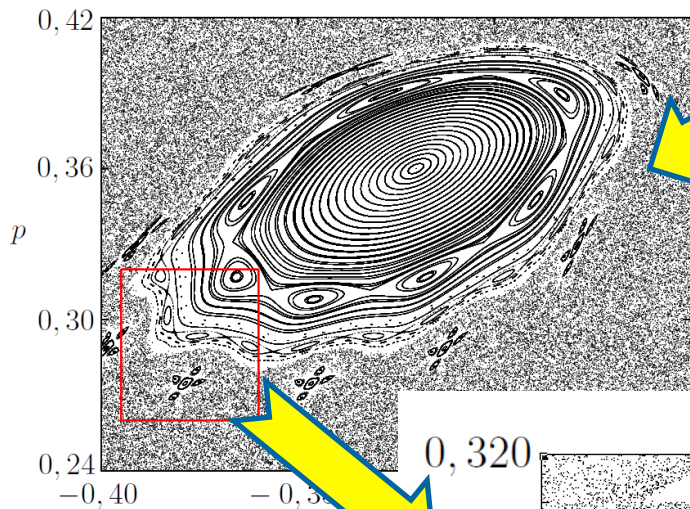


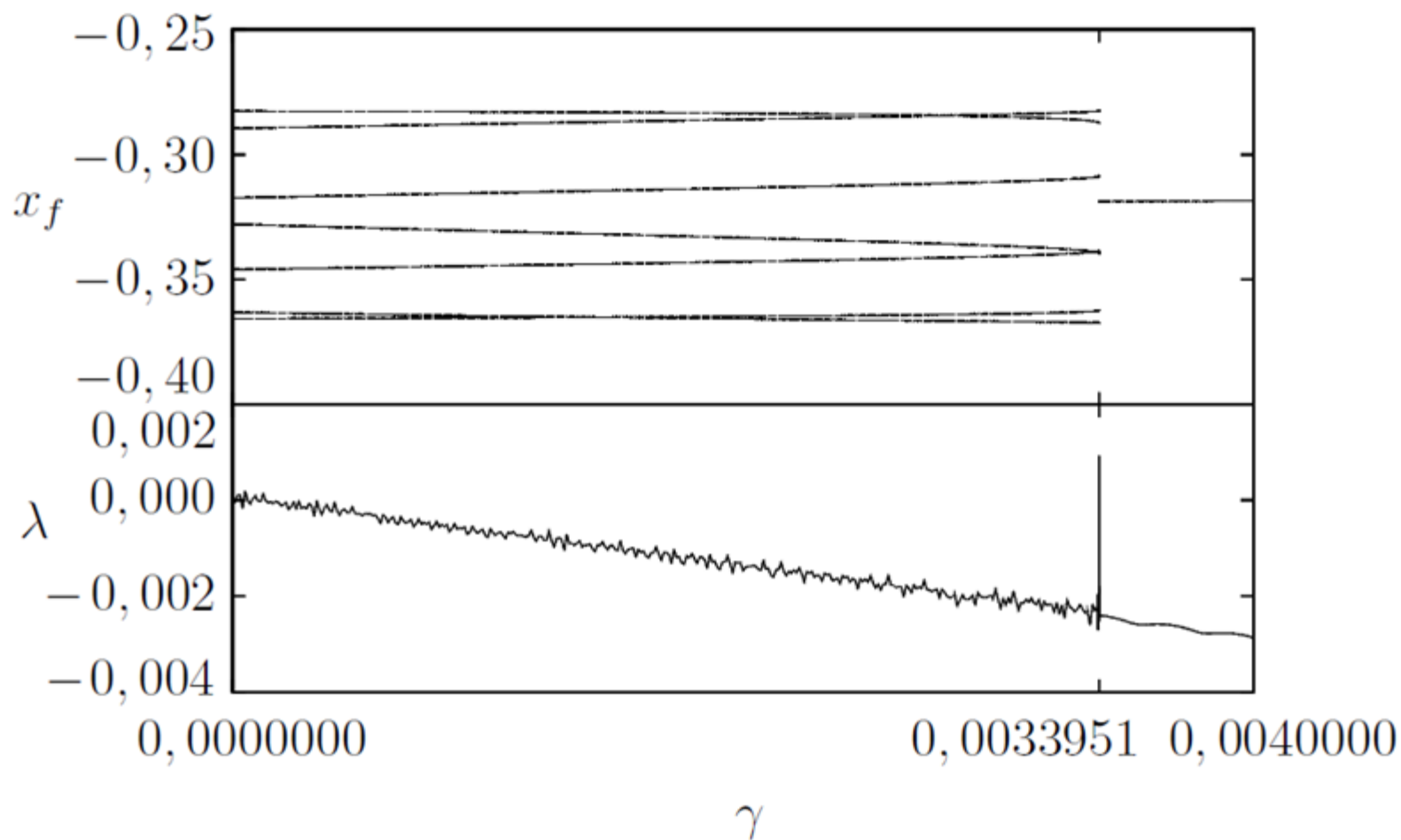






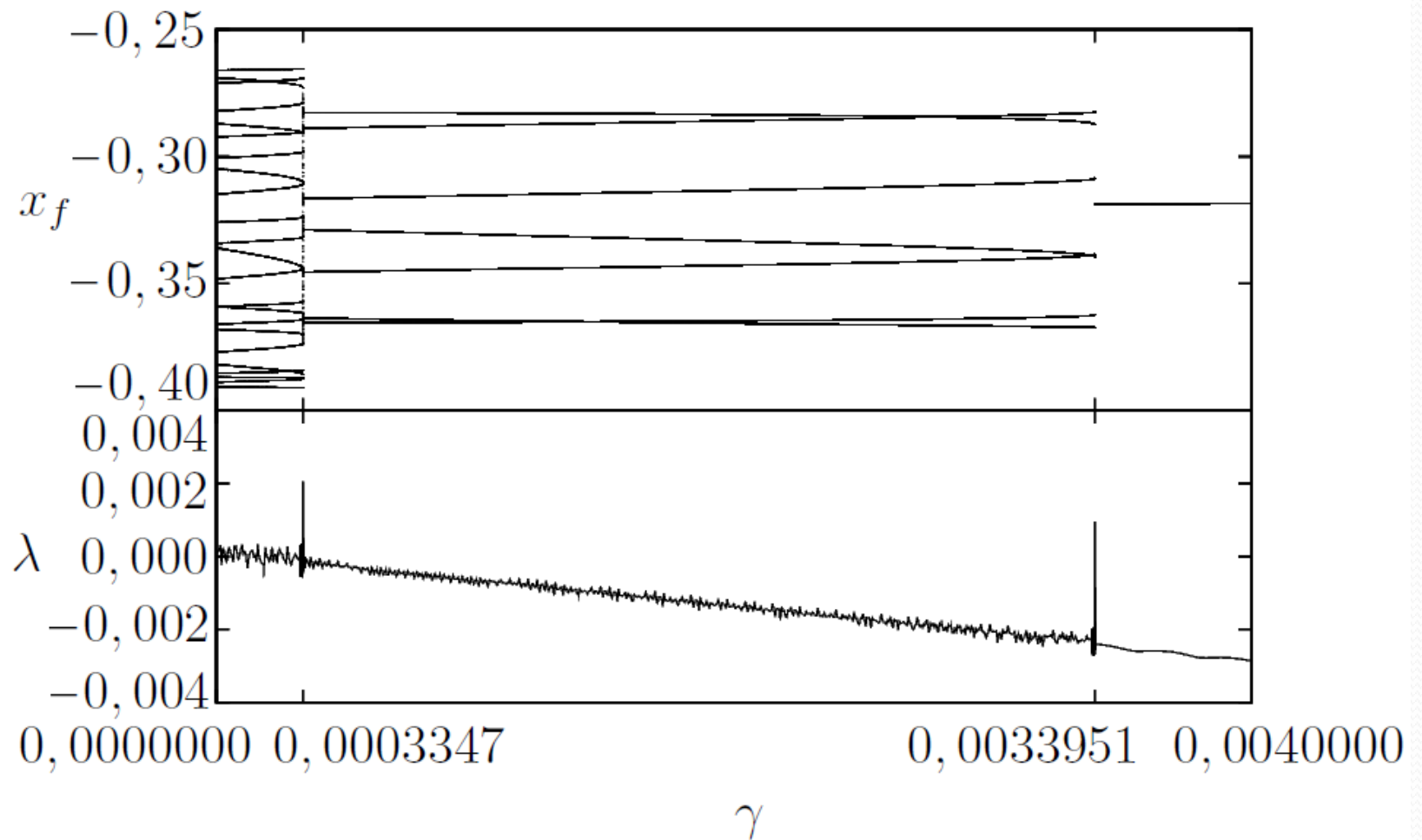






Transição 7x4 $\rightarrow$ 1x4

$(x_0; p_0) = (-0,365650; 0,317050)$



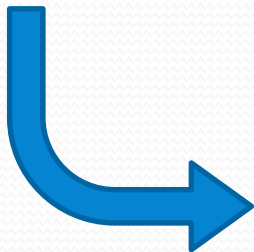
Transição $23x4 \rightarrow 7x4 \rightarrow 1x4$.
 $(x_0; p_0) = (-0,386885; 0,298300)$

Hiperbolicidades *(Ângulos entre as variedades estáveis e instáveis).*

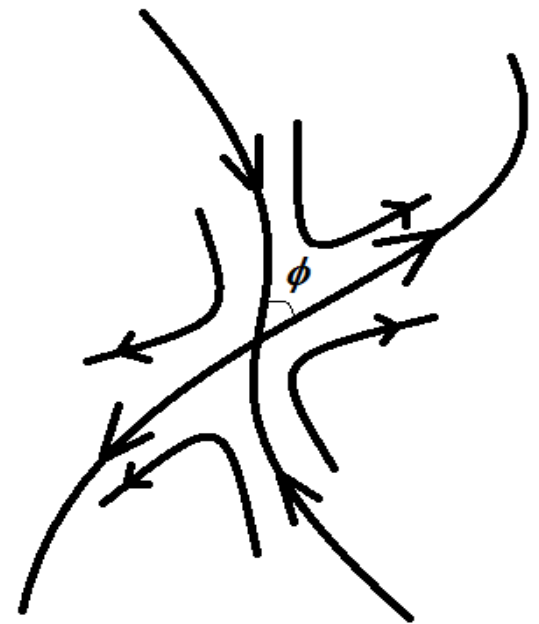
Calculadas a partir dos Autovetores fornecidos pelos Autovalores da Jacobiana. São os Vetores Covariantes de Lyapunov.

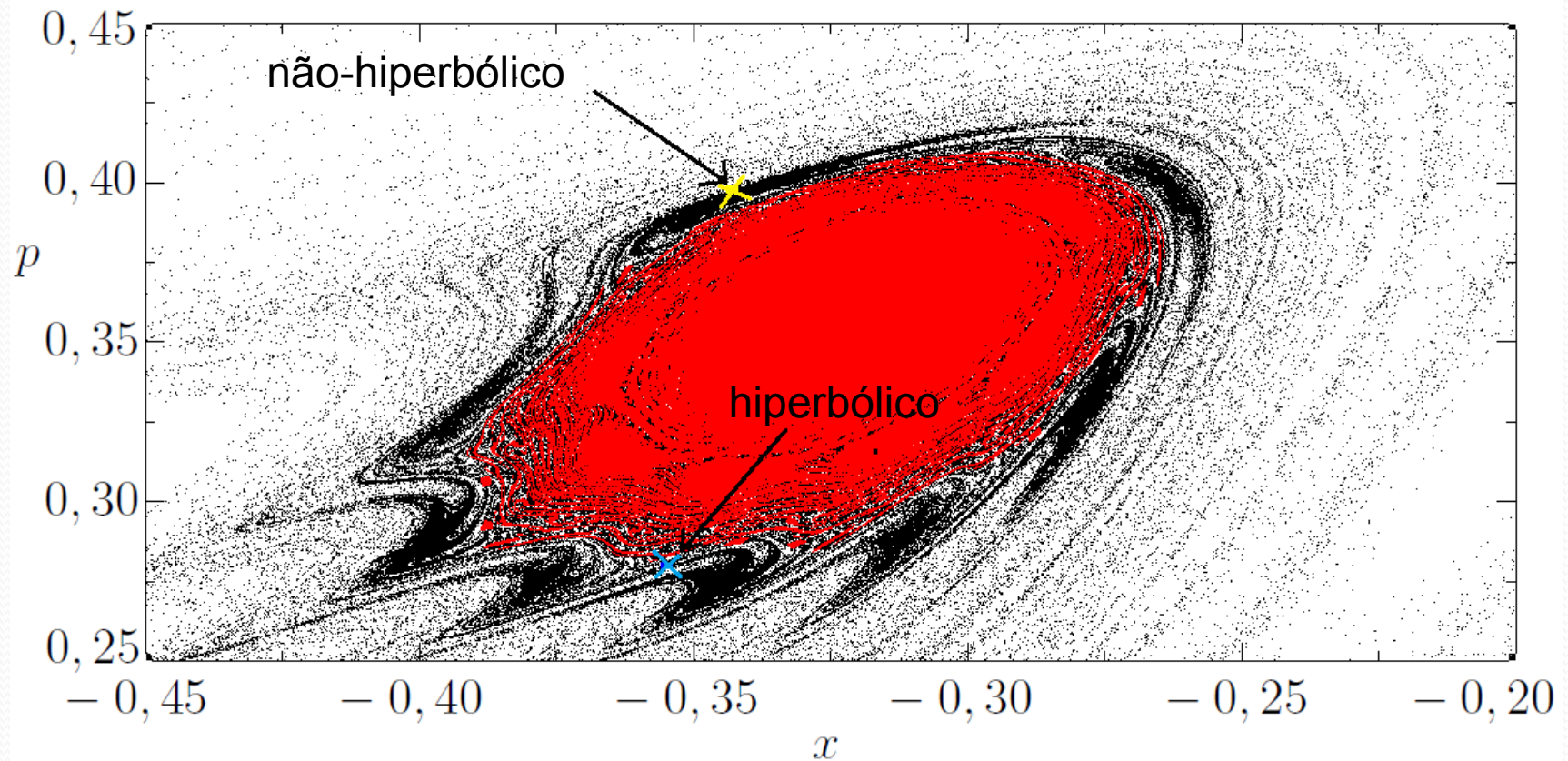
$$\vec{V}^j(x, p) \rightarrow \lambda_{max}^j \quad (\text{frente})$$

$$\vec{V}^s(x, p) \rightarrow \lambda_{min}^s \quad (\text{trás})$$



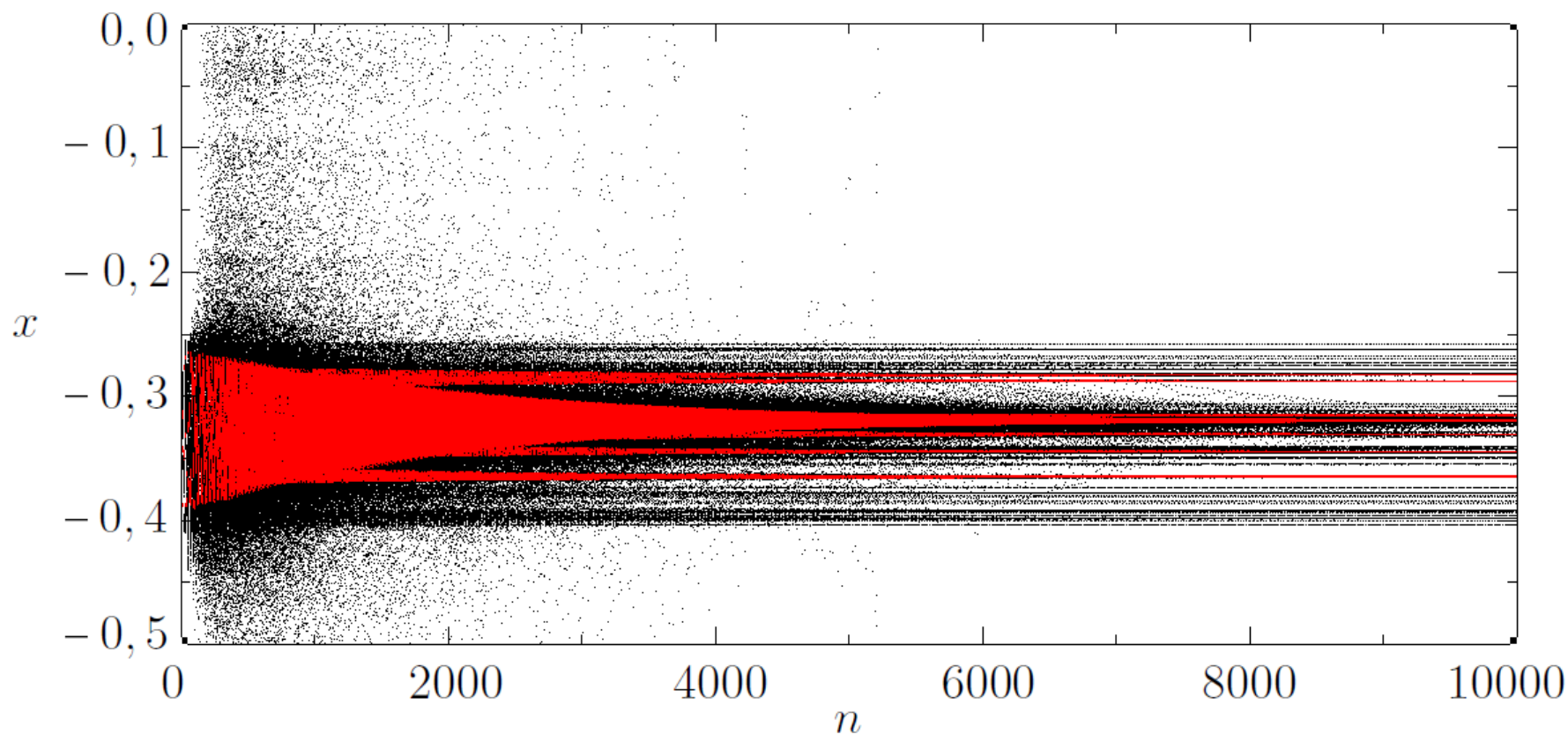
$$\phi_n^{j,s} = \cos^{-1}(|\vec{V}_n^j \cdot \vec{V}_n^s|)$$





1000 condições iniciais nos pontos: $\gamma = 10^{-3}$

{ $Hiperbólico (x,p) = (-0,355; 0,280) \rightarrow (vermelho)$
 $Não-Hiperbólico (x,p) = (-0,343; 0,398) \rightarrow (preto)$



1000 condições iniciais nos pontos: $\gamma = 10^{-3}$

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Hiperbólico } (x,p) = (-0,355; 0,280) & \rightarrow (\text{vermelho}) \\ \text{Não-Hiperbólico } (x,p) = (-0,343; 0,398) & \rightarrow (\text{preto}) \end{array} \right.$

Conteúdo

- ❑ Características

- ❑ Introdução Teórica

- Sistemas Discretos
- Teorema KAM
- Teorema de Poincaré-Birkhoff

- ❑ Mapa padrão

- Conservativo
- Dissipativo

- ❑ Transição para o Dissipativo

- Mapa Padrão

↳ Expoente de Lyapunov → Reortonormalização de Gram-Schmidt

- .

- ❑ Considerações

Considerações

- ✓ *Foi possível a descrição da formação das bacias de atração em função da dissipação.*
- ✓ *Verificou-se a maneira de como ocorrem as quebras das linhas regulares e deformação das ilhas.*
- ✓ *Verificou-se uma possível hierarquia nas atrações em função das ordens das ilhas.*