



PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Primeira Lista de Exercícios

2º semestre de 2021

1. Um pêndulo simples de massa m , comprimento l e ângulo de deslocamento θ é colocado no interior de um trem que se move a uma aceleração constante a na direção x , conforme mostra a figura 1.

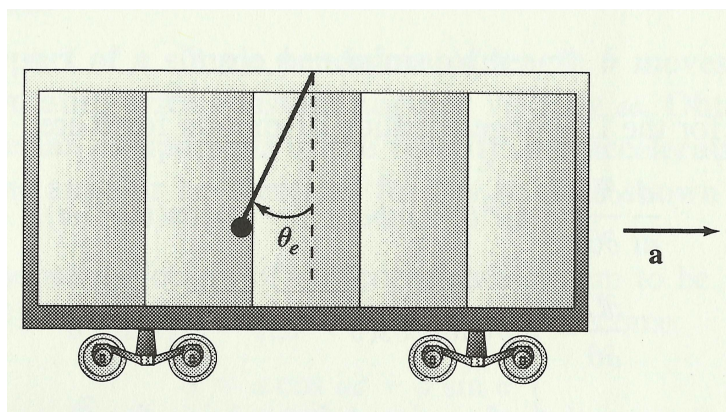


Figura 1: Ângulo de equilíbrio de um pêndulo simples no interior de um trem em aceleração.

- (a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana que descrevem o pêndulo.
- (b) Escreva a equação de movimento para o ângulo θ .
- (c) Determine o ângulo de equilíbrio θ_e mostrado na figura 1.
- (d) Mostre que a frequência de pequenas oscilações do pêndulo é dada por $\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}$.
- (e) Considere agora que a aceleração passa a ser na direção vertical y . Escreva as equações de movimento para este caso.
- (f) Mostre que o período de pequenas oscilações é, então, dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}}$.
2. Para um sistema dinâmico autônomo ($\partial L/\partial t = 0$) mostre que

$$\frac{dU}{dt} = 0,$$

sendo $U \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$ a integral de Jacobi.

3. Considere o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação do potencial conservativo:

$$V(q) = \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{A}{3}q^3,$$

com $\omega > 0$ e $A > 0$.

- (a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana do sistema.
- (b) Verifique que H é uma constante de movimento.

- (c) Verifique que $(q, p) = (0, 0)$ e $(\omega^2/A, 0)$ são pontos fixos no espaço de fase $p \times q$.
- (d) Faça um esboço do gráfico de V em função de q .
- (e) Faça um esboço das possíveis trajetórias (linhas com H constante) no espaço de fase para diferentes valores de H .
- (f) Identifique no esboço do item anterior as trajetórias periódicas.
- (g) Mostre que a equação da trajetória da separatriz (que separa as trajetórias periódicas das demais) é dada por:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} = \frac{\omega^6}{6A^2}.$$

4. Dada a seguinte transformação:

$$Q = q^\alpha \cos \beta p,$$

$$P = q^\alpha \sin \beta p.$$

- (a) Encontre os valores de α e β para que a transformação seja canônica.
- (b) Para estes valores de α e β , construa uma função geratriz para a transformação.

5. Mostre que a transformação

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2,$$

$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2$$

é canônica. Em seguida, encontre uma função geratriz para a transformação.

6. Verifique as seguintes propriedades dos colchetes de Poisson canônicos:

$$\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\},$$

$$\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\},$$

onde F_1 , F_2 e G são funções das variáveis canônicas q e p .

7. Usando a identidade de Jacobi

$$\{F, \{G, R\}\} + \{R, \{F, G\}\} + \{G, \{R, F\}\} = 0,$$

na qual F , G e R são funções das variáveis q e p canonicamente associadas, verifique a validade do teorema de Poisson:

$$\frac{dF(q, p)}{dt} = 0, \quad \frac{dG(q, p)}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\{F, G\}}{dt} = 0,$$

isto é, o colchete de Poisson de duas constantes de movimento também é uma constante de movimento.

8. Considere o potencial $V(x)$ na forma de um poço infinito, isto é, $V = 0$ para $-a \leq x \leq a$ e $V = \infty$ para $|x| > a$ (apresentado no apêndice B.3 do livro de L. E. Reichl). Uma partícula de massa m desloca-se sob a ação desse potencial.

- (a) Faça gráficos de $p = mv$ e x em função de t . Suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja em $x = -a$ e se desloca com $v_0 > 0$ (situação imediatamente após uma colisão).
- (b) Calcule variáveis de ângulo e ação (θ, I) para descrever a trajetória dessa partícula.
- (c) Faça os gráficos de θ e I em função de t a partir de $t = 0$. Indique os valores $\theta(t = 0)$ e $I(t = 0)$.
- (d) Escreva a Hamiltoniana em função de (x, p) e (θ, I) .
- (e) Obtenha (x, p) em função de (θ, I) .

9. Considere a Hamiltoniana integrável que descreve a rede de Toda com três partículas (conforme a discussão na página 36 do livro de A. J. Lichtenberg):

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \exp[-(\phi_1 - \phi_3)] + \exp[-(\phi_2 - \phi_1)] + \exp[-(\phi_3 - \phi_2)] - 3.$$

(a) Mostre que as funções H e $F = p_1 + p_2 + p_3$ são (as duas primeiras) constantes de movimento.

(b) Use a transformação canônica determinada pela função geratriz

$$S = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \phi_3 (P_3 - P_1 - P_2)$$

para determinar as relações entre as novas e antigas variáveis canônicas:

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \quad P_3 = p_1 + p_2 + p_3, \quad \Phi_1 = \phi_1 - \phi_3, \quad \Phi_2 = \phi_2 - \phi_3, \quad \Phi_3 = \phi_3.$$

(c) Obtenha a nova Hamiltoniana em termos das variáveis canônicas Φ_i e P_i :

$$H = \frac{1}{2} [P_1^2 + P_2^2 + (P_3 - P_1 - P_2)^2] + \exp[-\Phi_1] + \exp[-(\Phi_2 - \Phi_1)] + \exp[\Phi_2] - 3.$$

(d) Verifique que P_3 é uma constante de movimento.

(e) Daqui em diante, sem perda de generalidade, considere que $P_3 = 0$. Mostre que a Hamiltoniana do item (c) pode ser reescrita na forma de uma Hamiltoniana $h(x, y, p_x, p_y)$ que descreve o movimento de uma partícula em um potencial bidimensional $V(x, y)$:

$$h = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24} \left[\exp(2y + 2\sqrt{3}x) + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y) \right] - \frac{1}{8}.$$

Para obter a Hamiltoniana anterior, considere inicialmente a transformação canônica entre as novas variáveis (x', y', p'_x, p'_y) e as antigas $(\Phi_1, \Phi_2, P_1, P_2)$ com a seguinte função geratriz:

$$W = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[(p'_x - \sqrt{3}p'_y) \Phi_1 + (p'_x + \sqrt{3}p'_y) \Phi_2 \right].$$

Então, considere uma nova transformação, não canônica, mas trivial:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad p'_x = 8\sqrt{3}p_x, \quad p'_y = 8\sqrt{3}p_y, \quad h = \frac{H}{24}.$$

(f) Mostre que a função I , exibida a seguir, é a terceira constante de movimento:

$$I = 8p_x (p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y) \exp(2y - 2\sqrt{3}x) - 2p_x \exp(-4y) + (p_x - \sqrt{3}p_y) \exp(2y + 2\sqrt{3}x).$$

10. A Hamiltoniana integrável para a rede de Toda com três partículas pode ser reduzida sem qualquer aproximação (conforme visto no exercício anterior da presente lista e também de acordo com a discussão na página 38 do livro de A. J. Lichtenberg) a uma nova Hamiltoniana integrável, que descreve o movimento equivalente de uma partícula com energia cinética $K(p_x, p_y)$ em um potencial bidimensional $V(x, y)$:

$$h = (x, y, p_x, p_y) = K(p_x, p_y) + V(x, y),$$

$$K(p_x, p_y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2),$$

$$V(x, y) = \frac{1}{24} \left[\exp(2y + 2\sqrt{3}x) + \exp(2y - 2\sqrt{3}x) + \exp(-4y) \right] - \frac{1}{8}.$$

(a) Há duas constantes de movimento para esse sistema. Consequentemente, cada trajetória no espaço de fase, com dimensão igual a quatro, está localizada em uma superfície bidimensional. Justifique esta afirmação.

(b) Como consequência do item (a), as interseções de cada trajetória no espaço de fase com o plano $p_y \times y$, para $x = 0$ e $\frac{dx}{dt} > 0$ (mapa de Poincaré), se localizam em curvas. Justifique.

- (c) Expanda o potencial $V(x, y)$ mantendo até os termos cúbicos em x e y . Desta forma, obtenha a Hamiltoniana de Hénon-Heiles:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

A Hamiltoniana anterior não é integrável, pois há apenas uma constante de movimento (veja a página 38 do livro de A. J. Lichtenberg). Portanto, há trajetórias no espaço de fase, com quatro dimensões, que percorrem um volume tridimensional. Justifique esta última afirmação.

- (d) Como consequência das afirmações do item (c), sabemos que, no espaço de fase, há trajetórias cujas interseções com o plano $p_y \times y$, para $x = 0$ e $\frac{dx}{dt} > 0$ (mapa de Poincaré), não se localizam em curvas, mas se espalham em determinadas áreas. Justifique.

11. Considere a Hamiltoniana

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2,$$

na qual I_j e θ_j , $j = 1, 2$, são variáveis canonicamente conjugadas.

- (a) Dados os valores iniciais I_j^0 e θ_j^0 , no instante de tempo $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$.
 (b) Daqui em diante, considere a seguinte Hamiltoniana perturbada (apresentada na página 31 do livro de L. E. Reichl):

$$H = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2),$$

na qual $\alpha \ll 1$. Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento.

- (c) Mostre que a seguinte transformação, das variáveis (θ_j, I_j) para as variáveis (ϕ_j, J_j) , é canônica:

$$J_1 = I_1 + I_2, \quad J_2 = I_2, \quad \phi_1 = \theta_1, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

- (d) Obtenha a Hamiltoniana $H(\phi_j, J_j)$:

$$H = J_1 - J_1^2 - J_1J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2) \cos(2\phi_2).$$

- (e) O sistema perturbado é integrável? Justifique.