PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Primeira Lista de Exercícios

2º semestre de 2025

1. Um pêndulo simples de massa m, comprimento l e ângulo de deslocamento θ é colocado no interior de um trem que se move a uma aceleração constante a na direção x, conforme mostra a figura 1.

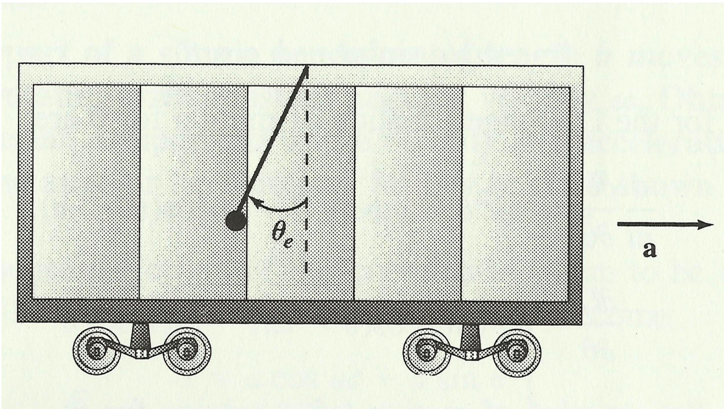

Figure 1: ângulo de equilíbrio de um pêndulo simples no interior de um trem em aceleração.

(a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana que descrevem o pêndulo.

(b) Escreva a equação de movimento para o ângulo θ.

(c) Determine o ângulo de equilíbrio θ_e mostrado na figura 1.

(d) Mostre que a frequência de pequenas oscilações do pêndulo é dada por $\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}$.

(e) Considere agora que a aceleração passa a ser na direção vertical y. Escreva as equações de movimento para este caso.

(f) Mostre que o período de pequenas oscilações é, então, dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}}$.

2. Para um sistema dinâmico autônomo ($\partial L/\partial t = 0$) mostre que

$$\frac{dU}{dt} = 0,$$

sendo $U \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L$ a integral de Jacobi.

3. Considere o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação do potencial conservativo:

$$V(q) = \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{A}{3}q^3,$$

com $\omega > 0$ e $A > 0$.

(a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana do sistema.

(b) Verifique que H é uma constante de movimento.

(c) Verifique que $(q,p) = (0,0)$ e $(\omega^2/A, 0)$ são pontos fixos no espaço de fase $p \times q$.

(d) Faça um esboço do gráfico de V em função de q.

(e) Faça um esboço das possíveis trajetórias (linhas com H constante) no espaço de fase para diferentes valores de H.

(f) Identifique no esboço do item anterior as trajetórias periódicas.

(g) Mostre que a equação da trajetória da separatriz (que separa as trajetórias periódicas das demais) é dada por:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} = \frac{\omega^6}{6A^2}.$$

4. Dada a seguinte transformação:

$$Q = q^\alpha \cos \beta p,$$
$$P = q^\alpha \sin \beta p.$$

(a) Encontre os valores de α e β para que a transformação seja canônica.

(b) Para estes valores de α e β, construa uma função geratriz para a transformação.

5. Mostre que a transformação

$$Q_1 = q_1, \qquad P_1 = p_1 - 2p_2,$$
$$Q_2 = p_2, \qquad P_2 = -2q_1 - q_2$$

é canônica. Em seguida, encontre uma função geratriz para a transformação.

6. Verifique as seguintes propriedades dos colchetes de Poisson canônicos:

$$\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\},$$
$$\{F_1 F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\},$$

onde F_1, F_2 e G são funções das variáveis canônicas q e p.

7. Usando a identidade de Jacobi

$$\{F, \{G, R\}\} + \{R, \{F, G\}\} + \{G, \{R, F\}\} = 0,$$

na qual F, G e R são funções das variáveis q e p canonicamente associadas, verifique a validade do teorema de Poisson:

$$\frac{dF(q,p)}{dt} = 0, \frac{dG(q,p)}{dt} = 0 \to \frac{d\{F,G\}}{dt} = 0,$$

isto é, o colchete de Poisson de duas constantes de movimento também é uma constante de movimento.

8. Considere o potencial $V(x)$ na forma de um poço infinito, isto é, $V = 0$ para $-a \leq x \leq a$ e $V = \infty$ para $|x| > a$ (apresentado no apêndice B.3 do livro de L. E. Reichl). Uma partícula de massa m desloca-se sob a ação desse potencial.

(a) Faça gráficos de $p = mv$ e x em função de t. Suponha que no instante $t = 0$ a partícula esteja em $x = -a$ e se desloca com $v_0 > 0$ (situação imediatamente após uma colisão).

(b) Calcule variáveis de ângulo e ação (θ,I) para descrever a trajetória dessa partícula.

(c) Faça os gráficos de θ e I em função de t a partir de $t = 0$. Indique os valores $\theta(t = 0)$ e $I(t = 0)$.

(d) Escreva a Hamiltoniana em função de (x, p) e (θ, I).

(e) Obtenha (x, p) em função de (θ, I).

9. Considere a Hamiltoniana integrável que descreve a rede de Toda com três partículas (conforme a discussão na página 36 do livro de A. J. Lichtenberg):

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \exp\left[-\left(\phi_1 - \phi_3\right)\right] + \exp\left[-\left(\phi_2 - \phi_1\right)\right] + \exp\left[-\left(\phi_3 - \phi_2\right)\right] - 3.$$

(a) Mostre que as funções H e $F = p_1 + p_2 + p_3$ são (as duas primeiras) constantes de movimento.

(b) Use a transformação canônica determinada pela função geratriz

$$S = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \phi_3 \left(P_3 - P_1 - P_2\right)$$

para determinar as relações entre as novas e antigas variáveis canônicas:

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \quad P_3 = p_1 + p_2 + p_3, \quad \Phi_1 = \phi_1 - \phi_3, \quad \Phi_2 = \phi_2 - \phi_3, \quad \Phi_3 = \phi_3.$$

(c) Obtenha a nova Hamiltoniana em termos das variáveis canônicas Φ_i e P_i:

$$H = \frac{1}{2}\left[P_1^2 + P_2^2 + \left(P_3 - P_1 - P_2\right)^2\right] + \exp\left[-\Phi_1\right] + \exp\left[-\left(\Phi_2 - \Phi_1\right)\right] + \exp\left[\Phi_2\right] - 3.$$

(d) Verifique que P_3 é uma constante de movimento.

(e) Daqui em diante, sem perda de generalidade, considere que $P_3 = 0$. Mostre que a Hamiltoniana do item **(c)** pode ser reescrita na forma de uma Hamiltoniana $h(x, y, p_x, p_y)$ que descreve o movimento de uma partícula em um potencial bidimensional $V(x, y)$:

$$h = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{24}\left[\exp\left(2y + 2\sqrt{3}x\right) + \exp\left(2y - 2\sqrt{3}x\right) + \exp\left(-4y\right)\right] - \frac{1}{8}.$$

Para obter a Hamiltoniana anterior, considere inicialmente a transformação canônica entre as novas variáveis (x', y', p'_x, p'_y) e as antigas $(\Phi_1, \Phi_2, P_1, P_2)$ com a seguinte função geratriz:

$$W = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\left(p'_x - \sqrt{3}p'_y\right)\Phi_1 + \left(p'_x + \sqrt{3}p'_y\right)\Phi_2\right].$$

Então, considere uma nova transformação, não canônica, mas trivial:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad p'_x = 8\sqrt{3}p_x, \quad p'_y = 8\sqrt{3}p_y, \quad h = \frac{H}{24}.$$

(f) Mostre que a função I, exibida a seguir, é a terceira constante de movimento:

$$I = 8p_x\left(p_x^2 - 3p_y^2\right) + \left(p_x + \sqrt{3}p_y\right)\exp\left(2y - 2\sqrt{3}x\right) - 2p_x\exp\left(-4y\right)$$
$$+ \left(p_x - \sqrt{3}p_y\right)\exp\left(2y + 2\sqrt{3}x\right).$$

10. A Hamiltoniana integrável para a rede de Toda com três partículas pode ser reduzida sem qualquer aproximação (conforme visto no exercício anterior da presente lista e também de acordo com a discussão na página 38 do livro de A. J. Lichtenberg) a uma nova Hamiltoniana integrável, que descreve o movimento equivalente de uma partícula com energia cinética $K(p_x, p_y)$ em um potencial bidimensional $V(x, y)$:

$$h = (x, y, p_x, p_y) = K(p_x, p_y) + V(x, y),$$
$$K(p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2),$$
$$V(x, y) = \frac{1}{24}\left[\exp\left(2y + 2\sqrt{3}x\right) + \exp\left(2y - 2\sqrt{3}x\right) + \exp\left(-4y\right)\right] - \frac{1}{8}.$$

(a) Há duas constantes de movimento para esse sistema. Consequentemente, cada trajetória no espaço de fase, com dimensão igual a quatro, está localizada em uma superfície bidimensional. Justifique esta afirmação.

(b) Como consequência do item **(a)**, as interseções de cada trajetória no espaço de fase com o plano $p_y \times y$, para $x = 0$ e $\frac{dx}{dt} > 0$ (mapa de Poincaré), se localizam em curvas. Justifique.

(c) Expanda o potencial $V(x, y)$ mantendo até os termos cúbicos em x e y. Desta forma, obtenha a Hamiltoniana de Hénon-Heiles:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3}.$$

A Hamiltoniana anterior não é integrável, pois há apenas uma constante de movimento (veja a página 38 do livro de A. J. Lichtenberg). Portanto, há trajetórias no espaço de fase, com quatro dimensões, que percorrem um volume tridimensional. Justifique esta última afirmação.

(d) Como consequência das afirmações do item **(c)**, sabemos que, no espaço de fase, há trajetórias cujas interseções com o plano $p_y \times y$, para $x = 0$ e $\frac{dx}{dt} > 0$ (mapa de Poincaré), não se localizam em curvas, mas se espalham em determinadas áreas. Justifique.

11. Considere a Hamiltoniana

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2,$$

na qual I_j e θ_j, $j = 1, 2$, são variáveis canonicamente conjugadas.

(a) Dados os valores iniciais I_j^0 e θ_j^0, no instante de tempo $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$.

(b) Daqui em diante, considere a seguinte Hamiltoniana perturbada (apresentada na página 31 do livro de L. E. Reichl):

$$H = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2),$$

na qual $\alpha \ll 1$. Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento.

(c) Mostre que a seguinte transformação, das variáveis (θ_j, I_j) para as variáveis (ϕ_j, J_j), é canônica:

$$J_1 = I_1 + I_2, \quad J_2 = I_2, \quad \phi_1 = \theta_1, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

(d) Obtenha a Hamiltoniana $H(\phi_j, J_j)$:

$$H = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2)\cos(2\phi_2).$$

(e) O sistema perturbado é integrável? Justifique.