PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Segunda Lista de Exercícios

2^{o} semestre de 2025

1. Considere, inicialmente, a seguinte Hamiltoniana integrável:

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2,$$

a qual está descrita em termos de suas variáveis de ângulo e ação, designadas respectivamente por θ_i e I_i, para $i = 1, 2$.

(a) Mostre que as frequências características das trajetórias no espaço de fase são

$$\omega_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 1 - 3I_1 + 2I_2.$$

(b) No espaço de fase descrito pela Hamiltoniana H_0, considere uma trajetória Γ com condições iniciais $\theta_1(t=0) = \alpha_1$, $\theta_2(t=0) = \alpha_2$, $I_1(t=0) = \beta_1$ e $I_2(t=0) = \beta_2$. Calcule $\theta_i(t)$ e $I_i(t)$.

(c) Agora, considere a Hamiltoniana H composta por H_0 e uma pequena perturbação:

$$H = H_0 + \alpha H_1 = H_0(I_1, I_2) + \alpha I_1 I_2 \cos\left(m\theta_1 - n\theta_2\right),$$

na qual m e n são dois números inteiros e $\alpha \ll 1$.

Mostre que a perturbação, descrita por H_1, atua de forma ressonante sobre a trajetória Γ no caso de $\omega_1/\omega_2 \approx n/m$. Obtenha a seguinte relação aproximada entre os valores iniciais β_1 e β_2 para que a condição de ressonância seja satisfeita:

$$\beta_1 \approx \frac{2n + 3m}{3n - 2m}\beta_2 + \frac{n - m}{3n - 2m}.$$

(d) Mostre que a função $R = (nI_1 + mI_2)/2$ é uma constante do movimento perturbado, isto é, da dinâmica imposta pela Hamiltoniana H.

2. Como continuação para o exercício anterior, realizaremos a aplicação da teoria de perturbações para determinar a alteração, devida à perturbação H_1, sobre a trajetória Γ, a qual foi determinada pela Hamiltoniana H_0. Com este intuito, considere a função geratriz

$$G = F_1\theta_1 + F_2\theta_2 + \alpha g_{nm}\sin(m\theta_1 - n\theta_2), \quad g_{nm} = -\frac{F_1F_2}{m\omega_1 - n\omega_2},$$

que define uma transformação canônica entre as variáveis (θ_i, I_i) e (ϕ_i, F_i). Empregando a transformação de variáveis estabelecida por G, podemos reescrever a Hamiltoniana H no seguinte formato:

$$H = h_0(F_1, F_2) + O(\alpha^2).$$

(a) Escreva as relações entre as novas e as antigas variáveis até a primeira ordem em α.

(b) Determine $h_0(F_1, F_2)$.

(c) F_1 e F_2 são constantes de movimento, ao longo da trajetória Γ perturbada, até a primeira ordem em α. Justifique esta afirmação.

(d) Obtenha as frequências características ν_1 e ν_2 da trajetória Γ perturbada no espaço de fase $F_i \times \phi_i$.

(e) Obtenha as correções sobre as funções ω_1 e ω_2, calculadas para H_0 na questão **1.a**, devidas à perturbação H_1.

(f) Obtenha $\phi_i(t)$ e $F_i(t)$ para a trajetória Γ perturbada.

(g) Obtenha as correções sobre as soluções $\theta_i(t)$ e $I_i(t)$, calculadas na questão **1.b** para a Hamiltoniana H_0, devidas à perturbação sobre a trajetória Γ.

(h) O método utilizado nesta questão para a descrição das alterações sobre a trajetória Γ não é válido na região do espaço de fase próxima à região de ressonância. Justifique esta afirmação.

3. Considere uma Hamiltoniana do mesmo tipo utilizado nas questões anteriores:

$$H = H_0 + \alpha H_1 = H_0(I_1, I_2) + \alpha I_1 I_2 \cos[2(\theta_1 - \theta_2)], \quad \alpha \ll 1,$$
$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2.$$

(a) Empregue as duas constantes de movimento de uma trajetória, $E = H$ e $R = I_1 + I_2$, para obter a equação que descreve a seção de Poincaré desta trajetória no plano $I_1 \times \theta_1$ com $\theta_2 = 0$:

$$E = R + R^2 + [3 - \alpha \cos(2\theta_1)]I_1^2 - [5R - \alpha R \cos(2\theta_1)]I_1.$$

(b) Utilizando a condição de ressonância $\omega_1/\omega_2 \approx 1$, mostre que, na região de ressonância, as coordenadas I_1 e I_2 assumem valores que satisfazem a condição $I_1 \approx 5I_2$.

(c) A partir do resultado do item anterior, mostre que, na região de ressonância,

$$I_1 \approx 5I_2 = \frac{5}{13}\left[1 \pm \left(1 - \frac{13}{3}E\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

(d) Os pontos fixos dessa ressonância existem apenas para $E < 3/13 \approx 0.23$. Justifique esta afirmação.

(e) Para um valor fixo de E, esboce a seção de Poincaré em $\theta_2 = 0$ sobre o plano $p_1 \times q_1$. Considere diversas trajetórias, referentes a valores distintos da constante de movimento R. As variáveis cartesianas (q_i, p_i), para $i = 1, 2$, são obtidas das coordenadas de ângulo e ação (θ_i, I_i), correspondentes à Hamiltoniana H_0, de acordo com a seguinte transformação canônica:

$$q_i = \sqrt{2I_i}\cos\theta_i \quad \text{e} \quad p_i = -\sqrt{2I_i}\sin\theta_i.$$

4. Considere a Hamiltoniana de uma partícula, de massa m_0 e carga elétrica $-e$, sob a ação de duas ondas eletrostáticas com amplitudes V_i, números de onda k_i e frequências ω_i:

$$H(p, x, t) = \frac{p^2}{2m_0} - e[V_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + V_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)], \tag{1}$$

na qual p e x são, respectivamente, o momento e a posição da partícula.

O objetivo desta questão é estimar os valores das amplitudes V_1 e V_2 que destroem as ilhas ressonantes no espaço de fase e criam a predominância de trajetórias caóticas na região entre estas ilhas. Nas questões a seguir, com o propósito de simplificar a notação, utilizaremos versões reformuladas das variáveis e dos parâmetros que aparecem na Hamiltoniana (1). Além disto, consideraremos apenas o caso particular em que $k_2/k_1 = 2$.

Inicialmente, considere a Hamiltoniana integrável

$$H_0 = \frac{I^2}{2},$$

a qual descrevemos em termos da sua variável de ação I.

(a) Calcule a frequência ω característica de uma trajetória com ação I.

(b) A seguir, considere a Hamiltoniana H composta pela função H_0 e duas perturbações dependentes da variável angular θ e do tempo canônico τ:

$$H(\theta, I, \tau) = H_0(I) - a\cos\theta - b\cos(2\theta - \tau),$$

na qual as constantes a e b representam os parâmetros de controle.

Mostre que as perturbações atuam de forma ressonante sobre trajetórias com ações em torno dos valores $I = 0$ e $I = 0.5$.

(c) Calcule o espaçamento δI entre as ressonâncias no espaço de fase $I \times \theta$.

(d) Calcule a largura no espaço de fase Δ_a da ilha localizada na região da ressonância com $I = 0$. Neste caso, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($b = 0$).

(e) Calcule a largura no espaço de fase Δ_b de uma ilha localizada na região da ressonância com $I = 0.5$. Nesta situação, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($a = 0$).

(f) Faça um esboço gráfico dessas ilhas no espaço de fase.

(g) Escreva, em função dos valores dos parâmetros a e b, a condição de Chirikov para a observação, no espaço de fase, de caos global na região entre as duas ressonâncias discutidas anteriormente.

5. Considere a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \frac{J^3}{8} + \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3t), \quad \epsilon \ll 1,$$

na qual (ϕ, J) são as variáveis de ângulo e ação do sistema para $\epsilon = 0$.

No presente exercício, considere uma trajetória do sistema não perturbado ($\epsilon = 0$) com condições iniciais $\phi(t = 0) = \alpha$ e $J(t = 0) = \beta$.

(a) Calcule $\phi(t)$ e $J(t)$ para a trajetória indicada.

(b) Escreva a frequência ω_0 dessa trajetória.

(c) Estime o valor da condição inicial $\beta = \beta_r$ para o qual a perturbação sobre a trajetória, decorrente do termo da Hamiltoniana que depende do parâmetro ϵ, é ressonante.

6. Empregando novamente a Hamiltoniana do exercício **5** para $\epsilon \neq 0$, considere agora as trajetórias próximas à região de ressonância, ou seja, com condição inicial $\beta \approx \beta_r$.

(a) Expandindo H em torno de $J = \beta_r$, obtenha a Hamiltoniana

$$h(\phi, \Delta J) = \omega_0 \Delta J + \frac{3\beta_r}{8} \Delta J^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos(2\phi - 3t).$$

Indique as transformações necessárias para obter h.

(b) Realize a transformação canônica com função geratriz $S = I(2\phi - 3t)$, entre os conjuntos de variáveis $(\phi, \Delta J)$ e (θ, I), e reescreva a Hamiltoniana h como:

$$h(\theta, I) = \frac{3\beta_r}{2} I^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos\theta.$$

(c) Faça um esboço no espaço $I \times \theta$ das trajetórias próximas à região da ressonância. Neste esboço, represente os pontos de equilíbrio elípticos e hiperbólicos. Além disto, identifique a separatriz em forma de ilha.

(d) Escreva equação da separatriz.

(e) Calcule a semi-largura δ da ilha esboçada no item **c**.

7. Utilizando novamente a Hamiltoniana do exercício **5**, considere agora as trajetórias distantes da região de ressonância. O objetivo desta questão é analisar os efeitos da perturbação $H_1 = \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3t)$ sobre as trajetórias da Hamiltoniana $H_0 = J^3/8$.

(a) Escreva a transformação canônica entre as variáveis (ϕ, J) e (θ, I) para que a nova Hamiltoniana seja escrita no seguinte formato:

$$H(\theta, I) = I^3 - 3I + 4\epsilon I^2 \cos\theta. \tag{2}$$

(b) Considerando a Hamiltoniana (2), calcule $\theta(t)$ e $I(t)$ para o caso em que $\epsilon = 0$. Analogamente ao exercício **5**, considere a trajetória com condições iniciais $\phi(t = 0) = \alpha$ e $J(t = 0) = \beta$. Explicite $\theta(t = 0)$ e $I(t = 0)$ em termos de α e β.

(c) Calcule a frequência ν_0 da trajetória obtida no item anterior.

(d) Para $\epsilon \ll 1$, calcule a solução $I(t)$ perturbada, devida ao termo H_1, levando em conta apenas as correções de primeira ordem em ϵ.

(e) Estime o valor de $I = I_r$ em torno do qual a perturbação, descrita pelo termo dependente em ϵ, deve ser ressonante.

(f) Para quais valores de β são válidos os resultados obtidos no item **d**?

8. Considere a Hamiltoniana que descreve a interação de um elétron relativístico, inserido em um campo magnético homogêneo na direção do eixo z, com uma onda eletrostática:

$$H = \sqrt{1 + p_x^2 + (p_y + x)^2 + p_z^2} + a_0 \cos(kx - \omega t), \tag{3}$$

na qual a_0 é a amplitude da onda eletrostática, k representa o seu número de onda e ω denota sua frequência. Este problema é típico em aceleração de partículas e no aquecimento de plasma. A Hamiltoniana está normalizada por $m_0 c^2$, o momento está normalizado por $m_0 c$, o tempo está normalizado por $1/\omega_{co}$ e o espaço está normalizado por c/ω_{co}. Nas definições anteriores, m_0 é a massa do elétron, c é a velocidade da luz, $\omega_{co} = (eB)/(m_0 c)$ é a frequência de cíclotron, e é a carga do eléctron e $B = 1$ é o módulo do campo magnético.

(a) Inicialmente, obtenha a equação de Lorentz que descreve o movimento de uma partícula relativística carregada em um campo eletromagnético. Com este propósito, utilize a seguinte Hamiltoniana:

$$H = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{m_0^2 c^2}} + e\phi,$$

na qual $\vec{A}$ e ϕ representam, respectivamente, os potenciais eletromagnéticos vetorial e escalar.

(b) Verifique que, de fato, a Hamiltoniana (3) descreve o movimento de uma partícula, inserida em um campo magnético homogêneo na direção do eixo z, sob a ação de uma onda eletrostática. Com este intuito, utilize as relações $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e $\vec{A} = -Bx\hat{y}$, para $B = 1$. Considere nulo o campo magnético da onda.

(c) Quantos graus de liberdade tem o sistema descrito pela Hamiltoniana (3)?

(d) Que componentes do momento linear são constantes de movimento? A Hamiltoniana (3) é uma constante de movimento?

(e) A Hamiltoniana (3) não é integrável. Justifique esta afirmação.

9. Considere como H_0 a Hamiltoniana (3) para $a_0 = 0$. Além disto, considere também que $a_0 \ll 1$. Deste modo, a Hamiltoniana (3) é do tipo $H = H_0 + H_1$, com $|H_1/H_0| \ll 1$.

(a) Mostre que H_0 é uma Hamiltoniana integrável. Especifique o número de graus de liberdade e as constantes de movimento do sistema que ela descreve.

(b) A Hamiltoniana H, definida pela equação (3), é quase integrável. Justifique esta afirmação.

10. Considere novamente a Hamiltoniana (3).

(a) Escreva a Hamiltoniana em termos de variáveis de ângulo e ação. Neste caso, utilize a transformação canônica

$$p_x = \sqrt{2I}\cos\psi \quad \text{e} \quad p_y + x = \sqrt{2I}\sin\psi$$

de forma a obter a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + a_0 \sum_l \vartheta_l(k\sqrt{2I})\cos(l\psi - \omega t). \tag{4}$$

Na construção do resultado anterior, considere $p_y = 0$ e utilize a seguinte relação matemática:

$$\cos(\rho \sin\alpha + \beta) = \sum_l \vartheta_l(\rho)\cos(l\alpha + \beta),$$

na qual ϑ_l é a l-ésima função de Bessel de primeira ordem.

(b) Qual o significado físico de considerarmos $p_y = 0$? Isto é uma restrição física real?

(c) Quantos graus de liberdade tem o sistema descrito pela Hamiltoniana (4)?

(d) A Hamiltoniana (4) não é integrável. Justifique esta afirmação.

11. Considere a Hamiltoniana (4). Nesta questão, analisaremos as ressonâncias do sistema determinadas pela relação $n\omega_0 = m\omega$, na qual $\omega_0 = dH_0/dI$ representa a frequência natural e ω simboliza a frequência da onda eletrostática.

(a) Mostre que $\omega_0 = \left(1 + 2I + p_z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) Mostre que, na região de ressonância correspondente aos números inteiros n e m, a ação assume o valor $I_{nm} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m\omega}\right)^2 - 1 - p_z^2\right]$. No caso de ressonâncias puras ($m = 1$), definimos $I_n = I_{n1} = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{\omega^2} - 1 - p_z^2\right)$.

(c) Mostre que $\delta I = (2n+1)/(2\omega^2)$, onde $\delta I = I_{n+1} - I_n$, é o espaçamento entre as ressonâncias $(n+1, 1)$ e $(n, 1)$.

(d) Considere a ressonância primária pura $n = l$ a partir da seguinte Hamiltoniana local:

$$H_{loc} = \sqrt{1 + 2I + p_z^2} + a_0 \vartheta_n(k\sqrt{2I}) \cos(n\psi - \omega t).$$

Faça uma transformação canônica entre as variáveis (ψ, I) e (ϕ, J) que elimine a dependência explícita no tempo t. Desta forma, obtenha a seguinte Hamiltoniana:

$$H_{loc} = \sqrt{1 + 2J + p_z^2} - \frac{\omega}{n} J + a_0 \vartheta_n(k\sqrt{2J}) \cos(n\phi). \tag{5}$$

(e) A Hamiltoniana (5) é integrável? Compare as respostas desta questão com os itens **8.e** e **10.d** dos exercícios anteriores.

12. Mostre que a amplitude máxima de excursão ΔJ para uma ilha da Hamiltoniana local (5) é dada por

$$\Delta J = 2\sqrt{FG}, \quad \text{com} \quad F = a_0 \vartheta_n(k\sqrt{2J_n}) \quad \text{e} \quad G = (1 + 2J_n + p_z^2)^{\frac{3}{2}},$$

onde $J_n = I_n$, para I_n definido na questão **11.b**.

13. Com as expressões obtidas para $\delta I = \delta J$ (questão **11**) e ΔJ (questão **12**), analise a transição para o caos no sistema através do critério de Chirikov, $s = 2\Delta J/\delta J > 1$. Com este objetivo, considere a interação entre duas ressonâncias primárias ($m = 1$) com $n = l + 1$ e $n = l$.

(a) Faça uma figura esquematizada elucidando o significado topológico do critério de Chirikov.

(b) Discuta os papéis de a_0, ω e k na transição para o caos.