



PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prof. Iberê L. Caldas

Terceira Lista de Exercícios

2º semestre de 2025

1. Considere a Hamiltoniana

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1)$$

na qual θ e I representam as variáveis canônicas, ao passo que K e T constituem os parâmetros do sistema.

(a) Utilize a relação

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{2}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \frac{1}{T}$$

para obter a Hamiltoniana

$$H = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi mt) \right],$$

na qual consideramos $T = 1$.

(b) Considerando a Hamiltoniana obtida no item anterior, calcule a largura das ilhas para as ressonâncias correspondentes a $m = 0$ e $m = 1$.

(c) Calcule a distância entre as ilhas do item anterior no espaço $I \times \theta$.

2. O mapa padrão

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n, \quad (2a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad (2b)$$

constitui uma seção de Poincaré para o sistema dinâmico descrito pela Hamiltoniana (1) para $T = 1$.

Sob as transformações $I_n = 2\pi p_n$ e $\theta_n = 2\pi x_n$, o mapa padrão (2) adquire o seguinte formato:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n), \quad (3a)$$

$$x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \quad (3b)$$

no qual x_n representa uma variável periódica no intervalo $[0, 1)$.

(a) Para $K = 0$, obtenha p_{100} e x_{100} a partir de p_0 e x_0 .

(b) Também para $K = 0$, mostre que $p_0 = k/m$ para as órbitas periódicas, onde k e m são números inteiros. Quais os valores de p_0 para as órbitas quase-periódicas?

(c) Para um determinado valor de K , mostre que o mapa padrão, representado pelo operador T_K , pode ser escrito como o produto de dois novos mapas, representados pelos operadores I_1 e I_2 , ou seja,

$$T_K \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (4a)$$

$$I_1 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) \\ -x \end{pmatrix}, \quad (4b)$$

$$I_2 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p - x \end{pmatrix}, \quad (4c)$$

$$T_K = I_2 I_1. \quad (4d)$$

(d) Mostre que

$$I_1^2 = I_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad \det I_1 = \det I_2 = -1.$$

- (e) Mostre que os pontos fixos do mapa I_1 ocorrem para $x = 0$ e $x = 1/2$. Lembre-se que x representa uma variável periódica, de maneira que podemos nos restringir ao intervalo $[0, 1)$.
- (f) Mostre que os pontos fixos do mapa I_2 ocorrem para $x = p/2 + k_1$ e $x = (p+1)/2 + k_2$, onde k_1 e k_2 representam números inteiros tais que $x \in [0, 1)$.
- (g) A partir dos resultados dos itens (e) e (f), mostre que $(x = 0, p = n)$ e $(x = 1/2, p = n)$, para n inteiro, são os pontos fixos do mapa padrão.
- (h) Considerando *diretamente* as equações (3) para valores arbitrários do parâmetro K , encontre novamente os pontos fixos do mapa padrão. Ou seja, sem o auxílio da decomposição (4d), obtenha o resultado do item (g).

3. Considere novamente o mapa padrão no formato descrito pelas equações (3).

(a) Mostre que o mapa padrão é simplético.

(b) Obtenha o mapa padrão linearizado F_K . Ou seja, obtenha o mapa tal que

$$\begin{pmatrix} \delta p_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \delta p_n \\ \delta x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_e + \delta p_n \\ x_e + \delta x_n \end{pmatrix},$$

onde (x_e, p_e) representa um ponto de equilíbrio.

(c) Calcule os autovalores da matriz F_K nos pontos fixos $A = (x = 0, p = 1)$ e $B = (1/2, 1)$.

(d) Verifique se os pontos fixos A e B são elípticos ou hiperbólicos. No caso de um ponto de equilíbrio elíptico, os autovalores de F_K possuem valores complexos e satisfazem a relação $\lambda_1 = \lambda_2^*$. Em um ponto fixo hiperbólico, os autovalores de F_K são reais e estão sujeitos à identidade $\lambda_1 = 1/\lambda_2$.

4. Considere as equações de movimento correspondentes à dinâmica Hamiltoniana de um sistema periodicamente impulsionado:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\alpha \sin q \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - j), \end{aligned}$$

no qual q e p são, respectivamente, a posição e o momento canônicos do sistema, enquanto α representa um parâmetro real positivo.

(a) Considere a notação definida pelas equações

$$\begin{aligned} q_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(j + \varepsilon), \\ p_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(j + \varepsilon), \\ q'_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(j - \varepsilon), \\ p'_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p(j - \varepsilon), \end{aligned}$$

que representam os valores das coordenadas canônicas em instantes de tempo imediatamente posteriores e anteriores ao j -ésimo impulso sobre o sistema. Utilizando a notação definida acima, integre as equações de movimento nos intervalos de tempo entre dois impulsos consecutivos. Deste modo, mostre que

$$\begin{aligned} q'_{j+1} &= q_j + p_j, \\ p'_{j+1} &= p_j. \end{aligned}$$

(b) Integrando as equações de movimento sobre um único impulso, mostre que

$$\begin{aligned} q_j &= q'_j, \\ p_j &= p'_j - \alpha \sin q_j. \end{aligned}$$

- (c) Empregue os resultados dos itens (a) e (b) para mostrar que o movimento do sistema periodicamente impulsionado é descrito pelo mapa padrão:

$$\begin{aligned}q_{j+1} &= q_j + p_j, \\p_{j+1} &= p_j - \alpha \sin(q_j + p_j).\end{aligned}$$

5. Considere o mapa padrão não twist no seguinte formato:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n - b \sin(2\pi x_n), \\x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2).\end{aligned}$$

- (a) Verifique que os pontos A e B , para $A = (x = 0, y = 1)$ e $B = (1/2, 1)$, são pontos fixos do mapa padrão não twist.
- (b) Obtenha a linearização do mapa padrão não twist em torno dos pontos fixos, ou seja, obtenha a matriz Jacobiana J tal que

$$\begin{pmatrix} \delta y_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta y_n \\ \delta x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta y_n \\ \delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n - y^* \\ x_n - x^* \end{pmatrix},$$

onde x^* e y^* indicam as coordenadas de um ponto fixo.

- (c) Para quais valores dos parâmetros a e b ocorre uma bifurcação no ponto fixo B ?