

Seminário - Caos em sistemas dissipativos

Instituto de Física da USP

Propriedades dinâmicas do mapa padrão relativístico dissipativo

Matheus Hansen Francisco

mathehansen@gmail.com

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

23 de abril de 2018.

Sumário

- I. Objetivos
- II. Espaço de fases e bacias de atração
- III. Espaço de parâmetros
- IV. Conclusões
- V. Referências

I. Objetivos

Objetivos

- Estudar as propriedades da crise de fronteira em um mapeamento não linear, descrito por três parâmetros de controle.
- Estudar e caracterizar estruturas complexas no espaço de parâmetros do mapeamento.

II. Espaço de fases e bacias de atração

Mapeamento

- O sistema em estudo consiste de uma partícula clássica eletricamente carregada se movendo em um potencial $\phi(x, t)$, com o Hamiltoniano dado por

$$H(x, p, t) = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} - e\phi(x, t), \quad (1)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, c é a velocidade da luz, p é o momentum da partícula, e é a carga elementar e ϕ é o potencial.

- Escrevendo as equações do movimento da dinâmica e transformando essas equações em um mapeamento discreto [1], temos

$$A : \begin{cases} I_{n+1} &= (1 - \delta)I_n + K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \left[\theta_n + \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}} \right] \mod(2\pi) \end{cases}, \quad (2)$$

onde K é o parâmetro que controla a integrabilidade do sistema, β é o parâmetro de aproximação relativística e δ é a dissipação no sistema.

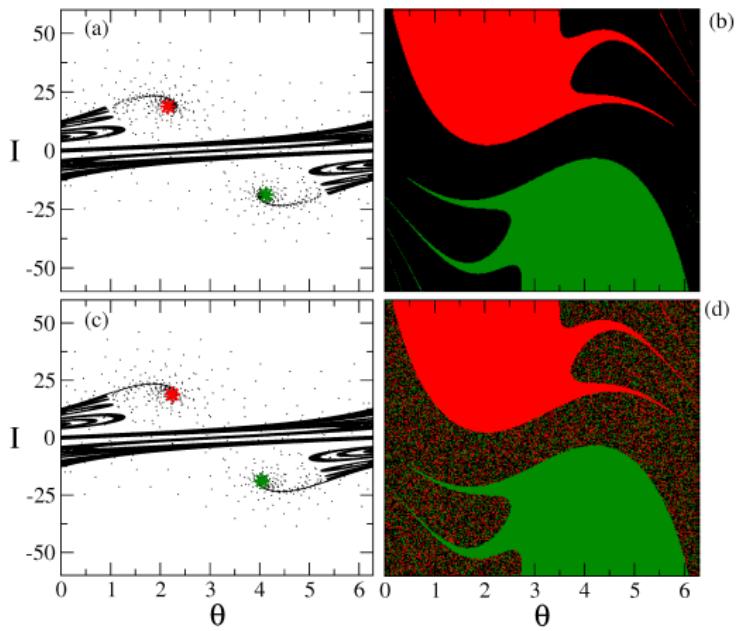


Figura 1: Espaço de fases para os parâmetros $k = 0, 9$, $\beta = 0, 15$ e (a,c) $\delta = 0.3765$ e $\delta = 0, 3755$ respectivamente; Bacias de atração para os parâmetros $k = 0, 9$, $\beta = 0, 15$ e (b,d) $\delta = 0.3765$ e $\delta = 0, 3755$

Crise de fronteira

- A crise de fronteira [3] ocorre quando a variedade estável e a variedade instável de um mesmo ponto fixo se tocaram.
- A crise de fronteira ocasiona a destruição da bacia de atração do atrator caótico. Como consequência, condições iniciais que anteriormente ficavam aprisionadas no interior do atrator agora deixam essa região após um determinado número de colisões em direção ao *sink*.
- O sink é um ponto fixo atrativo com autovalores da forma $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$.

Ponto fixo

- Para a evidenciar o fenômeno da crise de fronteira, vamos construir as variedades estáveis e instáveis do ponto fixo de sela.
- A condição para se obter ponto fixo é dado por

$$I_{n+1} = I_n = I, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2m\pi = \theta, \quad (3)$$

logo,

$$I = \frac{2m\pi}{\sqrt{1-(2m\beta)^2}}, \quad \theta = \arcsin\left(\frac{I\delta}{K}\right). \quad (4)$$

- Para ponto fixo de sela temos $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| < 1$.

Variedades estáveis e instáveis

- A variedade estável (instável) é formada por um conjunto de pontos que se aproximam (afastam) iterativamente do ponto fixo de sela.
- Para a construção da variedade instável, aplicamos A sobre condições iniciais tomadas ao longo dos autovetores associados aos autovalores do ponto de sela.
- Para a construção da variedade estável, aplicamos A^{-1} sobre condições iniciais tomadas ao longo dos autovetores associados aos autovalores do ponto de sela, tal que

$$A^{-1} : \begin{cases} I_n &= \frac{I_{n+1} - K \sin \theta_n}{(1-\delta)} \\ \theta_n &= \theta_{n+1} - \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1+(\beta I_{n+1})}} \end{cases} . \quad (5)$$

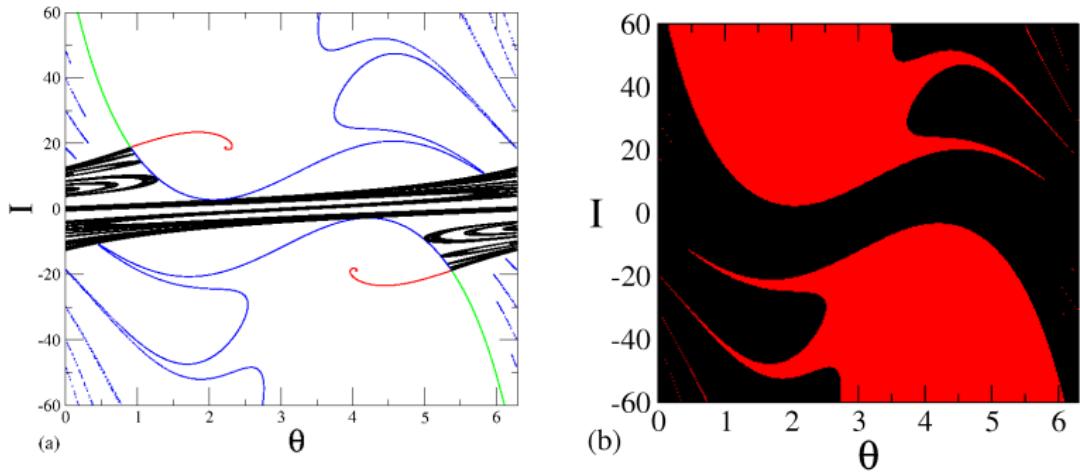


Figura 2: (a) Variedade estável (instável) imediatamente antes da crise de fronteira; (b) Bacias de atração. Parâmetros utilizados $k = 0, 9$, $\beta = 0, 15$ e $\delta = 0,3765$.

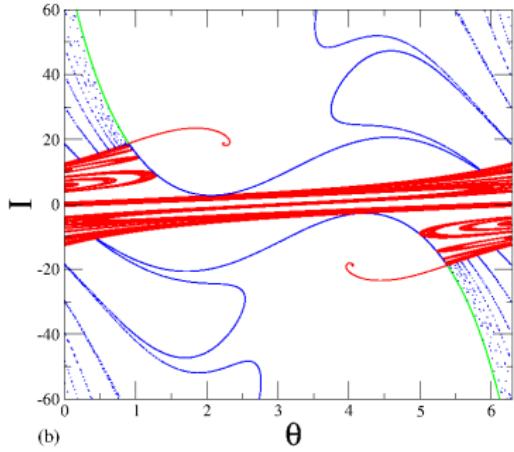
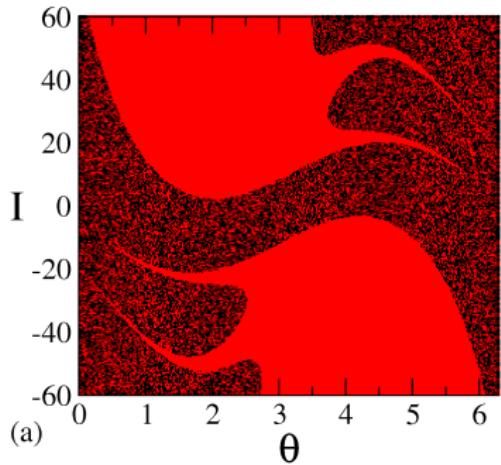


Figura 3: (a) Variedade estável (instável) imediatamente após a crise de fronteira; (b) Bacias de atração. Parâmetros utilizados $k = 0, 9$, $\beta = 0, 15$ e $\delta = 0.3755$.

Transiente caótico

- Após a crise de fronteira, a bacia de atração do atrator caótico é destruída, sendo substituída por uma nova quantidade, denominada transiente caótico.
- O transiente caótico é descrito por

$$n_t = \mu_j^{\rho_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

onde $\mu_1 = |\delta - \delta_c|$, $\mu_2 = |\beta - \beta_c|$ e $\mu_3 = |K - K_c|$.

- Numericamente fazemos

$$\bar{n}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_t^i. \quad (7)$$

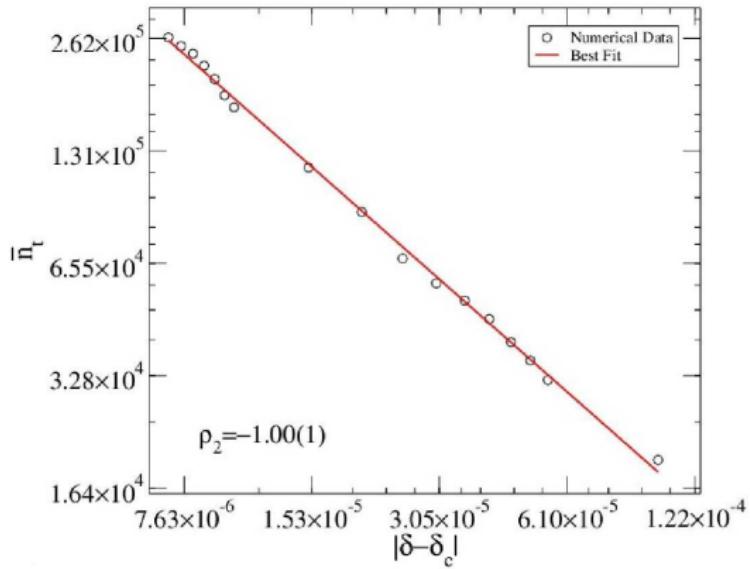


Figura 4: Transiente caótico para os parâmetros $k = 0, 9$, $\beta = 0, 15$ e $\delta_c = 0, 375598132$.

III. Espaço de parâmetros

Expoentes de Lyapunov

- Os expoentes de Lyapunov [2] são utilizados como indicadores de caos.
- O objetivo dos expoentes de Lyapunov é medir o afastamento médio entre duas órbitas próximas.
- Em um mapeamento bidimensional os expoentes de Lyapunov são definidos como

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda|_j, \quad j = 1, 2 \quad (8)$$

Espaço de parâmetros

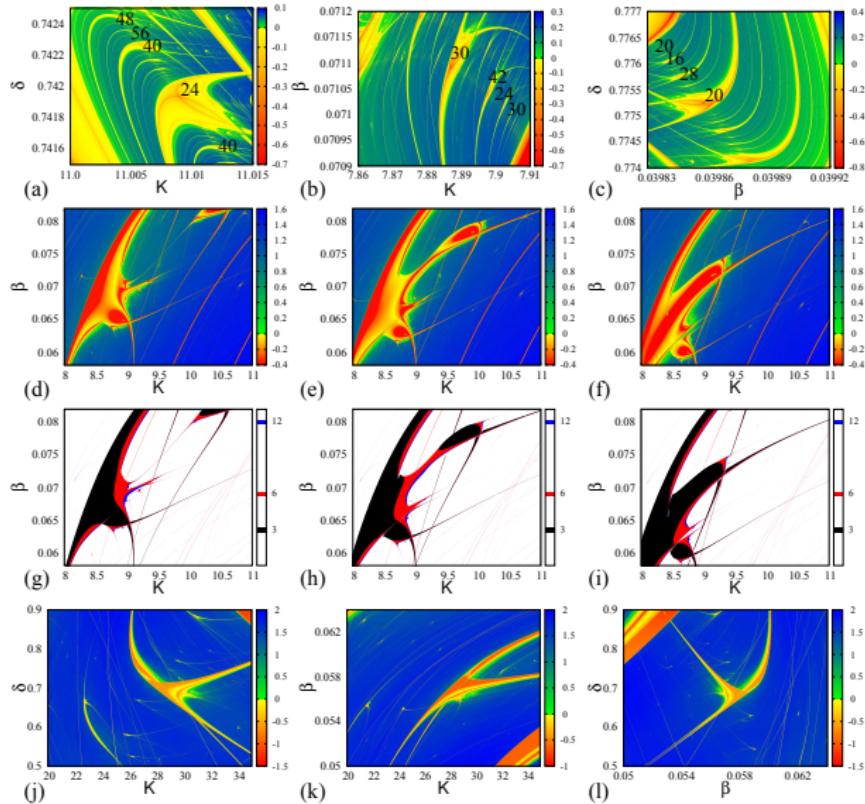


Figura 5: Espaço de parâmetros.

IV. Conclusões

Conclusões

- Caracterizamos o evento de crise de fronteira e mostramos que após a crise o atrator caótico é substituído por um transiente caótico descrito por uma lei de potência com expoente de -1.
- Mostramos que no espaço de parâmetros são encontradas estruturas periódicas do tipo shrimp [5].

V. Referências

- [1] C. Ciubotariu, L. Badelita, V. Stancu, Chaos, Solitons Fractals **13**, 12253 (2002).
- [2] J. P. Eckmann, D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).
- [3] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **48**, 1507 (1982).
- [4] J. A. Gallas, Phys. Rev. Lett. **70**, 2714 (1993).
- [5] M. Hansen, D. R. da Costa, D. F. M. Oliveira and E. D. Leonel, Appl. Math. Comput. **238**, 387 (2014).