Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Propriedades Estatísticas e Termodinâmicas de Bilhares Clássicos

Matheus Hansen Francisco

Orientador: Edson Denis Leonel
Co-orientador: Iberê Luiz Caldas

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel - Orientador (UNESP - Rio Claro/SP)
Prof. Dr. Mário José de Oliveira (IFUSP - São Paulo/SP)
Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (UNESP - Rio Claro/SP)
Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza (UFSJ - Divinópolis/MG)
Prof. Dr. Paulo Cesar Rech (UDESC - Joinville/SC)

São Paulo - SP
2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Francisco, Matheus Hansen

Propriedades estatísticas e termodinâmicas de bilhares clássicos. São Paulo, 2019.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Co-orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas
Área de Concentração: Física.

Unitermos: 1. Bilhares; 2. Sistemas dinâmicos; 3. Caos (Sistemas dinâmicos); 4. Mecânica estatística; 5. Teoria cinética.

USP/IF/SBI-062/2019

University of São Paulo
Physics Institute

Statistical and Thermodynamical properties of Classical Billiards

Matheus Hansen Francisco

Supervisor: Prof. Dr. Edson Denis Leonel
Co-supervisor: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Thesis submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel - Orientador (UNESP - Rio Claro/SP)
Prof. Dr. Mário José de Oliveira (IFUSP - São Paulo/SP)
Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (UNESP - Rio Claro/SP)
Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza (UFSJ - Divinópolis/MG)
Prof. Dr. Paulo Cesar Rech (UDESC - Joinville/SC)

São Paulo - SP
2019

Dedico esta tese de doutoramento aos meus pais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar aos meus pais Roberto e Silvana, por terem sempre apoiado meu sonho, minhas escolhas e decisões. Sem vocês nada disso seria possível.

Ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel, pela oportunidade oferecida assim como a confiança em meu trabalho, pelas valiosas discussões, ensinamentos e por ser um exemplo de pesquisador e professor a ser seguido.

Ao meu amigo e co-orientador Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, por me receber muito bem em seu grupo de pesquisa ao longo do meu doutoramento, pelas valiosas discussões, ensinamentos e por também ser um exemplo de pesquisador e professor a ser seguido.

Aos meus familiares pelo apoio recebido.

A minha namorada e companheira Geiziane, por estar comigo ao longo de toda essa jornada sempre apoiando e incentivando a minha carreira científica.

Aos amigos do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear do Departamento de Física da UNESP - Rio Claro, liderados pelo Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista - UNESP e ao cluster computacional do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear.

Aos amigos do grupo Controle de Oscilações do Instituto de Física da USP - São Paulo, liderados pelo Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.

Aos amigos em geral, que de alguma forma colaboraram na elaboração desta tese e por terem tornado esse caminho mais divertido.

A Pós-graduação do Instituto de Física da USP - São Paulo, pela oportunidade de desenvolver meu trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

E principalmente a Deus por tudo.

A todos, muito obrigado!!!

"Pressure, pushing down on me

Pressing down on you

No man ask for

Under pressure..."

Queen & David Bowie

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados para um sistema dinâmico denominado como bilhar, que descreve a dinâmica de uma partícula de massa m, livre da influência de qualquer potencial externo, no interior de uma região delimitada por uma fronteira que pode ser estática ou móvel. A partícula é lançada de uma determinada posição no interior do bilhar, de modo a sofrer colisões elásticas ou inelásticas com a fronteira do modelo. Após a ocorrência de uma colisão, a partícula sofre uma reflexão especular com a fronteira, de modo que seu ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Para o caso em que as colisões são elásticas e a fronteira estática, o módulo da velocidade da partícula permanece constante ao longo de todas as colisões, entretanto, se uma perturbação temporal for introduzida na fronteira do sistema, é permitida a variação no módulo da velocidade da partícula durante o impacto. Nesta tese, vamos estudar a dinâmica de um ensemble de partículas não-interagentes em um bilhar ovóide sob duas configurações diferentes. Inicialmente, a fronteira será assumida como estática e a partir de um mapeamento bidimensional que descreve a dinâmica do sistema, demonstramos que para esse tipo de bilhar o espaço de fases é do tipo misto, onde pode ser observado a coexistência de um mar de caos, ilhas de estabilidade e um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*. Ainda para esse caso, introduzimos orifícios ao longo da fronteira do bilhar para estudar o comportamento do escape das partículas, via análise da probabilidade de sobrevivência $P(n)$ que um conjunto de partículas no interior do sistema exibe, conforme o número de colisões n é aumentado. Através de simulações numéricas, verificamos que $P(n)$ decai em média de forma exponencial com um expoente de decaimento δ dado aproximadamente pela razão entre a extensão do orifício h e o comprimento total da fronteira do bilhar. Ao longo deste estudo, observamos que devido a natureza mista do espaço de fases, existem regiões preferenciais para a visitação de partículas, o que pode fornecer pistas para a verificação da maximização ou minimização do escape no sistema. Posterior a isso, introduzimos uma perturbação temporal na fronteira do bilhar ovóide, e descrevemos todas as equações necessárias para a obtenção do mapeamento quadrimensional não-linear, que reproduzirá o movimento de uma partícula no interior do modelo com fronteiras oscilantes. O objetivo dessa análise, é a verificação da difusão ilimitada de energia por parte das partículas, conhecido como Aceleração de Fermi. Além de discutir todo o mecanismo envolvido nesse fenômeno, também analisamos formas possíveis para provocar a supressão desse crescimento ilimitado de energia exibido pelas partículas. Por último, propomos uma conexão entre os resultados referentes ao bilhar ovóide dependente do tempo com conceitos ligados à Termodinâmica.

Palavras Chaves: Bilhares Clássicos, Sistemas Dinâmicos, Caos, Termodinâmica.

Abstract

In this work, we present some results for a dynamical system denoted as a billiard that describes the dynamics of a free particle of mass m inside of a region delimited by a boundary that might be static or time-dependent. The particle is launched from a region inside of the billiard and can experiences either elastic or inelastic collisions with the boundary. After a collision, the particle exhibits a specular reflection with the border, in such way that the incidence angle is equal to the reflected angle. When elastic collisions are taken into account the speed of the particle remains constant along all collisions. When a time-dependence is introduced on the boundary, then the particle may gain or lose energy upon collision. In this thesis, we will study the dynamics of an ensemble of non-interacting particles inside an oval billiard, under two different configurations. Initially, the boundary is considered as static and via a two-dimensional and nonlinear mapping, the dynamics of each particle is investigated. We show that for the static case the phase space is of mixing type with the coexistence of a chaotic sea, stability islands and a set of invariant *spanning* curves over the phase space. We then introduce holes along the boundary of the billiard allowing the particles to escape through them. We analyze the survivor probability $P(n)$ that an ensemble of particles exhibits inside of the billiard as a function of n. Our results show that $P(n)$ decays in average exponentially with a decay exponent δ given approximately by the size of the hole h over the total length of the boundary. Along this study, we observed that, due to the mixing structure of the phase space, there are preferential regions for the visitation of particles, which might be useful for the verification of the maximization or minimizations of the escape in the system. After that, we introduced a time-dependence on the boundary of the oval billiard and describe all the equations to obtained the nonlinear four-dimensional mapping used to reproduce the movement of particle inside of the billiard. The main goal of this analysis is the verification of the unlimited diffusion of energy from the particles, known as Fermi Acceleration. We discuss all the mechanism involved in such a phenomenon and discuss possibilities to promote the suppression of the unlimited energy growth in the billiard. Finally, we discuss a possible connection of the time-dependent oval billiard with concepts linked with Thermodynamics.

Keywords: Classical Billiards, Dynamical Systems, Chaos, Thermodynamics.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Na física, muitas vezes desejamos descrever a evolução do comportamento de fenômenos observados a partir de experimentos numéricos e teóricos. Para isso é necessário a definição de um conjunto de regras matemáticas, tal como funções, equações diferenciais, entre outras, que nos ajude a compreender, reproduzir e prever os resultados a serem observados. Na literatura científica, esses fenômenos em evolução são chamados de sistemas dinâmicos e em muitos casos, sua completa descrição pode ser feita através do estudo de mapeamentos N-dimensionais genéricos [1]. Um mapeamento, por sua vez, consiste essencialmente em analisar a dinâmica de uma partícula, a partir da evolução de seus estados numa sequência discreta de tempos $\{t_0, t_1, t_2...t_n\}$. Sendo assim, nesta tese vamos estudar um dos diversos tipos de sistemas dinâmicos que podem ser completamente descritos por um mapeamento genérico, um bilhar clássico.

Os bilhares [2, 3] são sistemas físicos que descrevem o movimento de uma partícula (ou um conjunto não-interagente delas) no interior de uma região delimitada por uma fronteira tipicamente rígida, que pode ser fixa ou móvel de acordo com o sistema estudado. A partícula geralmente é lançada no interior do bilhar a partir de uma determinada posição ao longo da fronteira e com um módulo de velocidade definido. Na ausência de potenciais externos atuando no sistema, a partícula acaba por descrever trajetórias retilíneas entre as colisões sucessivas com a parede do modelo [2]. As colisões sofridas pelas partículas podem ser classificadas como elásticas ou inelásticas, onde em uma colisão elástica, observa-se tanto a conservação do *momentum* quanto da energia cinética da partícula. Entretanto, no caso de colisão inelástica a partícula experimenta uma perda fracional de energia, porém, ainda conservando o seu *momentum*. Após a ocorrência de uma colisão, a partícula exibe reflexão especular com a fronteira, ou seja, o ângulo de incidência no instante do impacto é igual ao ângulo de reflexão em relação à superfície normal da parede, dando assim origem a uma nova direção por onde a partícula deve prosseguir. É importante ressaltar que o módulo da velocidade da partícula, após a colisão, se mantém constante caso a fronteira seja estática [4-12]. Entretanto, se a fronteira for perturbada com uma dependência temporal [13-22], é permitida a troca de energia no sistema, o que pode levar a partícula a experimentar um aumento ou uma diminuição no módulo de sua velocidade.

O estudo sobre os bilhares teve seu início no ano de 1927, quando Birkhoff [2] considerou a investigação do movimento de uma partícula puntual livre (representando uma típica bola de bilhar) em variedades confinadas. Contudo, os bilhares são constantemente ligados aos trabalhos de Sinai [4] e Bunimovich [5] que discutiram de forma rigorosa as características desses sistemas, além de atualmente esses modelos serem frequentemente utilizados na descrição de problemas relacionados a mecânica estatística [23], experimentos de super condutividades [24], confinamento de elétrons em semicondutores por potenciais elétricos [25, 26], física de plasmas [27, 28] e muitos outros.

O espaço de fases de um sistema dinâmico consiste do conjunto de todos os estados acessíveis ao sistema, de modo que a evolução de um determinado estado inicial, passa por pontos ao longo do espaço de fases. A sequência cronológica de estados percorridos ao longo do espaço de fases é definida como sendo uma órbita, de modo que podemos dizer então que espaço de fases é descrito como sendo o conjunto de todas as órbitas acessíveis ao sistema. No caso dos bilhares, o tipo do espaço de fases apresentado pela dinâmica está totalmente ligado à forma geométrica assumida pela fronteira do modelo. Basicamente, os bilhares assim como os demais sistemas dinâmicos podem ser classificados em três diferentes grupos: (i) integráveis, (ii) ergódicos e (iii) mistos. No caso (i) o espaço de fases da dinâmica é composto por um conjunto de ilhas de estabilidade e de curvas invariantes do tipo *spanning*, como pode ser observado por exemplo, para o bilhar circular com fronteira estática [29, 30]. Para esse bilhar em específico, a integrabilidade se deve à conservação do momento angular e da energia das partículas em seu interior. No caso (ii), a evolução temporal de um estado inicial é suficiente para o preenchimento de todo o espaço de fases acessível ao sistema. Esse tipo de estrutura pode ser verificado no bilhar estádio de Bunimovich [5] e também no gás de Lorentz [31]. Por último, o caso (iii) corresponde a maioria dos sistemas dinâmicos [32-35], onde é possível verificar a coexistência de um mar de caos, cadeia de ilhas de estabilidade e um conjunto curvas invariantes do tipo *spanning* ao longo do espaço de fase.

Com base nessas informações gerais, nesta tese, vamos estudar o modelo do bilhar ovóide clássico, cuja estrutura do seu espaço de fases é do tipo mista, em duas versões totalmente distintas. Inicialmente, vamos propor que a fronteira do bilhar seja estática e que as colisões da partícula com a parede sejam totalmente elásticas. Nosso foco nesse primeiro momento será analisar o comportamento do escape de partículas no bilhar, quando um ou mais orifícios são introduzidos ao longo de sua fronteira. Através de simulações numéricas, observamos que a probabilidade de sobrevivência $P(n)$ (probabilidade de permanecer no interior do bilhar) para um conjunto de partículas não-interagentes, decai ao longo das colisões em média de forma exponencial. Contudo, devido a característica mista do espaço de fases do bilhar ovóide, observamos que existem regiões no bilhar que exibem uma maior frequência de visitação por parte das partículas [35]. Esse resultado acaba sendo interessante, pois surge como uma alternativa para uma possível solução de um problema em aberto na literatura, envolvendo a especificação de onde introduzir ou posicionar um orifício na fronteira, afim de otimizar o escape de partículas

[36].

Para a segunda parte desta tese, vamos dar continuidade ao estudo do bilhar ovóide clássico, agora introduzindo uma perturbação temporal na fronteira do modelo. Isso será feito para que a cada colisão com a parede móvel, a partícula possa ganhar ou perder frações de energia. Essa análise se torna interessante, pois considerando que as colisões são do tipo elásticas e que a estrutura do espaço de fases do bilhar ovóide é mista em sua versão estática, então podemos observar um crescimento ilimitado da energia média para ensemble de partículas não-interagentes nessa versão temporal do bilhar [14, 15]. Esse fenômeno da difusão ilimitada é conhecido na literatura como Aceleração de Fermi (AF) [37]. Nosso foco nesse momento se dará na descrição do mecanismo envolvido na observação do fenômeno da AF, além também de discutir as possíveis alternativas para suprimir esse efeito na dinâmica do bilhar ovóide. Por último, vamos propor uma possível conexão entre os resultados obtidos para o bilhar ovóide dependente do tempo, com conceitos ligados a temperatura na Termodinâmica [38].

A organização desta tese será feita na seguinte forma: no Capítulo 2 vamos discutir todas as equações necessárias para obter o mapeamento bidimensional não-linear, que descreverá a evolução de uma partícula no interior do bilhar com a fronteira estática. Neste capítulo, também vamos explorar as características referentes a estrutura do espaço de fases misto exibido pela dinâmica, assim também como a caracterização via expoentes de Lyapunov, de algumas trajetórias caóticas que partículas com condições iniciais dadas em meio ao espaço de fases podem ter. Posterior a isso, serão introduzidos orifícios ao longo da fronteira do bilhar e se dará o início do estudo do escape das partículas através dos mesmos, onde nosso maior objetivo será encontrar as condições necessárias para a observação da maximização ou a minimização do escape de partículas no bilhar. No capítulo 3, mudaremos o foco da tese para a adaptação do modelo do bilhar ovóide para o caso em que sua fronteira oscila no tempo. Novamente descreveremos todas as equações necessárias para a obtenção do mapeamento quadrimensional não-linear, responsável pela descrição do movimento de uma partícula no interior do sistema. Após essa etapa, estudaremos a evolução do comportamento da média do módulo de velocidade para um ensemble de partículas não-interagentes confinadas ao interior do bilhar. O objetivo central para esse capítulo será a verificação do fenômeno da Aceleração de Fermi no sistema, assim como os meios para suprimi-la. Por fim, vamos propor uma conexão entre os dados encontrados referentes ao modelo dependente do tempo, com conceitos relacionados a temperatura. O capítulo 4 será reservado para as considerações finais sobre esta tese, assim como possíveis perspectivas para o futuro.

Capítulo 2

Bilhar ovóide com fronteira estática

2.1 Resumo

Neste capítulo serão estudadas algumas das propriedades envolvidas no modelo do bilhar ovóide com fronteira estática. Inicialmente, demonstramos todas as etapas envolvidas na construção de um mapeamento bidimensionais não-linear, que será utilizado na descrição da evolução de uma partícula no interior do sistema. Através desse mapeamento, é possível verificar que a estrutura do espaço de fases exibido pela dinâmica é do tipo mista, o que em outras palavras, indica que para condições iniciais apropriadas, uma partícula pode exibir trajetórias caóticas ou periódicas no bilhar. Com base nesses dados, estudamos o comportamento da probabilidade de sobrevivência para um conjunto de partículas não-interagentes no sistema, quando um ou mais orifícios são introduzidos em diferentes posições ao longo da fronteira. Por último, levando em consideração a natureza mista exibida pelo espaço de fases da dinâmica, verificamos a existência de regiões preferenciais para a visitação de partículas no interior do bilhar, o que de forma indireta pode revelar pistas sobre onde posicionar um orifício na fronteira, de modo a produzir uma maximização ou minimização na taxa de escape das partículas.

2.2 Modelo e mapeamento

Iniciamos essa seção discutindo os passos necessários para a descrição de um sistema dinâmico muito popular na literatura conhecido como bilhar clássico. Esse tipo de sistema é geralmente composto por uma partícula clássica livre de massa m, que por diversas vezes colide de maneira especular com uma fronteira rígida e estática, de modo que após uma colisão, a partícula tem sua velocidade alterada em sentido e direção mas não em módulo.

Uma característica importante para iniciar a montagem do problema é a definição da forma geométrica que delimita a região de movimento da partícula, ou seja, a forma da fronteira. Para os problemas que serão estudados nesta primeira parte da tese, vamos utilizar o modelo conhecido como bilhar ovóide, o qual essencialmente consiste em uma fronteira circular deformada.

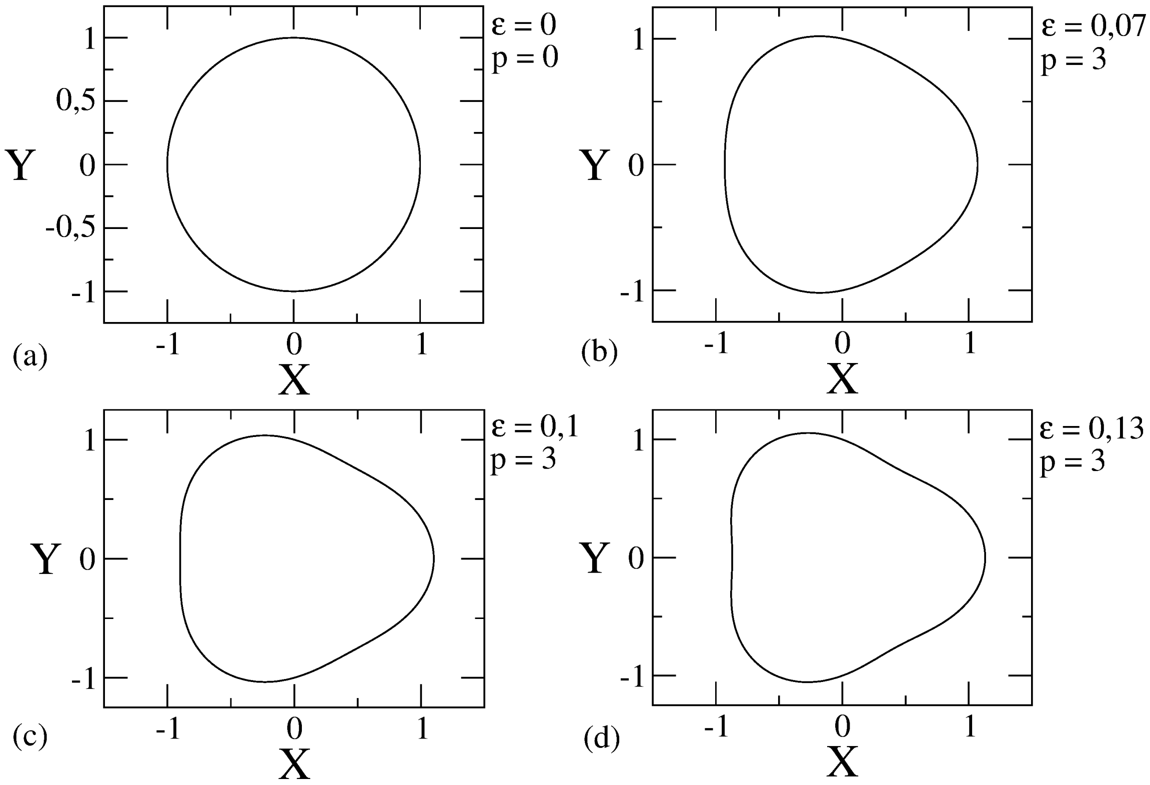

Figura 2.1: *Esboço de diferentes geometrias da fronteira, para as combinações de parâmetros: (a)* $\epsilon = 0$ *e* $p = 0$*; (b)* $\epsilon = 0,07$ *e* $p = 3$*; (c)* $\epsilon = 0,1$ *e* $p = 3$*; (d)* $\epsilon = 0,13$ *e* $p = 3$*. O eixo horizontal representa* $X(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\cos(\theta_n)$ *e vertical* $Y(\theta_n) = R(\theta_n, \epsilon, p)\,\mathrm{sen}(\theta_n)$*.*

O raio que descreve esse tipo de bilhar em coordenadas polares pode ser escrito como [39]

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta), \tag{2.1}$$

onde $\epsilon \in [0, 1)$ é o parâmetro que controla a deformação do círculo, p é um número inteiro e maior que zero† e θ a quantidade que representa a coordenada polar no intervalo $[0, 2\pi]$.

A figura 2.1(a,d) exibe algumas possíveis formas de geometria para a fronteira do bilhar ovóide conforme variamos o parâmetro de perturbação do círculo ϵ. Essa figura também indica que para $\epsilon = 0$, o bilhar acaba recuperando sua forma primitiva circular, resultado esse já sugerido e antecipado acima.

Para descrever a dinâmica de uma partícula no interior desse sistema utilizaremos um mapeamento bidimensional não-linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que, $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}) = A(\theta_n, \alpha_n)$. A figura 2.2 exibe um esquema ilustrativo de duas colisões sucessivas de uma partícula com a fronteira do bilhar, onde pode-se verificar que a variável angular θ_n (coordenada polar) identifica a posição da partícula na fronteira na colisão n, enquanto que a variável α_n indica o ângulo feito entre a

†Números não inteiros ocasionam aberturas na fronteira do bilhar, o que acaba por proporcionar o escape das partículas.

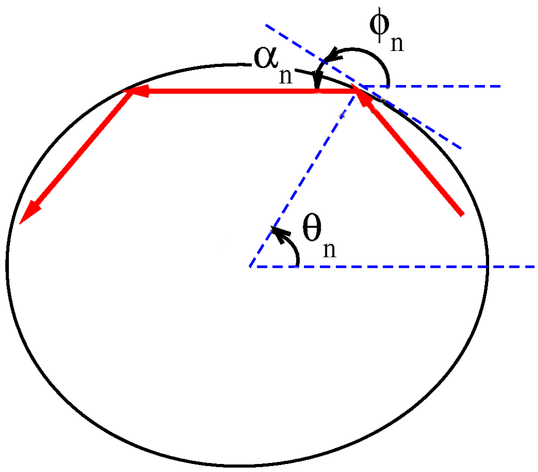

Figura 2.2: *Ilustração da trajetória de uma partícula (vermelho) entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar ovóide.*

trajetória da partícula e uma linha tangente ao ponto de colisão em θ_n.

Com essas informações, podemos escrever as coordenadas retangulares $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ da partícula após a colisão n como sendo

$$\begin{aligned} X(\theta_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p)\cos(\theta_n), \\ X(\theta_n) &= [1 + \epsilon\cos(p\theta_n)]\cos(\theta_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

e

$$\begin{aligned} Y(\theta_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p)\,\mathrm{sen}(\theta_n), \\ Y(\theta_n) &= [1 + \epsilon\cos(p\theta_n)]\,\mathrm{sen}(\theta_n). \end{aligned} \tag{2.4}$$

A figura 2.2 também indica a existência de um ângulo auxiliar ϕ_n que mede a inclinação da linha tangente em relação ao ponto de colisão θ_n na fronteira do bilhar, que pode ser determinado através da relação

$$\phi_n = \mathrm{arctg}\left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)}\right], \tag{2.5}$$

onde $X'(\theta_n)$ e $Y'(\theta_n)$ são as derivadas primeiras das coordenadas retangulares em relação ao ponto de colisão θ_n. Essas derivadas podem ser expressas por

$$X'(\theta_n) = \frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n}\cos(\theta_n) - R(\theta_n)\,\mathrm{sen}(\theta_n), \tag{2.6}$$

$$Y'(\theta_n) = \frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n}\mathrm{sen}(\theta_n) + R(\theta_n)\cos(\theta_n), \tag{2.7}$$

sendo

$$\frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p \operatorname{sen}(p\theta_n). \tag{2.8}$$

Como dito anteriormente, a ausência de potenciais externos agindo sobre a dinâmica da partícula garante que a mesma execute um movimento livre no interior do bilhar, o que consequentemente acarreta em trajetórias retilíneas ao longo das colisões da partícula. Desta forma, podemos descrever a trajetória de uma partícula entre duas colisões sucessivas com o auxílio de uma equação de reta do tipo

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \operatorname{tg}(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \tag{2.9}$$

onde a quantidade $\operatorname{tg}(\alpha_n + \phi_n)$ executa o papel de coeficiente angular dessa reta. Note que a Eq. (2.9) não possui uma solução exata para a variável θ_{n+1} uma vez que essa equação é do tipo transcendental, o que acarreta na necessidade de se utilizar métodos numéricos para sua resolução.

Através de argumentos geométricos, o ângulo α_{n+1} pode ser determinado como

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n), \tag{2.10}$$

o que nos leva a forma final do mapeamento A, descrito como

$$A : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) & = [Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n)] - \operatorname{tg}(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)] \\ \alpha_{n+1} & = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} , \tag{2.11}$$

onde θ_{n+1} é encontrado por meio do método numérico da bisseção [40], fazendo $F(\theta_{n+1}) = 0$ com uma precisão de 10^{-12} para a solução.

Sendo assim, encerramos essa seção onde discutidos e descrevemos as equações que conduzem ao mapeamento para a modelagem do bilhar ovóide com fronteira estática, que será o principal objeto de estudo nesta primeira parte da tese. Na próxima seção vamos abordar alguns aspectos referentes a estrutura do espaço de fases do problema, assim como algumas particularidades envolvidas no mapeamento aqui descrito.

2.3 Espaço de fases

Dado que conhecemos a regra de evolução para o caso ovóide do bilhar indicado pela Eq. (2.11), podemos através da evolução de condições iniciais apropriadas, construir o espaço de fases (θ, α) associado a esse problema. De certa forma, a construção do espaço de fases é algo de grande importância para a compreensão de um sistema dinâmico, pois através dele é possível verificar as características estruturais do problema. Entretanto, alguns aspectos interessantes relacionados ao próprio espaço de fases (θ, α) podem ser verificados de maneira preliminar através do estudo da matriz Jacobiana do sistema.

Para o modelo do bilhar ovóide com fronteira estática desenvolvido nesse capítulo, a matriz Jacobiana J é escrita como[†]

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

onde

$$j_{11} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n}, \qquad j_{12} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n}, \qquad j_{21} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n}, \qquad j_{22} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n}.$$

Uma vez que a matriz Jacobiana J do sistema é montada, a primeira informação que pode ser extraída sobre esse sistema dinâmico vem através do calculo do $det(J)$. Essa medida é muito importante pois no caso do $det(J) = 1$, ela indica a existência da preservação da área no espaço de fases do bilhar. Entretanto, quando $det(J) < 1$, observa-se a contração da área do espaço de fases do sistema, algo típico de dinâmicas dissipativas, enquanto que para um $det(J) > 1$, ocorre uma expansão do espaço de fases. Para o bilhar descrito na seção anterior, temos que

$$det(J) = -\frac{Y'(\theta_n) - X'(\theta_n)\,\mathrm{tg}(\phi_n + \alpha_n)}{Y'(\theta_{n+1}) - X'(\theta_{n+1})\,\mathrm{tg}(\phi_n + \alpha_n)}, \tag{2.13}$$

onde pode-se notar que o determinante não é igual a 1.

Inicialmente, o resultado apresentado na Eq. (2.13) pode ser um tanto quanto surpreendente, dado que estamos lidando com um sistema não dissipativo. Contudo, isso pode ser facilmente justificado pelo fato da descrição do modelo não ter sido feita utilizando-se das variáveis canonicamente conjugadas para o problema[§] [29, 41]. Nesta situação, o modelo passa a não mais exibir uma preservação de área do espaço de fases mas sim a preservação de uma medida, que no caso do bilhar ovóide ainda não foi identificada na literatura.

É importante ressaltar que independente das variáveis do problema serem canonicamente conjugadas ou não, ambas situações reproduzem o mesmo fenômeno físico não dissipativo, logo esperamos que a diferença entre as duas descrições apenas produzam leves distorções entre seus espaços de fases.

Uma outra característica interessante que pode ser estudada e que revela muito sobre a estrutura do espaço de fases é a análise dos pontos fixos da dinâmica e suas respectivas estabilidades. Partindo do princípio de que existe um ponto (θ^*, α^*), tal que, $(\theta^*, \alpha^*) = A(\theta^*, \alpha^*)$, então podemos dizer que (θ^*, α^*) é um ponto fixo do sistema. A estabilidade desse ponto fixo pode ser

---

[†]Maiores informações sobre a matriz Jacobiana, inclusive sobre cada um de seus elementos, podem ser encontrados no Apêndice A.

[§]No que tange ao estudo de bilhares clássicos, as variáveis canonicamente conjugadas são um ângulo com propriedades similares ao α do bilhar ovóide e uma medida de comprimento de arco da fronteira.

encontrada através de seus autovalores λ' dados por

$$det\begin{pmatrix} (j_{11}-\lambda') & j_{12} \\ j_{21} & (j_{22}-\lambda') \end{pmatrix}\Bigg|_{(\theta^*,\alpha^*)} = 0, \tag{2.14}$$

o que resulta na equação

$$\lambda'_{1,2} = \frac{(TrJ) \pm \sqrt{(TrJ)^2 - 4det(J)}}{2},$$

onde $TrJ = (j_{11} + j_{22})$ representa o traço da matriz Jacobiana e $det(J) = (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})$ o determinante da matriz Jacobiana.

A classificação para os pontos fixos [42, 43] é feita de acordo com os valores assumidos pelos autovalores $\lambda'_{1,2}$, tal como:

- Se $TrJ < 4det(J)$, o ponto fixo (θ^*, α^*) é do tipo complexo e assume a forma $\lambda'_{1,2} = b \pm ic$. No caso em que $b = 0$, (θ^*, α^*) é estável e classificado como elíptico. Para $|b| < 1$, (θ^*, α^*) é caracterizado como um foco assintoticamente estável, enquanto que para $|b| > 1$, (θ^*, α^*) é classificado como um foco instável;

- Se $TrJ > 4det(J)$, o ponto fixo (θ^*, α^*) é instável e classificado como hiperbólico ou sela;

- Se $TrJ = 4det(J)$, o ponto fixo (θ^*, α^*) é classificado como parabólico e nesse caso $\lambda'_{1,2} = TrJ/2$.

Após essa verificação inicial sobre algumas características que compõem o modelo do bilhar ovóide, vamos então estudar de forma visual a estrutura do espaço de fases desse sistema dinâmico. A figura 2.3(a) exibe o resultado para a evolução numérica através da Eq. (2.11) de um conjunto composto por $M = 10^3$ partículas com condições iniciais distribuídas uniformemente ao longo de $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e $\alpha_0 \in [0, \pi]$, onde cada uma dessas partículas colide até 10^3 vezes com a fronteira do bilhar. Podemos ver que o espaço de fases do modelo é do tipo misto, onde observa-se a coexistência de ilhas de estabilidade imersas em meio a um mar de caos, que por sua vez está sendo confinado por um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*, que no contexto dos bilhares também são conhecidas como *whispering gallery orbits*.

De modo a compreender melhor o significado desse resultado, estudamos o comportamento de algumas partículas inicializadas no interior do bilhar sob diferentes condições iniciais do espaço de fases da Fig. 2.3(a). Para uma condição inicial fornecida em meio ao mar de caos, temos uma trajetória como a exibida na Fig. 2.3(b), onde podemos observar um desordenamento no movimento da partícula ao longo das colisões com a fronteira. De forma semelhante, se uma partícula for inicializada com uma condição inicial na região das *whispering gallery orbits*, temos um comportamento como da Fig. 2.3(c), onde pode-se notar que a trajetória da partícula

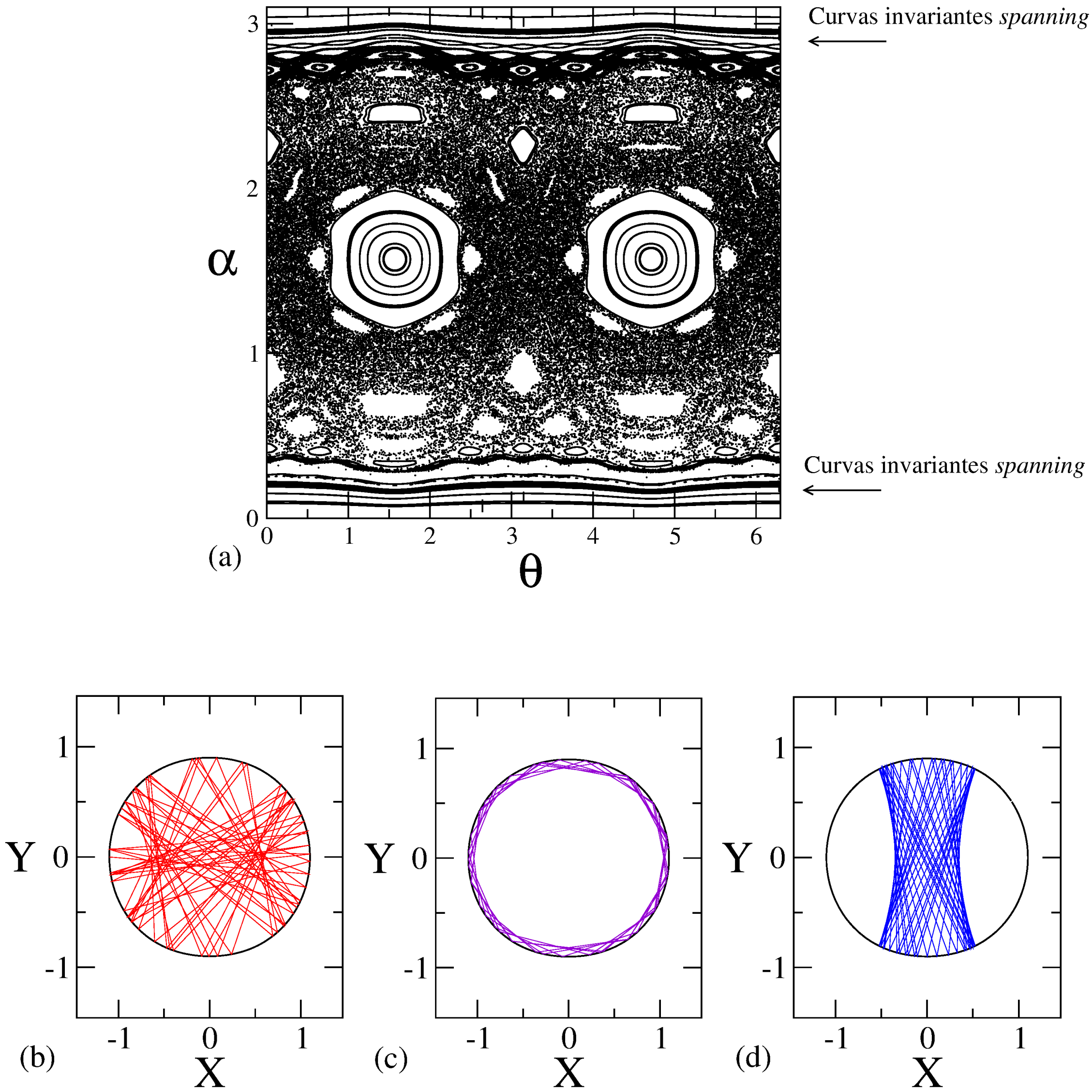

Figura 2.3: *(a) Espaço de fases para o bilhar ovóide com fronteira estática, onde pode ser verificado a coexistência do mar de caos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes do tipo spanning; (b,c,d) Apresentam um esboço da trajetória de uma partícula com condição inicial dada em uma região do espaço de fases caótica, de curvas invariantes do tipo spanning e na cadeia central de ilhas de estabilidade respectivamente. Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,1$ *e* $p = 2$.

tende a sempre estar margeando a parede do bilhar. Por último, para uma partícula com condição inicial na área das ilhas de estabilidade, temos um movimento ordenado como reproduzido na Fig. 2.3(d).

É importante ressaltar que a variação do parâmetro ϵ pode acarretar em mudanças significativas no espaço de fases do sistema, como mostrado na Fig. 2.4. Nesta figura pode-se notar que além da mudança no tamanho das ilhas de estabilidade, observa-se a ausência de trajetórias do tipo *whispering gallery orbits*, o que sugere uma dependência entre a observação dessas órbitas e o tipo de deformação ϵ aplicada sobre o bilhar.

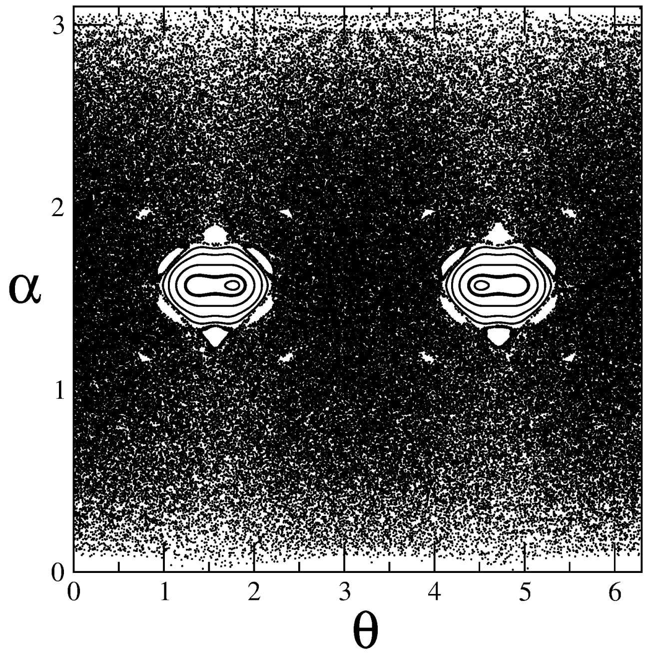

Figura 2.4: *Espaço de fases construído para os parâmetros* $\epsilon = 0,2$ *e* $p = 2$*, onde pode ser observado a completa ausência de curvas invariantes do tipo spanning no sistema.*

Essa dependência entre as *whispering gallery orbits* e o parâmetro ϵ pode ser explicada através da troca da curvatura da fronteira do bilhar demonstrada na Fig. 2.5(a,b). Uma vez que órbitas do tipo *whispering gallery orbits* podem ser definidas como um conjunto de curvas quase-periódicas que indicam trajetórias que margeiam a parede do bilhar, uma fronteira com curvatura do tipo côncava acaba por privilegiar órbitas com essas características, como exibido na Fig. 2.5(a). Entretanto, para uma fronteira convexa como a Fig. 2.5(b), a própria curvatura da parede acaba impedindo que as partículas tenham ou se mantenham em trajetórias que possam margear toda a parede do bilhar, resultado esse que culmina na extinção desse tipo de órbita no sistema.

Dado que a variação de ϵ exerce uma grande influência na dinâmica do problema, principalmente no que tange a mudança na curvatura da fronteira, é possível definir um parâmetro crítico, tal que ele indique o valor máximo para qual temos uma fronteira com concavidade positiva ou negativa. Esse parâmetro pode ser dado por [3, 44, 45]

$$\epsilon_c = \frac{1}{1+p^2}, \qquad p \geq 1, \tag{2.15}$$

onde para valores abaixo de ϵ_c, tem-se um forma côncava para a fronteira, enquanto que para valores maiores que ϵ_c a fronteira exerce concavidade negativa, ou seja, convexa[†].

Deste modo, concluímos essa seção onde discutimos algumas propriedades relacionadas ao mapeamento do bilhar ovóide assim como as características estruturais do espaço de fases

[†]Mais informações sobre a obtenção de ϵ_c podem ser encontradas no Apêndice B.

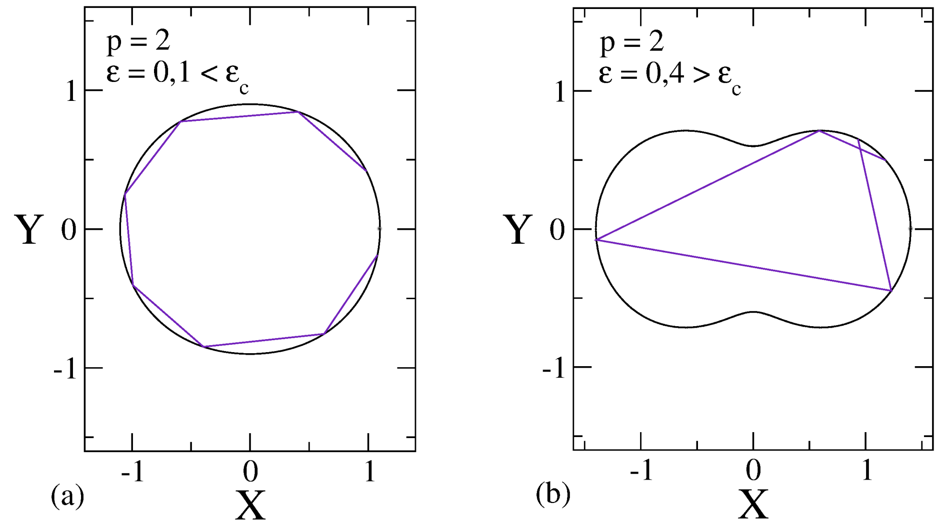

Figura 2.5: *Ilustração de (a) uma whispering gallery orbits em um bilhar com fronteira côncava e (b) da ausência de whispering gallery orbits em um fronteira convexa. Os parâmetros utilizados foram $p = 2$ e ϵ indicados na figura.*

deste modelo. Na próxima seção, discutimos o conceito dos expoentes de Lyapunov, o que é uma ferramenta extremamente importante para a caracterização de órbitas caóticas no espaço de fases.

2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov [42, 43] são frequentemente utilizados como indicadores de caos. Através deles, é possível caracterizar se uma determinada dinâmica apresenta ou não uma sensibilidade frente às condições iniciais. Essencialmente, a ideia do expoente de Lyapunov é medir o afastamento médio entre duas órbitas de condições iniciais muito próximas, de modo que, quando esse afastamento médio é dado de forma exponencial, temos que essas órbitas apresentam um comportamento caótico. Contudo, no caso em que essas órbitas permaneçam próximas uma da outra ou apresentem uma divergência de qualquer outro tipo, dizemos que elas são do tipo regulares.

Nosso objetivo nessa seção é utilizar o conceito dos expoentes de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico de algumas partículas sujeitas à condições iniciais no espaço de fases do bilhar ovóide. Porém, para compreender o completo funcionamento deste conceito, vamos inicialmente demonstrar o cálculo dos expoentes de Lyapunov para um caso unidimensional genérico e somente após isso demonstrar o caso bidimensional.

Supondo inicialmente um modelo unidimensional onde x é a variável dinâmica, vamos propor um mapeamento genérico dado por

$$x_{n+1} = G(x_n), \tag{2.16}$$

onde x_n é uma condição inicial e G é uma função não linear qualquer.

A medida da distância d entre uma condição inicial x_0 e outra $x_0 + \xi$, tal que $\xi > 0$, na iteração n pode ser escrita como

$$d = |G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)|, \tag{2.17}$$

que se dividida por ξ, fornece uma medida de distância relativa na interação n, tal como

$$\frac{d}{\xi} = \left|\frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi}\right|. \tag{2.18}$$

Considerando o limite em que $\xi \to 0$

$$\frac{d}{\xi} = \lim_{\xi \to 0}\left|\frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi}\right| = \frac{dG^{(n)}}{dx_0}, \tag{2.19}$$

podemos observar que a Eq.(2.19) se resume essencialmente à taxa de variação da função G em relação à condição inicial x_0.

Sendo assim, vamos por hipótese supor que

$$|G'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}, \tag{2.20}$$

de modo que após tomarmos o logaritmo em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \ln e^{\lambda n} &= \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \\ \lambda n &= \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \end{aligned} \tag{2.21}$$

que analisado no limite em que $n \to \infty$, fornece a equação

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \tag{2.22}$$

representando a expressão para o cálculo dos expoente de Lyapunov para um problema unidimensional genérico.

Para o caso bidimensional, a expressão para os expoentes de Lyapunov é dada por

$$\lambda_j = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \qquad j = 1, 2; \tag{2.23}$$

onde Λ_j^i corresponde aos autovalores da matriz M, sendo M=$\prod_{i=1}^{n} J_i(\theta_i, \alpha_i)$ e J_i a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita (θ_i, α_i).

Para obter os expoentes de Lyapunov, utilizaremos o algoritmo de triangularização proposto por Eckmann-Ruelle [46] que consiste em escrever a matriz Jacobiana J a partir do produto de uma matriz ortogonal O por uma matriz triangular superior T, tal como

$$J = OT. \tag{2.24}$$

Sabendo por propriedades de matrizes [47] que uma matriz é dita ortogonal quando sua transposta é igual a sua inversa

$$O^{-1} = O^{t}, \tag{2.25}$$

então a matriz triangular T pode ser escrita de forma

$$T = O^{-1}J. \tag{2.26}$$

Dado que a matriz M é escrita como

$$M = J_n J_{n-1} \ldots . J_2 J_1, \tag{2.27}$$

ao se introduzir operador $O_1 O_1^{-1}$ na matriz M, tal como

$$M = J_n J_{n-1} \ldots . J_2 O_1 O_1^{-1} J_1, \tag{2.28}$$

o termo $O_1^{-1} J_1$ pode ser identificado como a matriz triangular T_1, enquanto o termo $J_2 O_1$ pode ser reescrito como $J_2^{'}$, logo

$$M = J_n J_{n-1} \ldots . J_2^{'} T_1. \tag{2.29}$$

Aplicando-se repetidas vezes essa identidade

$$M = J_n J_{n-1} \ldots . J_3 O_2 O_2^{-1} J_2^{'} T_1, \tag{2.30}$$

$$M = J_n J_{n-1} \ldots . J_3^{'} T_2 T_1. \tag{2.31}$$

obtemos um produto de matrizes triangulares que resulta em uma nova matriz triangular, o que permite a identificação dos autovalores como sendo os elementos T_{11} e T_{22} da diagonal principal da matriz triangular T.

Para encontrar os valores da diagonal principal de T, utilizamos como matriz ortogonal O

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

onde sua inversa é dada por

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) \\ -\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

e a matriz triangular superior T sendo representada como

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Como indicado na Eq.(2.26), é possível escrever a matriz T da forma

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) \\ -\operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

o que resulta em

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11}\cos(\beta) + j_{21}\operatorname{sen}(\beta) & j_{12}\cos(\beta) + j_{22}\operatorname{sen}(\beta) \\ -j_{11}\operatorname{sen}(\beta) + j_{21}\cos(\beta) & -j_{12}\operatorname{sen}(\beta) + j_{22}\cos(\beta) \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Desenvolvendo essas equações, é possível encontrar que

$$T_{11} = j_{11}\cos(\beta) + j_{21}\operatorname{sen}(\beta), \tag{2.37}$$
$$T_{12} = j_{12}\cos(\beta) + j_{22}\operatorname{sen}(\beta), \tag{2.38}$$
$$0 = -j_{11}\operatorname{sen}(\beta) + j_{21}\cos(\beta), \tag{2.39}$$
$$T_{22} = -j_{12}\operatorname{sen}(\beta) + j_{22}\cos(\beta), \tag{2.40}$$

e com o auxílio da Eq.(2.39), temos

$$0 = -j_{11}\operatorname{sen}(\beta) + j_{21}\cos(\beta), \tag{2.41}$$

$$j_{11}\operatorname{sen}(\beta) = j_{21}\cos(\beta), \tag{2.42}$$
$$\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \tag{2.43}$$

A equação (2.43) pode ser representada através de um vetor no plano com o módulo igual a

$$h = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}, \tag{2.44}$$

como mostrado na Fig. 2.6.

Considerando que

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \qquad \cos(\beta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \tag{2.45}$$

e transportando as expressões da Eq.(2.45) para as Eq.(2.37) e Eq.(2.40), os elementos da dia-

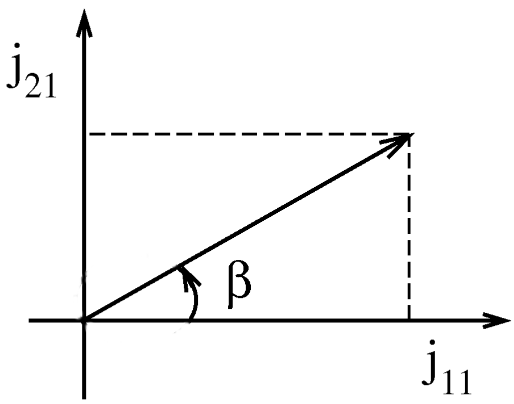

Figura 2.6: *Ilustração esquemática para os eixos de j_{11}, j_{22} e o ângulo β.*

gonal da matriz T podem ser identificados como

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \tag{2.46}$$
$$T_{22} = \frac{j_{22}j_{11} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}},$$

o que leva a expressão do cálculo dos expoentes de Lyapunov para o caso bidimensional ser escrita como

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |T_{jj}^{(n)}|, \qquad j = 1, 2, \tag{2.47}$$

onde T_{jj} representa o elemento da diagonal da matriz triangular superior $T^{(n)}$.

Uma informação importante sobre os expoentes de Lyapunov para sistemas dinâmicos não dissipativos e bidimensionais, é que eles sempre aparecem aos pares, com sinais trocados e resultam em zero quando somados um ao outro na presença de dinâmica caótica. Entretanto, no caso dissipativo e também na presença de dinâmica caótica, esses expoentes continuam a aparecer aos pares e com sinais trocados, porém, resultando em um valor negativo quando somados.

A medida dos expoentes de Lyapunov para o bilhar ovóide pode ser verificada nas Fig. 2.7(a,b), onde utilizamos esse conceito para caracterizar e confirmar a existência de um mar de caos no espaço de fases da Fig. 2.3(a) e Fig. 2.4.

A construção da Fig. 2.7(a) foi feita a partir da seleção de algumas condições iniciais em meio ao mar da caos da Fig. 2.3(a), de modo que avaliamos o valor de λ ao longo de 10^5 colisões que cada uma dessas partículas experimentaram com a parede do sistema. A figura 2.7(a) apresenta que o comportamento médio dos expoentes de Lyapunov para essas condições iniciais é $\langle\lambda\rangle = 0,24(2)$, onde (2) representa uma incerteza sobre o último algarismo significativo da medida. Esse resultado comprova a divergência exponencial por parte das condições iniciais, o que consequentemente as caracteriza como caótica, corroborando assim com existência de um mar de caos no espaço de fases.

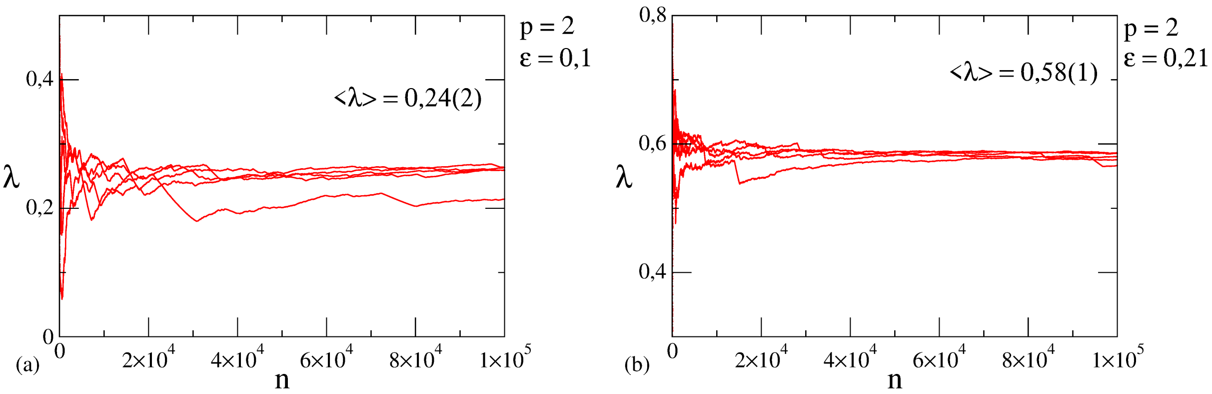

Figura 2.7: *(a,b) Verificação do comportamento caótico de um conjunto de partículas com condições iniciais tomadas no mar de caos da Fig. 2.3(a) e Fig. 2.4 respectivamente.*

De forma semelhante, a Fig. 2.7(b) reproduz os passos discutidos acima, porém, agora levando em consideração condições iniciais em meio ao mar de caos da Fig. 2.4. Para essas condições iniciais, o valor médio para os expoentes de Lyapunov é $\langle\lambda\rangle = 0,58(1)$, indicando também uma divergência exponencial entres as condições iniciais próximas.

Concluímos desta forma essa seção onde foi discutido o conceito e o método do cálculo dos expoentes de Lyapunov para o modelo bidimensional do bilhar ovóide com fronteira estática. Nas próximas seções, começaremos a abordar alguns problemas em aberto na literatura envolvendo a dinâmica de bilhares clássicos, onde nosso foco inicial se dará na descrição do escape de partículas quando um orifício é introduzido ao longo da fronteira do bilhar ovóide, além de também caracterizar as condições que levam a maximização e a minimização do escape de partículas neste sistema.

2.5 Propriedades estatísticas I: Escape por um orifício

O estudo sobre bilhares abertos ou bilhares com furos, vem ao longo do últimos anos despertando um grande interesse na comunidade científica, devido a possibilidade desses modelos descreverem teoricamente resultados de experimentos realizados na área da física atômica [48], acústica [49], condução de calor [50], cavidades ópticas [51] entre outras. Os bilhares abertos também são frequentemente utilizados para estudar propriedades relacionadas ao escape de partículas quando um ou mais orifícios são introduzidos em sua fronteira. Esse assunto, aliás, chamou muito a atenção no ano de 2005 quando Bunimovich e Dettmann demonstraram a conexão entre o bilhar circular aberto com um dos problemas mais desafiantes e ainda não resolvidos da matemática, as hipóteses de Riemann. Neste trabalho, os autores encontraram uma expressão analítica para a taxa de escape de partículas em um bilhar circular com dois orifícios em sua fronteira, envolvendo o somatório dos zeros da conhecida função ζ de Riemann [52].

Sendo assim, nesta seção vamos iniciar o desenvolvimento do estudo de algumas proprie-

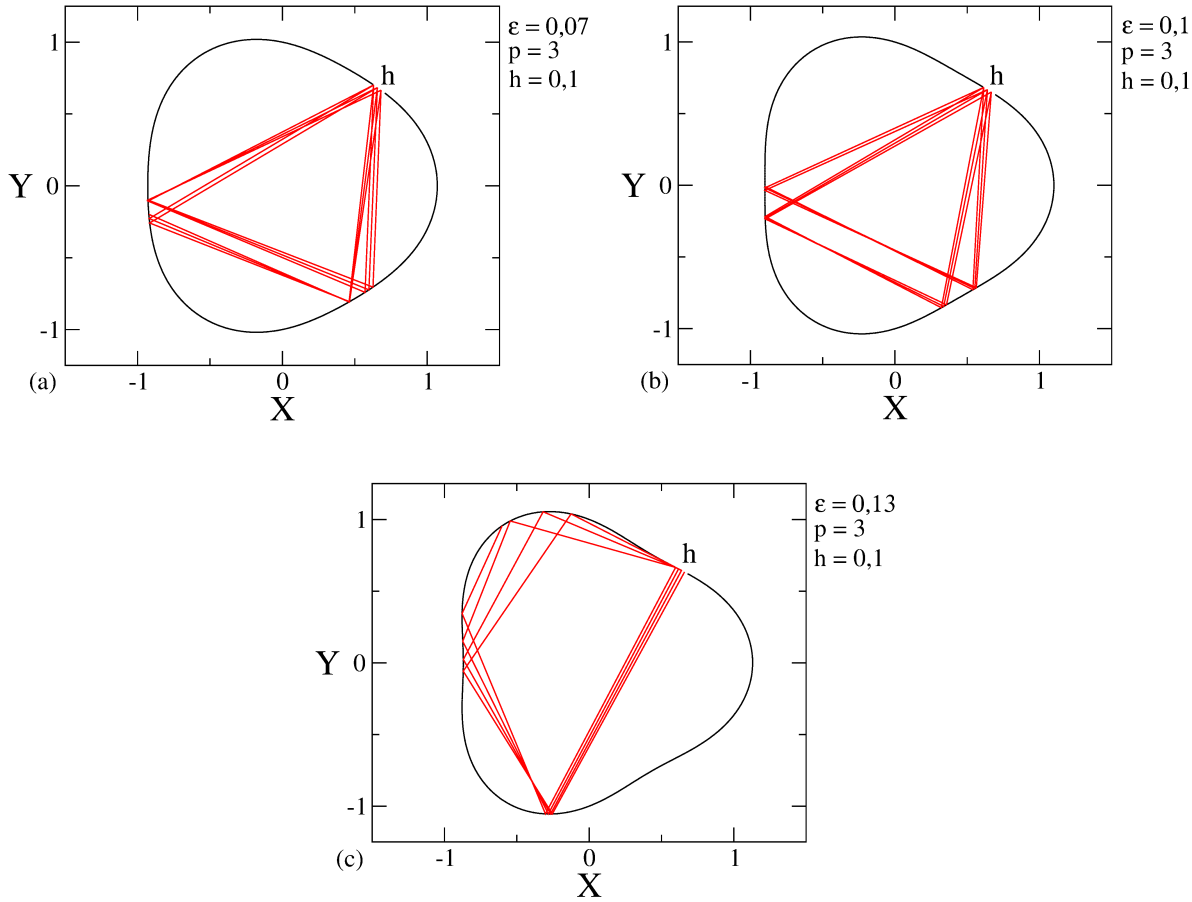

Figura 2.8: *Ilustração da injeção de partículas no bilhar ovóide através do orifício h centrado em $\theta_{ct} = \pi/4$ para os parâmetros dados por (a) $\epsilon = 0,07$ e $p = 3$; (b) $\epsilon = 0,1$ e $p = 3$; (c) $\epsilon = 0,13$ e $p = 3$.*

dades referentes ao escape de partículas em um bilhar ovóide, quando um orifício é introduzido em sua fronteira. Para isso, o primeiro passo a ser tomado é a definição da posição do orifício ao longo da fronteira do bilhar. Esse orifício nada mais é que um determinado deslocamento angular na variável θ que deve ser acrescido sobre uma posição θ_{ct}, definida como sendo o centro do buraco. A extensão desse orifício será dada por $h = 0,1$ e inicialmente θ_{ct} será fixado em $\pi/4$. A figura 2.8(a-c), demonstra um exemplo ilustrativo para as trajetórias de algumas partículas no interior do bilhar ovóide aberto conforme o parâmetro ϵ é variado.

Após a definição da parametrização discutida acima, injetamos através do orifício um ensemble de $M = 10^6$ partículas com condições iniciais distribuídas uniformemente ao longo do intervalo $\theta_0 \in (0, h)$ e $\alpha_0 \in [0, \pi]$, onde cada uma das partículas evolui até 10^6 colisões com a fronteira do bilhar caso não escapem antes.

Um fato de extrema importância que deve ser levado em consideração para construção das estatísticas de escape, é que as partículas não devem escapar na primeira colisão. Essa afirmação se vale pelo fato de que o escape na primeira colisão, significa que a partícula foi lançada diretamente para o buraco e isso influencia diretamente a estatística do problema, pois nesse

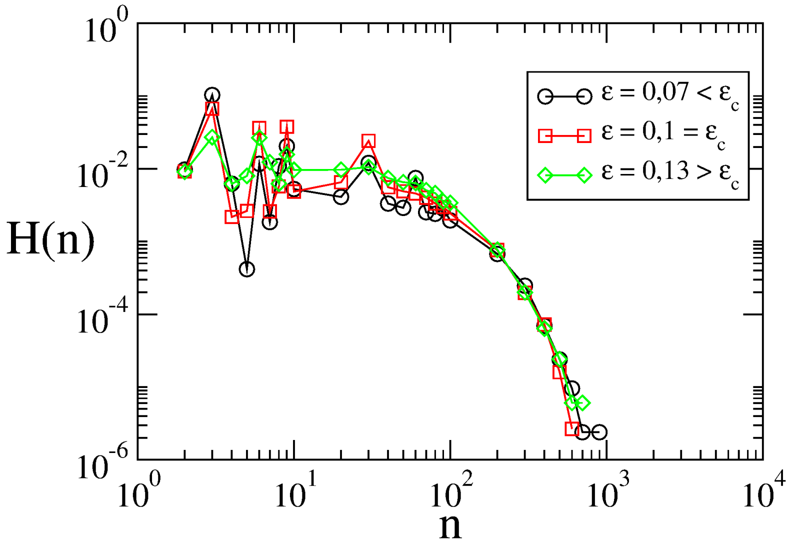

Figura 2.9: *Análise do histograma de escape $H(n)$ das partículas em função do número de colisões n. Os parâmetros utilizados foram $p = 3$ e os valores de ϵ indicados na figura.*

caso não estaríamos analisando se a partícula pode escapar do bilhar mas sim forçando-a ao escape.

O procedimento para a montagem das estatísticas de escape no sistema é feita da seguinte maneira, quando uma partícula visita a região do buraco pela primeira vez, registramos o número da colisão e definimos que ocorreu um escape. Seguidamente, uma nova condição inicial é disparada e o processo é repetido novamente até que todo o ensemble de partículas seja exaurido.

A primeira análise realizada é o estudo referente a frequência normalizada $H(n)$ do escape de partículas em função do número de colisões n, como exibido na Fig. 2.9 para diferentes combinações de parâmetros de controle. É possível notar que o resultado apresentado está de acordo com a proposta inicial de que não existe escape na primeira colisão das partículas com a parede do bilhar. Além disso, os resultados também sugerem que existe uma certa preferência de escape nas primeiras colisões do sistema. Uma segunda quantidade de interesse é probabilidade de sobrevivência $P(n)$ das partículas no bilhar. Essa probabilidade indica a quantidade de partículas que sobrevivem no interior do bilhar após uma dada colisão n. Essa quantidade pode ser definida como $P(n) = 1 - H(n)$, ou através da equação

$$P(n) = \frac{1}{M} N_{sob}(n), \tag{2.48}$$

onde M é o número de partículas do ensemble e $N_{sob}(n)$ representa o número de partículas que sobreviveram no interior do bilhar no choque n.

A figura 2.10(a) apresenta o resultado de $P(n)$ $vs.$ n, onde como já era esperado, para $n = 1$ o valor de $P(n) = 1$. É interessante observar que existe um comportamento de decaimento

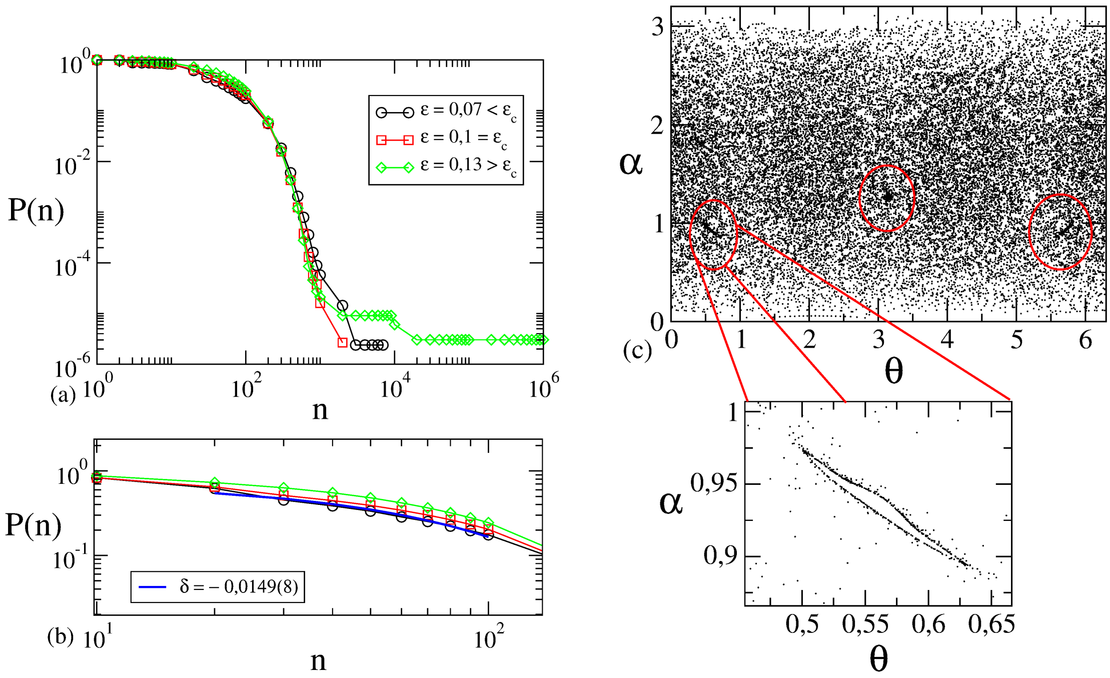

Figura 2.10: *(a) Análise da probabilidade de sobrevivência das partículas em função do número de colisões das partículas com a fronteira do bilhar; (b) Ampliação da região do decaimento exponencial demonstrado nas curvas em (a); (c) A evidência do fenômeno de stickiness (circulados em vermelho) no sistema.*

exponencial na probabilidade de sobrevivência, que pode ser ajustada pela expressão

$$P(n) = P_0 e^{n\delta}, \tag{2.49}$$

onde n é o número de colisões, P_0 é uma constante e δ é o expoente decaimento da curva.

O valor do expoente de decaimento δ pode ser encontrado através de um ajuste numérico adequado, como mostrado na Fig. 2.10(b). Esse resultado é interessante, pois indica que δ é aproximadamente dado pelo valor da razão entre a extensão h do buraco pelo comprimento total da fronteira do bilhar, como verificado abaixo

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{0,1}{2\pi} = 0,015915. \tag{2.50}$$

Contudo, um comportamento que chama a atenção na Fig.2.10(a), é o fato da curva verde construída para $\epsilon = 0,13$ não decair à zero mas sim a um comportamento do tipo platô, onde permanece até o fim da simulação numérica. Esse fato é curioso e pode ser justificado devido a presença do fenômeno de *stickiness* na dinâmica. O fenômeno de *stickiness* [53] pode ser interpretado como sendo um aprisionamento temporário que ocorre quando uma condição inicial passa muito próxima de uma ilha de estabilidade. Nessa situação a partícula fica aprisionada no entorno dessa ilha de estabilidade por um tempo que pode ser suficientemente longo até finalmente conseguir sair desse regime. A figura 2.10(c) apresenta o fenômeno do *stickiness* (circulado em vermelho) no espaço de fases para uma partícula que mesmo após um grande número de colisões permanece no interior do bilhar, o que acaba justificando o platô observado na curva de $P(n)$.

Com esses resultados, concluímos essa seção onde iniciamos a discussão sobre o escape de partículas no bilhar ovóide quando introduzimos um orifício na fronteira do modelo [54]. Na próxima seção vamos desenvolver um estudo de modo a verificar se o comportamento observado aqui é alterado se a posição do buraco for modificada na fronteira do bilhar.

2.6 Propriedades estatísticas II: Orifício móvel

Com base na análise inicial feita na seção anterior, foi observado que a probabilidade de sobrevivência $P(n)$ das partículas permanecerem no interior do bilhar após n colisões, decai de forma exponencial com um expoente de valor aproximado dado pela Eq.(2.50). Contudo, um questionamento natural referente a este resultado pode ser feito: *Esse comportamento pode ser observado independentemente de onde é posicionado o orifício na fronteira?*

A resposta para esta pergunta exige uma análise um pouco mais cuidadosa do problema. Para tentar respondê-la propomos novamente uma análise para o escape de partículas através de um orifício situado na fronteira do bilhar ovóide, porém, adicionando uma nova característica ao estudo, de modo que o buraco poderá se mover ao longo de toda a fronteira do bilhar de acordo com algumas condições pré-estabelecidas. O objetivo principal dessa nova proposta, é ter a oportunidade de observar o comportamento do escape para diversas posições do buraco ao longo da fronteira do bilhar.

Os procedimentos adotados para essa nova análise são, em sua maioria, muito similares ao caso descrito na seção anterior, onde por exemplo, o orifício continua tendo uma abertura constante de extensão $h = 0,1$, entretanto, o buraco agora é centrado em uma posição θ_{ct} que pode se mover em sentido anti-horário, ao longo de 63 diferentes posições na fronteira do bilhar seguindo um passo de $2\pi/63$.

De forma geral, as particularidades envolvidas nesse novo modelo podem ser listadas como: (i) no modelo com o orifício fixo, o ensemble de partículas era injetado no bilhar através do buraco, entretanto, agora será considerado que esse conjunto de partículas já está no interior do bilhar e (ii) foi determinado um "tempo de vida" para que o buraco permaneça na mesma posição. Nas simulações apresentadas nessa seção, foi utilizado como tempo de vida um valor de 5 colisões, ou seja, se uma partícula é inicializada e visita a região do orifício com $n \leq 5$, é registrado o escape e seguidamente fechado o buraco naquela posição. Feito isso, altera-se a posição θ_{ct} do orifício seguindo um passo periódico, para que o mesmo seja aberto em uma nova posição θ_{ct} com o tempo de vida totalmente restaurado. Naturalmente, após esse processo uma nova partícula é inicializada e todo o mecanismo é repetido até que o ensemble de partículas seja exaurido. Contudo, se a partícula colidir mais que 5 vezes com a fronteira e não escapar, o

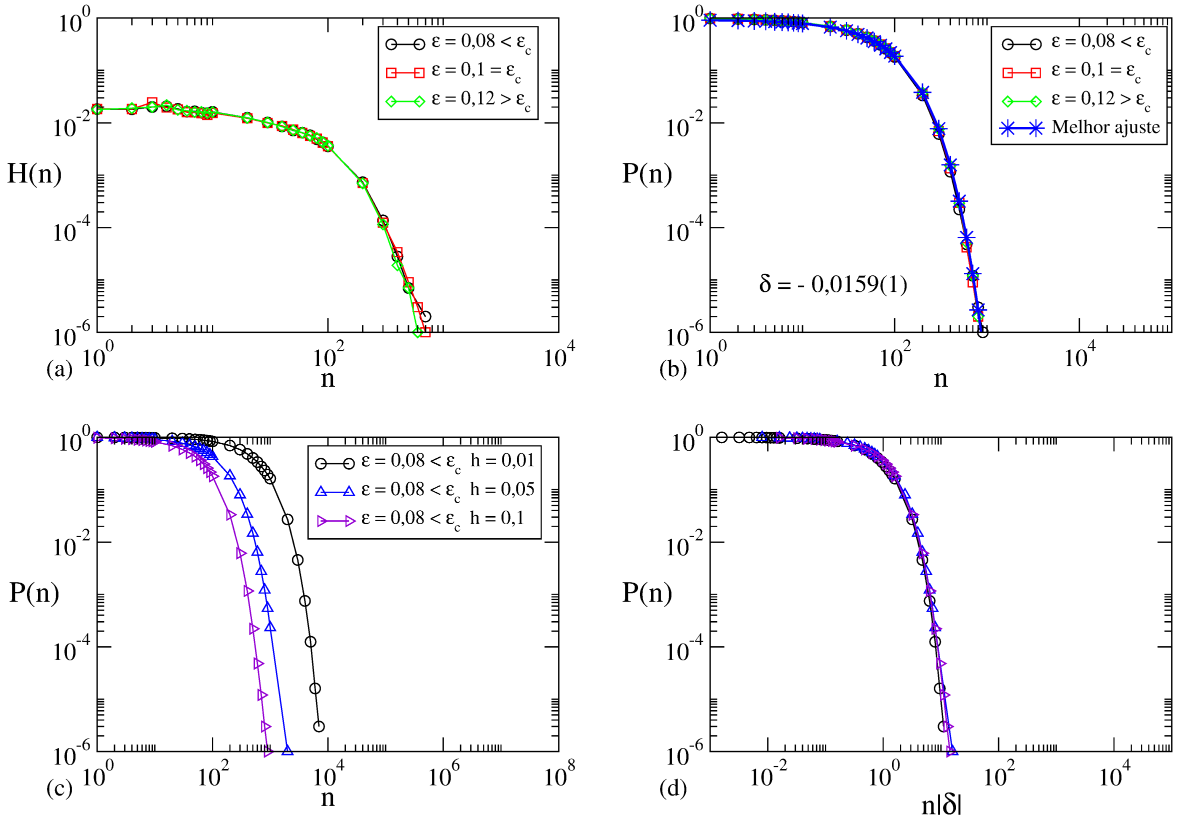

Figura 2.11: *(a) Análise de H(n) em função do número de colisões n ; (b) A probabilidade de sobrevivência $P(n)$ também em função do número de colisões das partículas com a fronteira do bilhar; (c) Probabilidade de sobrevivência $P(n)$ para um orifício móvel ao longo da fronteira com diferentes tamanhos h; (d) A sobreposição das curvas em (c) em função de uma reescala feita com $n \to n|\delta|$. Os parâmetros utilizados foram $p = 3$ e os valores de ϵ são indicados nas figuras.*

buraco também altera sua posição e tem seu tempo de vida novamente restaurado, dando assim continuidade ao mecanismo proposto acima.

As simulações numéricas foram feitas utilizando um conjunto de $M = 10^6$ partículas distribuídas uniformemente ao longo de $\theta_0 \in [0, h]$ e $\alpha_0 \in [0, \pi]$, de modo que cada uma das partículas seja evoluída até 10^6 vezes no interior do bilhar, caso não escape antes. As análises estatísticas do histograma de escape $H(n)$ e a probabilidade de sobrevivência $P(n)$ podem ser feitas da mesma forma como realizadas na seção anterior, e seus respectivos resultados numéricos são apresentados na Fig. 2.11(a,b).

É possível verificar que assim como no caso do orifício fixo, ao se introduzir um buraco móvel na fronteira do bilhar, a probabilidade de sobrevivência $P(n)$ continua a decair em média de forma exponencial com um expoente δ dado aproximadamente pela Eq.(2.50). De modo a verificar ainda mais a validade desse resultado, repetimos as mesmas simulações descritas acima, porém, variando o tamanho da extensão do orifício h. A figura 2.11(c) apresenta os resultados de $P(n)$ $vs.$ n para valores distintos de h, onde é possível verificar que $P(n)$ continua a reproduzir um comportamento do tipo decaimento exponencial independente do tamanho h do

h	δ numérico	δ teórico
$0,01$	$-0,00182(4)$	$-0,00159..$
$0,05$	$-0,00804(4)$	$-0,00795..$
$0,10$	$-0,0159(1)$	$-0,0159..$

Tabela 2.1: *Comparação entre valores numéricos e teóricos para o expoente de decaimento δ.*

buraco. Além disso, no que tange ao valor assumido pelo expoente δ nas simulações, a Tabela (2.1) apresenta uma comparação entre os dados numéricos e aqueles sugeridos pela Eq. (2.50), onde podemos observar a existência de uma boa concordância entre os "resultados teóricos" e numéricos.

Um outro dado interessante sobre essas análises, é que através do conhecimento dos expoentes δ obtidos para cada um dos buracos, é possível realizar uma transformação de escala, tal que $n \to n|\delta|$, de forma a colapsar todas as curvas de $P(n)$ $vs.$ n construídas na Fig. 2.11(c) em uma só curva universal como exibido na Fig. 2.11(d), o que de certa forma demostra uma invariância de escala para a análise do escape no bilhar ovóide.

Através do modelo do orifício móvel, também é possível fazer a verificação de regiões onde o buraco foi mais visitado pelas partículas. Essa análise, aliás, foi proposto por Dettmann [36] em um trabalho no ano de 2010, onde o autor elenca diversos problemas que permanecem e aberto na literatura no campo de bilhares com orifícios, sendo um deles: *Otimização: Especificar onde posicionar um buraco afim de maximizar ou minimizar a medida do escape de partículas.*

Para tentar solucionar de forma parcial esse problema, primeiramente realizamos uma contagem do número de partículas que escaparam em cada uma das 63 possíveis posições do buraco ao longo da fronteira do bilhar. Com o intuito de dar maior robustez a essa estatística, repetimos as simulações para um buraco com extensão $h = 0,1$ para ensembles de 10^6, 10^7 e 10^8 partículas no interior do bilhar.

Após efetuar essa contagem e normalizá-la, foi obtido uma densidade de escape ρ_θ em função do centro do orifício θ_{ct} como mostrado na Fig. 2.12(a-c). Note que esses resultados revelam que as distribuições são compostas por regiões de picos e vales, onde os picos refletem as áreas de maior ocorrência de escape, enquanto os vales representam as regiões de menor frequência. De maneira semelhante ao feito acima, foi realizada uma contagem para a determinação da densidade ρ_α, onde essa quantidade representa a frequência que um dado ângulo $\alpha \in [0, \pi]$ ocorre imediatamente antes do escape acontecer. Essa distribuição também revela as características de regiões de picos e vales, como mostrado na Fig. 2.12(d-f). É importante ressaltar que assim como ocorreu para ρ_θ, a densidade de distribuição para o ângulo α

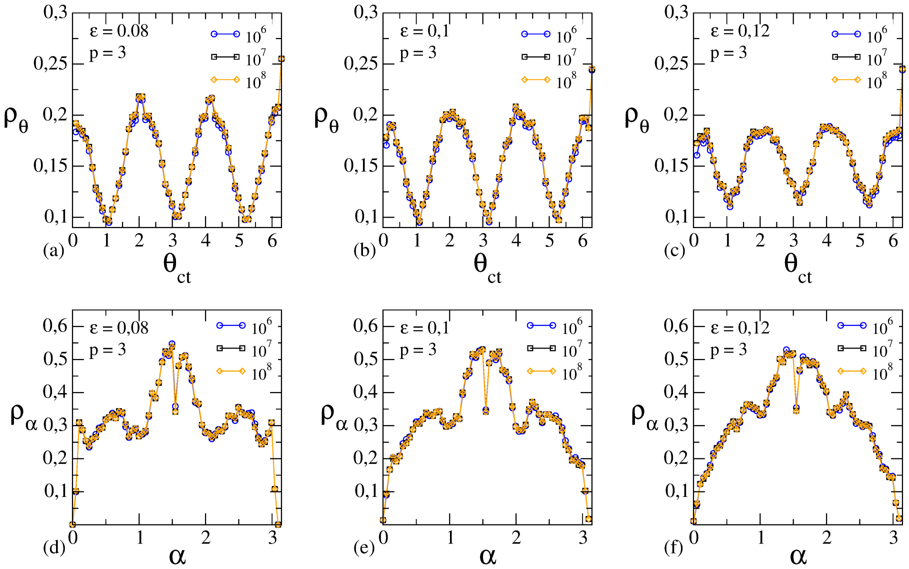

Figura 2.12: *Esboço da densidade de escape ρ_θ $vs.$ θ_{ct} para os parâmetros $p = 3$ e (a) $\epsilon = 0,08$; (b) $\epsilon = 0,1$ e (c) $\epsilon = 0,12$. Esboço da densidade de escape ρ_α $.vs$ α para os parâmetros $p = 3$ (d) $\epsilon = 0,08$; (e) $\epsilon = 0,1$ e (f) $\epsilon = 0,12$.*

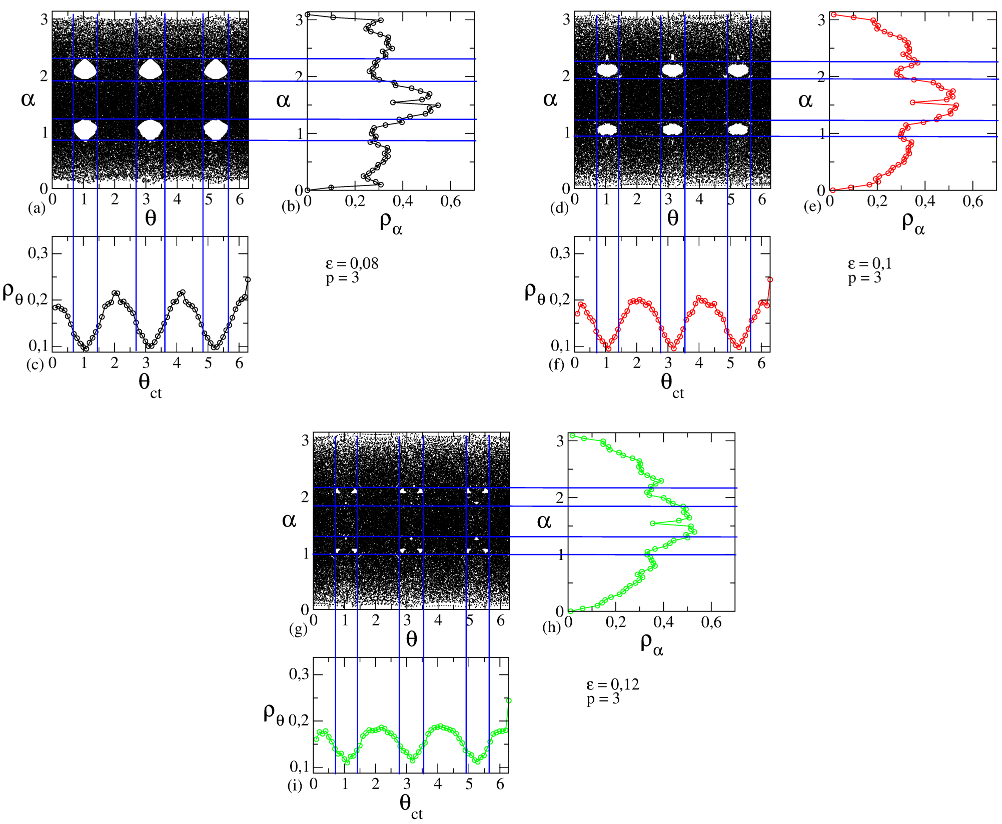

Figura 2.13: *Conexão entre as regiões de picos e vales das densidades de escape com o espaço de fases. O espaços de fases são mostrados (a,d,g), enquanto a densidade de escape ρ_α $vs.$ α em (b,e,h) e a densidade de escape ρ_θ $vs.$ θ_{ct} em (c,f,i). Os parâmetros de controle são indicados nas figuras.*

se mostra invariante frente ao tamanho do ensemble de partículas analisado.

De modo que as distribuições ρ_α e ρ_θ sejam compreendidas da melhor forma possível, comparamos essas regiões de picos e vales com os respectivos espaços de fases mostrados na Fig. 2.13. Fazendo a conexão entre essas figuras é possível verificar que, nas regiões de baixo escape as densidades ρ_α e ρ_θ estão diretamente ligadas as áreas do espaço de fases compostas por ilhas de estabilidade, enquanto que o alto escape está ligado a regiões quase que totalmente predominadas pelo mar de caos. Esse resultado se revela um tanto quanto interessante e importante, pois a partir dele fica indicado a existência de regiões preferenciais para a visitação de partículas no bilhar ovóide, fato que consequentemente pode servir como um guia na busca da especificação de onde posicionar um buraco, de modo a produzir uma maximização ou minimização do escape de partículas [35, 36].

Desta forma, concluímos essa sessão onde verificamos que o comportamento do decaimento da probabilidade de sobrevivência $P(n)$ de um conjunto de partículas no interior do bilhar ovóide, é em média exponencial e que seu expoente de decaimento pode ser aproximado entre razão da extensão do orifício h pelo comprimento total da fronteira. Além disso, também foi observado a existência de regiões preferenciais para a visitação de partículas neste bilhar. Na próxima seção, vamos explorar esse último resultado de modo a estudar o comportamento do escape nas regiões mais e menos frequentadas pelas partículas no bilhar, com o intuito de evidenciar uma possível maximização/minimização do escape.

2.7 A relação entre a posição de lançamento e a posição do orifício

Um dos resultados interessantes encontrados na seção anterior, está ligado ao fato da possível existência de regiões preferenciais para a visitação de partículas no bilhar ovóide. Esse resultado pode fornecer pistas na busca pela especificação de regiões para se introduzir um orifício na fronteira, com o objetivo de verificar uma possível maximização ou minimização do escape de partículas. Desta forma, para compreender melhor esse assunto, abrimos essa seção com o seguinte questionamento: *Como se comporta o escape nas regiões de alta/baixa frequência de visitação de partículas?*

Para tentar responder essa pergunta, foram introduzidos dois orifícios fixos h_1 e h_2 na fronteira do bilhar com uma abertura constante de extensão $h = 0,2$, onde $h_1 \in (3,04; 3,24)$ é considerado um orifício de baixo escape, enquanto $h_2 \in (3,95; 4,15)$ é localizado em uma região de alto escape (veja a Fig. 2.12(a)). A figura 2.14 apresenta uma ilustração da representação desses buracos introduzidos na fronteira do bilhar sob a perspectiva do espaço de fases da dinâmica.

De forma a obter uma melhor compreensão para essa análise, cada orifício será tratado inicialmente de forma individual, tal que num primeiro instante apenas o buraco h_1 será mantido aberto. Sendo assim, injetamos através de h_1 um ensemble com 10^4 partículas com condições

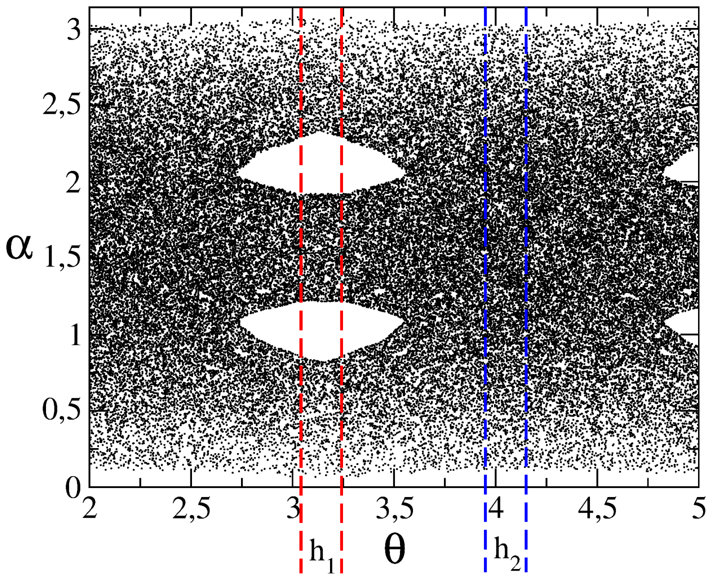

Figura 2.14: *Ilustração da posição dos orifício h_1 e h_2 em relação ao espaço de fases do bilhar ovóide. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.*

iniciais distribuídas uniformemente ao longo de $\theta_0 \in (3,04; 3,24)$ e $\alpha_0 \in [0; \pi]$, onde cada uma das partículas pode colidir até 10^6 vezes com a fronteira do bilhar caso não escape antes.

A figura 2.15(a) (curva vermelha) mostra que para essa primeira situação, $P(n)$ decai exponencialmente (como já era esperado) com um expoente de decaimento numérico dado como $\delta_{h_1} = -0,0187(4)$. Entretanto, ao mudar a configuração do sistema de forma que h_1 é fechado, h_2 é aberto e a injeção das partículas assim como os escapes são computados apenas em h_2, obtemos como indicado na Fig. 2.15(a) (curva azul) que $P(n)$ tem seu expoente de decaimento numérico dado como $\delta_{h_2} = -0,0454(3)$. Com base nesses resultados, é possível verificar que o decaimento $P(n)$ das partículas é muito mais rápido quando elas são injetadas por um orifício situado em uma área de alta visitação, do que quando são injetadas em um região de baixa visitação, o que naturalmente acaba configurando uma situação de maximização do escape no sistema.

Uma importante observação que deve ser feita nesse estudo, é que até este instante foi analisado apenas a influência da posição do orifício no escape das partículas. Porém, se novamente supormos que conjunto de partículas seja tomado no interior do bilhar, podemos realizar um novo questionamento: *A posição do conjunto das partículas no interior do bilhar pode influenciar de alguma forma o escape?*

Essa resposta pode ser obtida através da repetição dos procedimentos adotados acima, contudo, agora não mais injetando as partículas através dos orifícios, mas sim supondo que elas já estejam no interior do bilhar ovóide. Para iniciar essa nova análise, vamos propôr que as partículas sejam lançadas com condições iniciais em uma faixa no espaço de fases predominantemente caótica, que por facilidade será adotada como a região definida para h_2. Nesta situação,

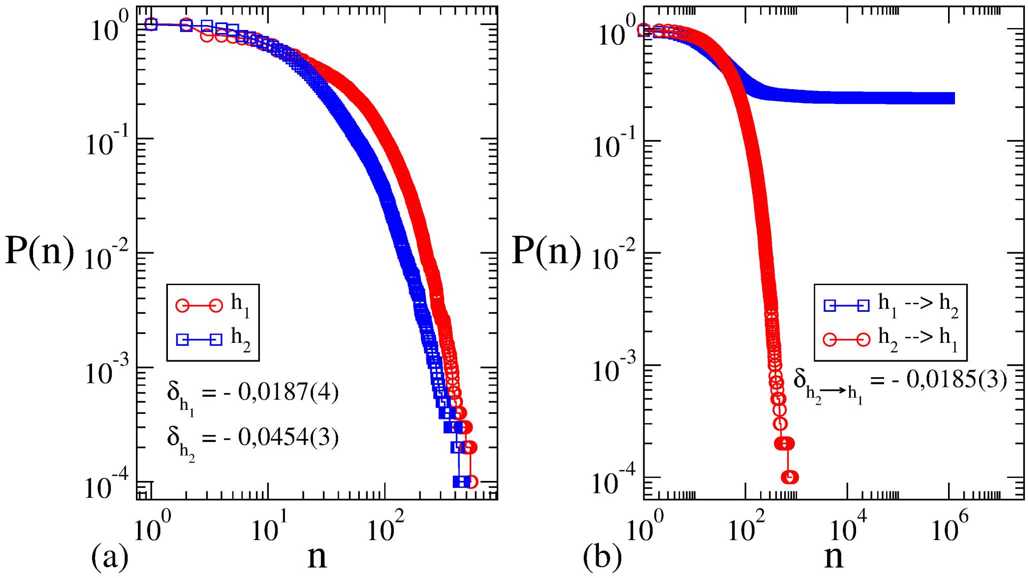

Figura 2.15: *Probabilidade de sobrevivência $P(n)$ para (a) partículas que são injetadas e escapam através de h_1 (curva vermelha) e h_2 (curva azul), (b) partículas que são injetadas da região de h_1 e escapam em h_2 (curva azul) e as partículas lançadas de h_2 que escapam por h_1 (curva vermelha). Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.*

o escape será computado quando as partículas visitarem a região do buraco h_1. Para esse tipo de configuração, temos que $P(n)$ decai com um expoente numérico do tipo $\delta_{h_2 \to h_1} = -0,0185(3)$ como apresentado na Fig. 2.15(b) (curva vermelha). É interessante notar que esse resultado produz um expoente de decaimento δ muito próximo ao encontrado para δ_{h_1}.

Se novamente for trocado a configuração do sistema, de modo que as partículas estejam no interior do bilhar na região de h_1 e o orifício é posto numa área predominantemente caótica como h_2, é esperado que ocorra um decaimento da probabilidade de sobrevivência $P(n)$ de forma rápida, o que contudo, não é verificado na curva azul da Fig. 2.15(b). Para essa situação é observado que a curva azul tem inicialmente um decaimento, mas para $n > 100$ existe uma convergência de $P(n)$ para um platô que se mantém até o fim da simulação, implicando a princípio que existem partículas que jamais escaparão através do orifício do bilhar.

As razões para esse platô podem ser facilmente justificadas considerando as condições iniciais que as partículas podem ter ao longo da faixa compreendida por h_1. Nesta situação, observa-se a existência de condições iniciais que levam tanto à órbitas caóticas quanto à órbitas periódicas, enquanto que para a região de h_2 as órbitas, em sua maioria, são caóticas. Logo, se o buraco é posicionado na região h_2, só ocorreram escapes se as partículas exibirem comportamentos do tipo caótico. No caso de partículas com órbitas periódicas, o escape jamais será observado através deste orifício, justificando assim o comportamento observado.

É válido ressaltar também que, um componente que pode contribuir na observação do platô por um determinando intervalo de tempo, é o fato de algumas partículas poderem estar sobre a influência do fenômeno de *stickiness*, uma vez que suas condições iniciais podem estar bem

Lançamento	δ para h_1 (Região mista)	δ para h_2 (Região caótica)
Região mista	$-0,0187(4)$	–
Região caótica	$-0,0185(3)$	$-0,0454(3)$

Tabela 2.2: *Comparação entre os expoentes de decaimento δ para diferentes regiões de lançamento das partículas e posicionamento do orifício.*

próximas das ilhas de estabilidade exibidas no espaço de fases.

A Tabela (2.2) ajuda a resumir os resultados encontrados ao longo dessa seção, onde pode ser verificado que a melhor configuração possível dentre as estudadas para a observação da maximização de escape, vem através da combinação da região do lançamento das partículas e do posicionamento do orifício com faixas do espaço de fases predominantemente caóticas.

Essa tabela também indica que um dos fatores de maior influência para a observação ou não da fuga completa de partículas do interior do bilhar é a escolha da região de lançamento. É possível notar que os melhores resultados em termos de escape ocorrem quando o lançamento das partículas é feito com condições iniciais de faixas caóticas do espaço de fases, independentemente da posição do buraco. Essa observação se torna válida uma vez que para essa configuração observamos ou uma rápida difusão de partículas através do buraco ou no mínimo uma difusão do tipo lenta. Porém, em ambas situações todas partículas escapam após um número de colisões n. No entanto, se o lançamento é feito com condições iniciais em faixas mistas do espaço de fases, independentemente da localização do orifício, o melhor resultado que pode ser obtido em termos de escape é uma difusão lenta de partículas através do buraco, e na pior das situações a interrupção total do escape de partículas.

Fechamos assim essa seção onde verificamos que a injeção de partículas através de um orifício posicionado em uma região de alta visitação leva à maximização do escape de partículas no bilhar ovóide. Observamos também que a escolha da região de lançamento ou injeção das partículas exerce uma grande influência na verificação ou não da fuga completa de partículas do bilhar. Na próxima seção, utilizaremos as condições discutidas que levam à maximização do escape no bilhar ovóide para estudar a competição do escape entre dois buracos introduzidos no sistema, quando ambos são ideais para a verificação de uma difusão rápida das partículas.

2.8 Bacias de escape

Com base na caraterização feita na seção anterior sobre as condições necessárias para levar à maximização do escape no bilhar ovóide, nesta seção, vamos introduzir dois buracos h_1 e h_2 ao longo da fronteira do bilhar, de modo que ambos os orifícios são posicionados em regiões que privilegiam a observação do escape rápido. O objetivo para essa configuração em particular será analisar a competição entre os escapes pelos dois orifícios, com a finalidade de verificar se mesmo em uma situação ideal para a ocorrência da maximização do escape, existe algum tipo de preferência por parte das partículas em relação aos buracos h_1 e h_2.

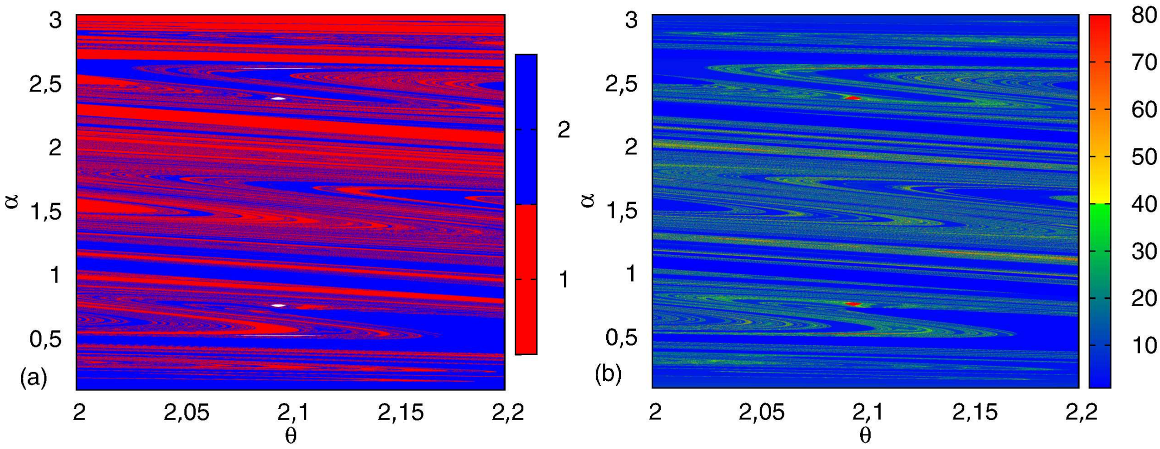

Figura 2.16: *(a) Bacias de escape para as partículas que experimentaram o escape por algum dos orifícios h_1 e h_2, representadas pelas cor vermelha e azul respectivamente; (b) Reprodução da figura exibida em (a) com uma escala de cor dada em função do número de colisões n. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.*

Dado que o sistema será configurado de forma que: (i) o ensemble de partículas a ser analisado esteja no interior do bilhar, com condições iniciais sujeitas a uma região do espaço de fases predominantemente caótica e (ii) que h_1 e h_2 também sejam posicionados em regiões onde só possam receber visitas de partículas caóticas, então, o estudo da competição será feito através da análise das bacias de escape de h_1 e h_2.

Para a realização dessa simulação numérica, foi utilizado um ensemble de $M = 4 \times 10^6$ partículas com condições iniciais uniformemente distribuídas em $\theta_0 \in [2,0; 2,2]$ e $\alpha_0 \in [0; \pi]$, onde cada uma das partículas pode colidir até 10^6 vezes com a parede do bilhar caso não ocorra o escape antes. O posicionamento dos orifícios é dado por $h_1 \in (0,1; 0,3)$ e $h_2 \in (3,95; 4,15)$, onde ambos são mantidos abertos ao longo de toda a simulação com uma extensão constante $h = 0,2$.

A figura 2.16(a) apresenta o resultado para as bacias de escape do bilhar ovóide, onde as cores vermelho e azul representam a fuga das partículas através de h_1 e h_2 respectivamente. Esse resultado merece uma análise cuidadosa pois representa o sistema em sua configuração para a observação da maximização do escape de partículas. Ao observar a Fig. 2.16(a), é possível notar a existência de regiões preferenciais para observar escapes por h_1 e h_2, contudo, as bacias exibem um certo equilíbrio no que tange a uma preferência por algum orifício em específico. Esse resultado se tornou evidente, após a realização de uma contagem do número de partículas que escapam por cada um dos orifícios revelar que h_1 e h_2 recebem cada um aproximadamente 50% do ensemble analisado.

Entretanto, através de uma observação atenta na Fig. 2.16(a), é possível notar que para uma região próxima ao ponto $(\theta, \alpha) = (2,0; 0,75)$, existe um grupo de partículas sujeito à condições iniciais destacadas pela cor branca, que mesmo após 10^6 colisões com a fronteira do bilhar, não escapam por nenhum dos dois orifícios introduzidos no sistema. Esse resultado à princípio não é esperado, pois as configurações adotadas para esse bilhar deveriam levar todas as partículas

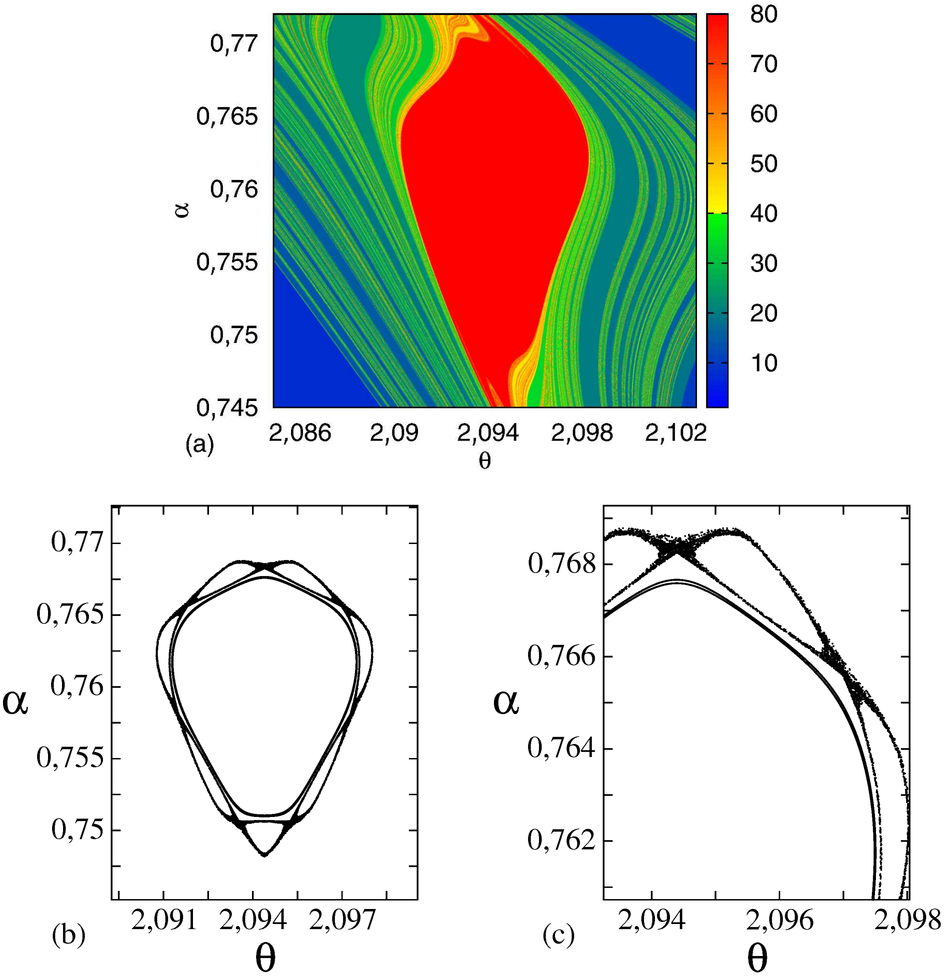

Figura 2.17: *(a) Representa a ampliação de uma região das bacias de escape da Fig. 2.16(b), onde partículas com condições iniciais situadas na região vermelha não experimentaram o escape por nenhum dos orifícios do bilhar; (b,c) Representa uma pequena cadeia de ilhas no espaço de fases referente a região demonstrada em (a). Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,08$ *e* $p = 3$.

do ensemble a um rápido escape.

Sendo assim, para tentar uma melhor compreensão sobre esse resultado, reproduzimos novamente a Fig. 2.16(a), porém, agora utilizando como escala de cor o número de colisões que cada partícula experimentou até encontrar um dos buracos h_1 ou h_2.

A figura 2.16(b) demonstra esse resultado com uma escala de cor limitada em até 80 colisões das partículas com a fronteira do bilhar. A partir dessa figura, é possível observar que existe uma parcela considerável de partículas que escapa após aproximadamente 10 colisões com a fronteira, e que uma fatia menor do ensemble tem sua fuga atingida após aproximadamente 40 colisões. Esse resultado, de maneira geral, demonstra um escape rápido no sistema como era esperado no início, exceto pelo conjunto de partículas indicado pela cor vermelha.

De modo a compreender melhor essa região envolvendo o aparente aprisionamento de partículas no interior do bilhar, realizamos uma ampliação da região em questão como de-

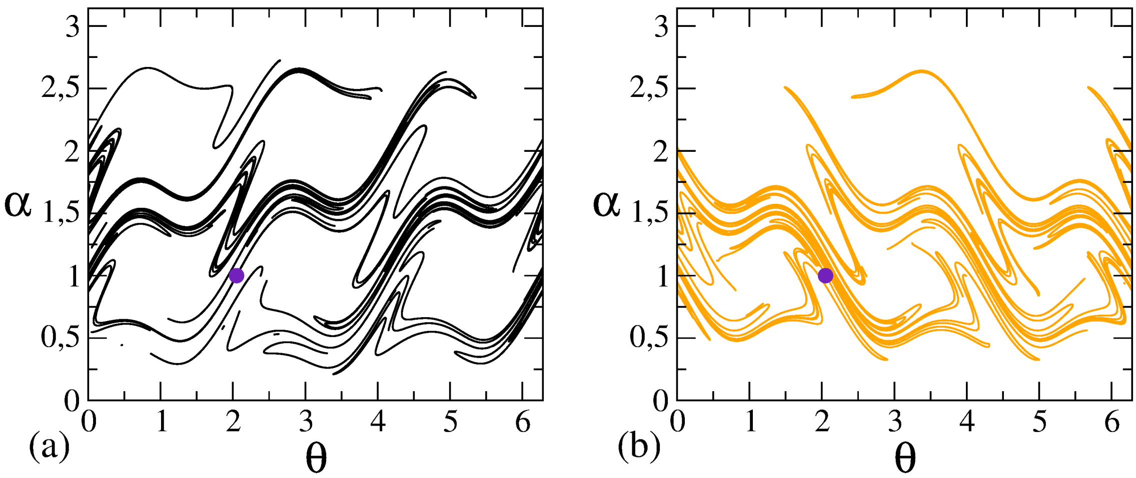

Figura 2.18: *Aproximação numérica para a construção da: (a) variedade instável e (b) a variedade estável do ponto fixo hiperbólico (roxo) localizado em* $(\theta^* \approx 2,0522, \alpha^* \approx 0,9997)$ *indicado na figura. Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,08$ *e* $p = 3$.

monstrado na Fig. 2.17(a). Uma análise cuidadosa dessa figura, revela uma mudança na tonalidade das cores na borda da região de aprisionamento, indicando que o número de colisões para o escape sofre uma redução gradativa de seu valor. Uma busca no espaço de fases pela representação da região responsável pelo aparente aprisionamento das partículas no interior do bilhar é feita na Fig. 2.17(b,c), onde foi verificado que essa região corresponde a uma cadeia de ilhas de estabilidade muito pequena embutida na região caótica do espaço de fases do bilhar. Esse resultado naturalmente indica que dadas as posições onde estão localizados os buracos h_1 e h_2, partículas com condições iniciais no interior dessa pequena cadeia de ilhas jamais irão conseguir escapar através dos orifícios do bilhar. Esse resultado acaba sendo interessante, pois através dele é possível observar que mesmo ajustando o sistema de modo a obter um escape rápido, é possível encontrar cadeias de ilhas muito pequenas no espaço de fases que podem resultar no aprisionamento de partículas no interior do modelo.

Um outro estudo interessante que pode ser desenvolvido de maneira complementar nessa seção, envolve a análise dos pontos fixos hiperbólicos do sistema. O ponto fixo hiperbólico (também conhecido como sela) é composto por direções estáveis e instáveis, de modo que o conjunto de pontos que iterativamente tende ou se afasta do ponto hiperbólico é denominado como variedade estável e instável respectivamente. Para compreender melhor o ponto fixo do tipo sela, construímos suas variedades instáveis e estáveis utilizando o método numérico conhecido como “regador” (*sprinkler method*) [55, 56]. O método consiste em dividir o espaço de fases em uma fina grade de pontos perto da região do ponto fixo hiperbólico, para que ao realizar a evolução desses pontos por n vezes, os mesmos acabem deixando a região da grade e comecem a seguir as variedades do ponto fixo, o que por sua vez gera uma boa aproximação para a construção das mesmas. As figuras 2.18(a,b) apresentam as variedade instáveis e estáveis para o ponto fixo hiperbólico (roxo) localizado em $(\theta^* \approx 2,0522, \alpha^* \approx 0,9997)$.

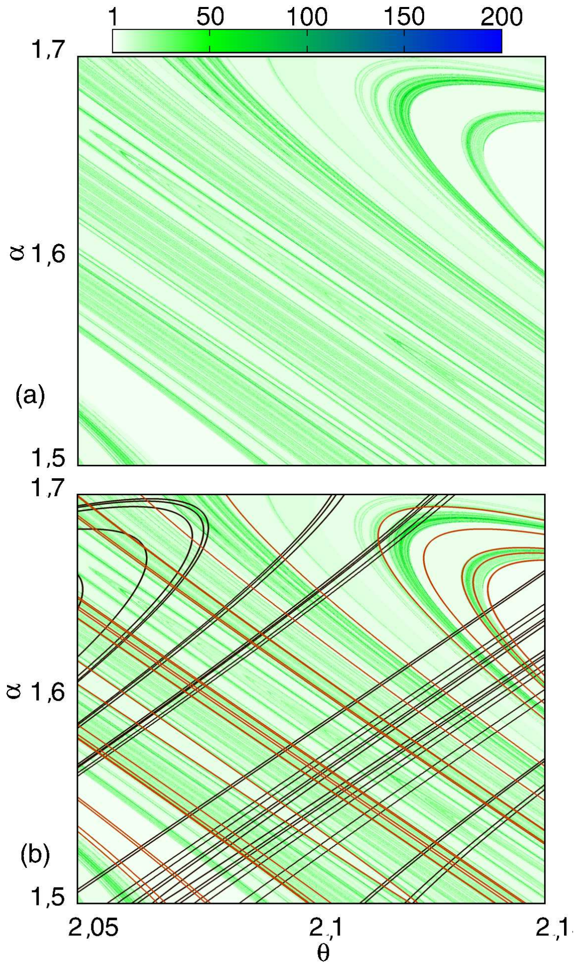

Figura 2.19: *(a) Representa uma ampliação de uma região das bacias de escape da Fig. 2.16(b), onde a escala de cor é limitada em até* 200 *colisões com a fronteira do bilhar; (b) Projeção da variedade instável (preto) e estável (laranja) sobre a bacia de escape, onde pode ser observado que as regiões de condições iniciais que levam aos maiores tempos de escape coincidem com as áreas de alta concentração de cruzamentos das variedades, ou seja, a sela caótica. Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,08$ *e* $p = 3$.

A sela caótica [56, 57] por sua vez, pode ser definida como um conjunto de pontos composto pela intersecção das variedades instáveis e estáveis do ponto fixo hiperbólico, de modo que o mapeamento desses pontos sempre leva à outros pontos da sela caótica. Deste modo, se uma condição inicial é tomada próxima de algum ponto da sela caótica, então ela pode acompanhar a variedade instável e aproximar-se de outros pontos que também pertencem à sela caótica, o que consequentemente acaba por conduzir a órbita da partícula de um lado para o outro, até que em um dado instante ela consiga finalmente se afastar desses pontos.

Logo, se alguma partícula no bilhar tem uma condição inicial dada nessa configuração, a mesma pode ocasionalmente experimentar um número maior de colisões com a fronteira até encontrar uma rota de escape para fora do bilhar.

Para tentar representar a possível influência da sela caótica no escape de partículas no modelo, foi realizado uma ampliação de uma região da Fig. 2.16(b), como apresentado na Fig.

2.19(a), com uma escala de cor limitada em até 200 colisões das partículas com a fronteira. Através dessa figura, é possível verificar que algumas das partículas que permanecem por mais tempo no interior do bilhar, experimentam aproximadamente 50 colisões até atingirem o escape. Quando realizamos a comparação entre o tempo de escape das condições iniciais dessas partículas e as regiões com maiores concentrações de cruzamentos das variedades (sela caótica) como mostrada na Fig. 2.19(b), é possível observar a proximidade entre as mesmas, o que pode justificar o atraso dessas partículas em escapar do bilhar quando comparado ao caso das mais rápidas.

Com esses resultados, finalizamos essa seção onde observamos que ao introduzir dois orifícios h_1 e h_2 na fronteira do bilhar de modo a configurar a maximização do escape, não existe uma preferência de fuga por nenhum dos dois buracos, de modo que cada um deles recebe aproximadamente metade do conjunto de partículas estudado. Verificamos também que mesmo em uma situação propícia para a maximização, é possível encontrar cadeias de ilhas de estabilidade muito pequenas embutidas em regiões predominantemente caóticas do espaço de fases, de maneira que essas cadeias podem resultar no aprisionamento de algumas partículas no interior do bilhar. Além disso, também verificamos a influência da sela caótica sobre o escape de algumas partículas no sistema em estudo. Na próxima seção, vamos finalizar esse capítulo com uma análise complementar sobre a fronteira dessas bacias de escape.

2.9 Propriedades das bacias de escape

Na seção anterior, a análise das bacias de escape proporcionaram importantes resultados na busca pela compreensão da maximização da fuga de partículas no bilhar ovóide. Através desses resultados, foi observado que as partículas não demonstram uma preferência de escape entre os orifícios h_1 e h_2 quando o sistema é configurado de maneira a exibir à maximização, ou seja, não existe uma competição entre os escapes. Entretanto, algumas propriedades estruturais sobre essas bacias, como o tipo de fronteira exibida entre h_1 e h_2, acabaram por ser ignoradas ao longo desse desenvolvimento.

Como pode ser observado na Fig. 2.20, a fronteira entre essas bacias pode ser um tanto quanto complexa, de modo que para algumas regiões, a fronteira parece exibir um comportamento bem definido, enquanto para outras, o nível de complexidade se torna tão alto que é quase impossível de se verificar por qual orifício ocorreu o escape de uma partícula. Essa dificuldade acaba acarretando em uma incerteza sobre os pontos da fronteira das bacias h_1 e h_2, e isso consequentemente pode acabar trazendo características pouco usuais para essa fronteira, como por exemplo, a fractalidade. De modo geral, uma estrutura é chamada de fractal quando apresenta propriedades relacionadas a invariância de escala e uma dimensão espacial D_0 dada por um número não inteiro [42, 57]. Com base nessas informações e observações iniciais, abrimos a última seção deste capítulo com o objetivo de realizar uma medida quantitativa sobre a incerteza dos pontos da fronteira, e a partir dela caracterizar o tipo de fronteira exibida nesse

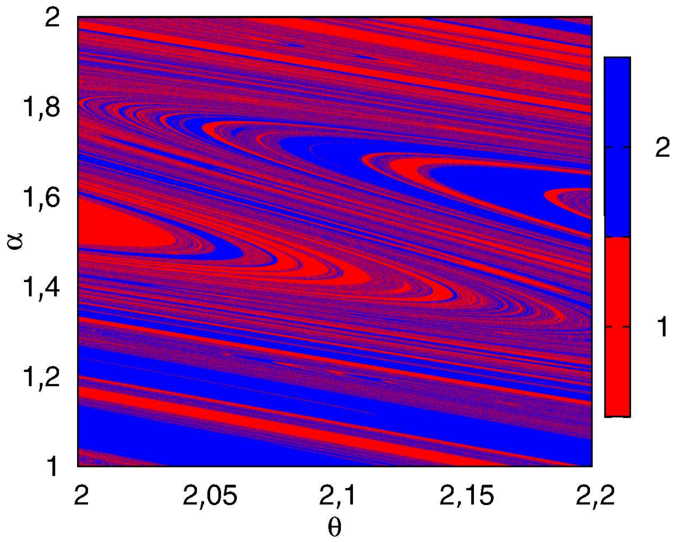

Figura 2.20: *A figura representa a ampliação de uma região das bacias de escape da Fig. 2.16(a), onde pode ser observado complexidade existente na fronteira entre as bacias dos orifícios h_1 e h_2. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.*

sistema.

Na literatura atual, a medida sobre a incerteza dos pontos de uma fronteira pode ser calculada através do método da fração de incerteza (*uncertain fraction method*) [57, 58]. Esse método consiste em tomar uma partícula de condição inicial (θ_0, α_0) e observar por qual buraco ocorre o escape. Após realizada a verificação, uma pequena perturbação I é aplicada nesta mesma condição inicial, tal como, $(\theta_0 - I, \alpha_0)$ ou $(\theta_0 + I, \alpha_0)$, e novamente verifica-se por qual orifício é registrado a fuga. No caso em que a ocorrência do escape se dá no mesmo buraco, mesmo após a perturbação da condição inicial, fica caracterizado que (θ_0, α_0) é do tipo certa. Entretanto, se depois da perturbação houver uma troca do orifício de escape, a condição inicial é dita incerta. Naturalmente, de modo a obter uma estatística robusta sobre essa incerteza em relação a um perturbação I, devemos reproduzir o processo descrito acima para um número grande de diferentes condições iniciais.

Após realização dessa análise, obtemos que dentre as N_T condições iniciais estudadas, N_i delas são do tipo incertas, logo a fração de incerteza pode ser descrita como

$$f(I) = \frac{N_i}{N_T},$$

e sua evolução em função da perturbação I pode ser estimada através de uma lei de potência do tipo

$$f(I) \sim I^{\mu}, \tag{2.51}$$

onde μ é identificado como o expoente de incerteza.

O papel desempenhado pelo expoente μ é muito importante na busca pela caracterização

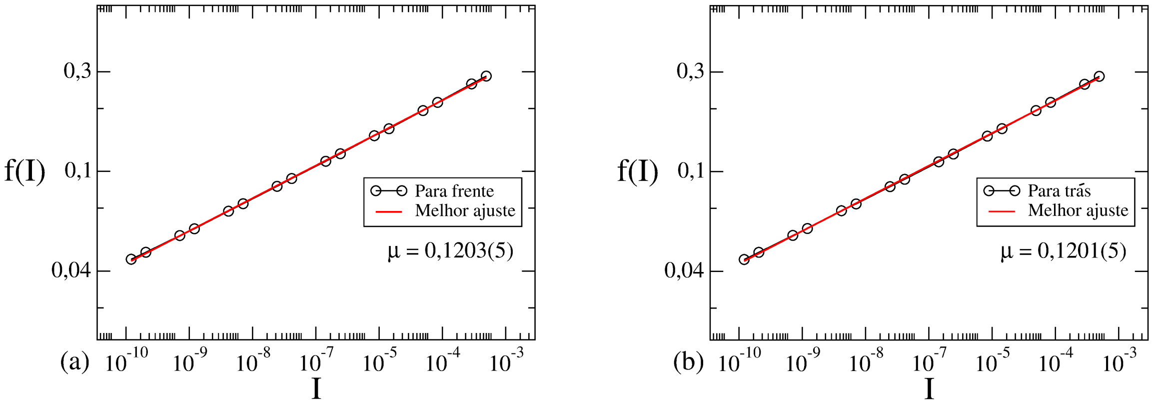

Figura 2.21: *Análise numérica do comportamento da fração de incerteza em função de perturbações I aplicadas em (a) iterações para frente e (b) iteração para trás. Para o primeiro caso o expoente de incerteza assume um valor de $\mu = 0,1203(5)$, enquanto que para a segunda situação $\mu = 0,1201(5)$. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$ e $p = 3$.*

do tipo de fronteira exibida entre as bacias, pois dependendo do valor assumido por ele, as propriedades e características observadas na fronteira acabam sendo totalmente distintas. A classificação para o expoente de incerteza é feita de modo que, para $\mu = 1$ a fronteira é tida como lisa, o que em outras palavras pode ser interpretado como a ausência de propriedades fractais. Contudo, se o valor assumido pelo expoente pertencer ao intervalo $0 < \mu < 1$, temos que a fronteira das bacias é do tipo fractal.

O resultado da análise feita para μ ao longo da Fig. 2.20, é apresentado na Fig. 2.21(a,b), onde o valor do expoente foi obtido através de um ajuste numérico adequado. A figura 2.21(a,b) demonstra que para as iterações realizadas para frente, o expoente de incerteza assume o valor de $\mu = 0,1203(5)$, enquanto que no caso de iterações para trás temos um $\mu = 0,1201(5)^{\dagger}$.

Como um resultado complementar, é possível estimar o valor dimensão D_0 da fronteira através da relação [58]

$$\mu \quad = \quad D - D_0, \tag{2.52}$$

onde D representa a dimensão do conjunto estudado, que no caso das bacias de escape é $D = 2$.

Com base nos resultados numéricos obtidos para o expoente de incerteza μ e com o auxílio da Eq. (2.52), verificamos que a dimensão da fronteira das bacias de escape para o bilhar ovóide tem um valor estimado de $D_0 = 1,8798(5)$, o que corrobora com o esperado para uma estrutura fractal.

Com esses resultados, fechamos essa seção onde foram discutidas algumas características envolvidas na estrutura das bacias de escape para o bilhar ovóide. Observamos que devido a complexidade exibida na fronteira dessas bacias, é difícil definir por qual orifício ocorre o

†As iterações para frente são aquelas feitas quando a perturbação I é aplicado sobre a condição inicial de forma $(\theta_0 + I, \alpha_0)$, enquanto que as iterações para trás são do tipo $(\theta_0 - I, \alpha_0)$.

escape de uma partícula com uma condição inicial próxima a essa região. Essa dificuldade, por sua vez, acarretou em uma incerteza sobre os pontos dessa fronteira, levando a mesma a exibir um comportamento fractal.

Capítulo 3

Bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo

3.1 Resumo

Este capítulo será dedicado ao estudo do modelo do bilhar ovóide quando uma perturbação temporal é introduzida em sua fronteira. Inicialmente, demonstramos as etapas envolvidas na construção do mapeamento quadrimensional não-linear, que será responsável por descrever a evolução de uma partícula no interior do bilhar. Através das oscilações provenientes da parede móvel, no instante de cada colisão as partículas podem ganhar ou perder pequenas porções de energia, o que pode diante de algumas condições específicas, levar as partículas a exibirem um crescimento ilimitado da energia média conhecido como Aceleração de Fermi. Ao longo das seções, verificamos a presença desse fenômeno de difusão ilimitada e investigamos todas as características e mecanismos envolvidos nesse processo, inclusive as alternativas para que esse ganho ilimitado da energia média por parte das partículas seja suprimido. Por último, apresentamos uma conexão entre os resultados discutidos no modelo do bilhar ovóide dependente do tempo com alguns conceitos ligados à Termodinâmica.

3.2 Modelo e mapeamento

Nesta seção, vamos investigar os efeitos da introdução de uma perturbação paramétrica no modelo do bilhar ovóide, de modo a levar o sistema a exibir uma oscilação periódica de sua fronteira. Com base no modelo estudado na Seção (2.2), o raio que descreve a forma da fronteira do bilhar ovóide no caso estático, é dado por

$$R(\theta, \epsilon, p) = 1 + \epsilon \cos(p\theta).$$

Ao introduzir uma perturbação temporal no parâmetro ϵ, de forma que $\epsilon \mapsto \epsilon[1 + a\cos(t)]$,

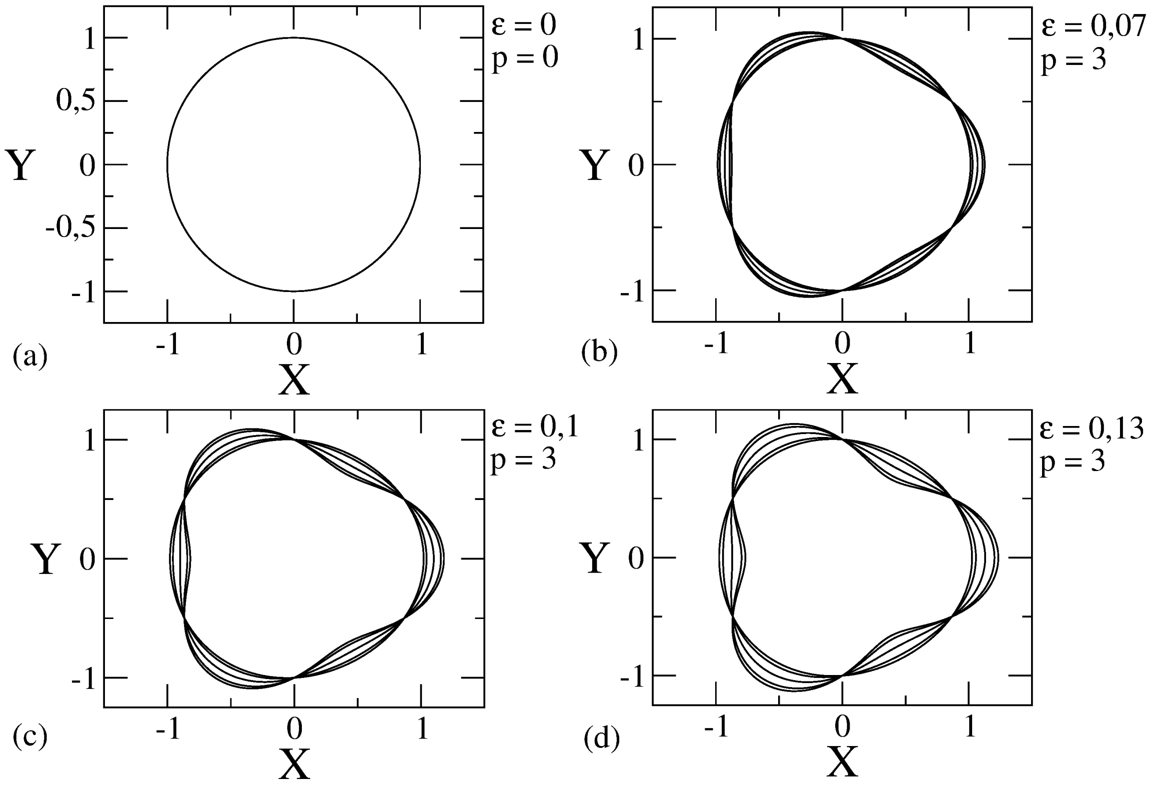

Figura 3.1: *Esboço de algumas formas geométricas da fronteira, para* $a = 0,8$*: (a)* $\epsilon = 0$ *e* $p = 0$*; (b)* $\epsilon = 0,07$ *e* $p = 3$*; (c)* $\epsilon = 0,1$ *e* $p = 3$*; (d)* $\epsilon = 0,13$ *e* $p = 3$*. O eixo horizontal representa* $X(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\cos(\theta_n)$ *e vertical* $Y(\theta_n) = R_f(\theta, \epsilon, p, t)\,\mathrm{sen}(\theta_n)$.

podemos expressar o novo formato do raio da fronteira R_f como sendo

$$R_f(\theta, \epsilon, p, t) = 1 + \epsilon[1 + a\cos(t)]\cos(p\theta), \tag{3.1}$$

onde a representa a amplitude de oscilação da fronteira.

Assim como verificado para o caso estático, se $\epsilon = 0$ recuperamos o formato do bilhar circular com fronteira estática, enquanto que para $\epsilon \neq 0$ e uma amplitude de oscilação da fronteira igual a zero, recuperamos o formato do bilhar ovóide estático. A figura 3.1, apresenta uma ilustração das diversas formas geométricas que a fronteira do bilhar pode assumir dadas diferentes configurações dos parâmetros de controle. Uma importante observação que deve ser feita com respeito à perturbação temporal introduzida é que ela leva o bilhar a exibir uma geometria do tipo *não breathing*. Geometrias desse tipo são aquelas que preservam a medida da área interna do bilhar ao passo que a forma de sua fronteira não se preserva. De modo similar, as geometrias do tipo *breathing* são aquelas que só apresentam a preservação da forma da fronteira [44]. A figura 3.1 ilustra essa característica *não breathing* do sistema para diferentes valores da perturbação ϵ.

A introdução da perturbação temporal na fronteira acarreta na adição de duas novas variáveis

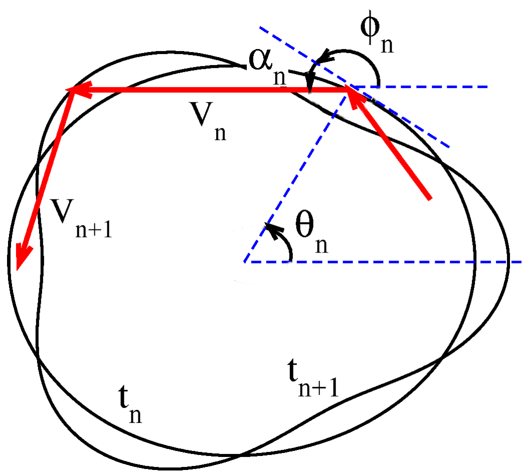

Figura 3.2: *Ilustração da trajetória de uma partícula (vermelho) entre duas colisões sucessivas no interior do bilhar ovóide com perturbação do tipo não breathing.*

dinâmicas no sistema, sendo elas o módulo da velocidade da partícula V e o tempo t. Sendo assim, procuramos uma transformação $\tilde{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que, $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1}) = \tilde{A}(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$. A figura 3.2 apresenta o esboço da trajetória de uma partícula no interior do bilhar ovóide perturbado, onde V_n indica o módulo da velocidade da partícula no tempo t_n, enquanto os ângulos α_n, θ_n e ϕ_n representam as mesmas quantidades estudadas no caso estático do bilhar. Com base nessas informações, podemos escrever as componentes retangulares da posição da partícula em termos de coordenadas polares, como sendo

$$\begin{aligned} X(\theta_n, t_n) &= R_f(\theta_n, \epsilon, p, t_n)\cos(\theta_n), \\ X(\theta_n, t_n) &= [1 + \epsilon[1 + a\cos(t_n)]\cos(p\theta_n)]\cos(\theta_n), \end{aligned} \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned} Y(\theta_n, t_n) &= R(\theta_n, \epsilon, p, t_n)\,\mathrm{sen}(\theta_n), \\ Y(\theta_n, t_n) &= [1 + \epsilon[1 + a\cos(t_n)]\cos(p\theta_n)]\,\mathrm{sen}(\theta_n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Após definir as posições angulares θ_n e α_n, podemos medir o ângulo feito no ponto de colisão da partícula com a fronteira, através da relação

$$\phi_n = \mathrm{arctg}\left[\frac{Y'(\theta_n, t_n)}{X'(\theta_n, t_n)}\right], \tag{3.4}$$

onde $X'(\theta_n, t_n)$ e $Y'(\theta_n, t_n)$ são as derivadas primeiras das coordenadas retangulares $X(\theta_n, t_n)$ e $Y(\theta_n, t_n)$ em relação a θ_n, que por sua vez podem ser expressas por

$$X'(\theta_n, t_n) = \frac{dX(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n}\cos(\theta_n) - R_f(\theta_n, t_n)\,\mathrm{sen}(\theta_n), \tag{3.5}$$

$$Y'(\theta_n, t_n) = \frac{dY(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = \frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} \operatorname{sen}(\theta_n) + R_f(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n), \tag{3.6}$$

com

$$\frac{dR_f(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p[1 + a\cos(t)] \operatorname{sen}(p\theta_n). \tag{3.7}$$

Como as quantidades angulares de θ_n e α_n são fornecidas, a inclinação da trajetória em relação ao eixo positivo das abscissas pode ser expressa por $\operatorname{tg}(\phi_n + \alpha_n)$, o que leva o vetor velocidade da partícula a ser dado por

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)\hat{\jmath}], \tag{3.8}$$

onde $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são os versores dos eixos X e Y respectivamente. Como o módulo da velocidade inicial da partícula também é conhecido, podemos descrever a evolução da trajetória desta mesma partícula em termos das componentes retangulares X_p e Y_p como sendo

$$X_p(t) = X(\theta_n) + |\vec{V}_n| \cos(\phi_n + \alpha_n)[t - t_n], \tag{3.9}$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n) + |\vec{V}_n| \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)[t - t_n], \tag{3.10}$$

onde a medida da distância da partícula em relação a origem do sistema pode ser definida através da equação

$$R_p = \sqrt{X_p^2(t) + Y_p^2(t)}. \tag{3.11}$$

Desta forma, a condição que identifica o instante em que ocorreu uma colisão da partícula com a fronteira é dado por $R_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1})$, o que consequentemente também acaba por revelar o valor do ângulo θ no ponto de colisão $n + 1$. O procedimento para resolver essa equação corresponde em acompanhar numericamente a trajetória da partícula iterativamente ao longo do tempo, sempre verificando a condição de colisão do sistema. Em nossas simulações, a condição de colisão era atingida quando o raio da fronteira e o raio da partícula diferiam por uma precisão de 10^{-12}.

Conhecendo θ_{n+1}, podemos estimar os tempos subsequentes de colisão da partícula através da equação

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{[\triangle X(\theta)]^2 + [\triangle Y(\theta)]^2}}{|\vec{V}_n|}, \tag{3.12}$$

onde

$$\triangle X(\theta) = X_p(\theta_{n+1}) - X(\theta_n),$$

$$\triangle Y(\theta) = Y_p(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n).$$

Como o tempo na colisão $n+1$ pode ser estabelecido através da Eq. (3.12), podemos encontrar a expressão que indica a velocidade da fronteira no instante t_{n+1} através das derivações das Eq. (3.2) e Eq. (3.3), como observado em

$$\vec{V}_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = \frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}}[\cos(\theta_{n+1})\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta_{n+1})\hat{\jmath}], \tag{3.13}$$

onde

$$\frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} = -a\epsilon \operatorname{sen}(\theta_{n+1}) \cos(p\theta_{n+1}). \tag{3.14}$$

Uma vez conhecido θ_{n+1}, podemos estimar o ângulo ϕ_{n+1} através da Eq. (3.4) e determinar os vetores tangente $\vec{T}$ e normal $\vec{N}$ no ponto de colisão $n+1$ como sendo

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\phi_{n+1})\hat{\jmath}, \tag{3.15}$$
$$\vec{N}_{n+1} = -\operatorname{sen}(\phi_{n+1})\hat{\imath} + \cos(\phi_{n+1})\hat{\jmath}. \tag{3.16}$$

Com base nesses dados, encontramos a componente tangencial do vetor velocidade da partícula imediatamente antes da colisão em θ_{n+1} como sendo

$$\vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} = |\vec{V}_n|[\cos(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)\operatorname{sen}(\phi_{n+1})], \tag{3.17}$$

enquanto que a componente normal da velocidade é dada por

$$\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} = |\vec{V}_n|[-\cos(\phi_n + \alpha_n)\operatorname{sen}(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1})]. \tag{3.18}$$

No momento em que ocorre a colisão da partícula com a fronteira, as seguintes leis de reflexão devem ser satisfeitas

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \xi \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}, \tag{3.19}$$
$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\kappa \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1}, \tag{3.20}$$

onde $\vec{V}'$ indica a velocidade da partícula medida no referencial da fronteira, enquanto que $\xi \in [0,1]$ e $\kappa \in [0,1]$ são os coeficientes de restituição nas componentes tangencial e normal à fronteira do bilhar. Note que para o caso em que $\xi = \kappa = 1$, temos a situação de colisões elásticas no bilhar, o que implica em ausência de perda fracional de energia por parte da partícula no instante de impacto ocorre. Entretanto, para realizar o cálculo da velocidade da partícula após a colisão com a parede móvel, é necessário recorrer à conservação do *momentum* no referencial móvel da fronteira do bilhar.

Com o auxílio da Fig. 3.3, podemos tirar as seguintes conclusões

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}',$$

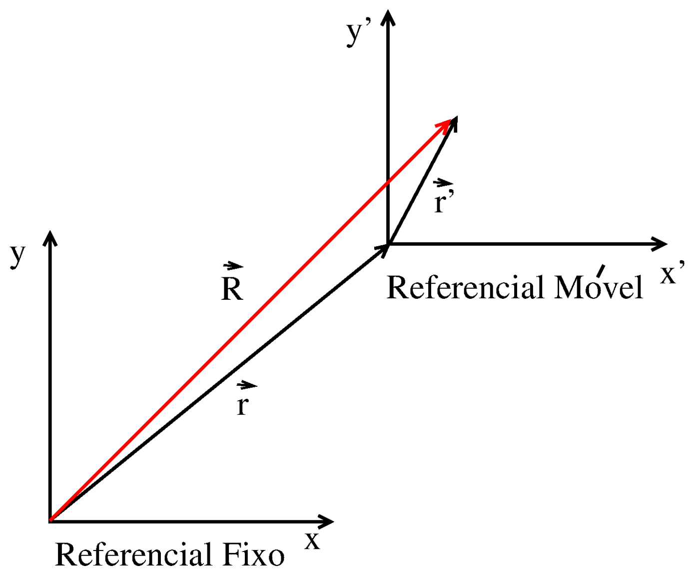

Figura 3.3: *Ilustração esquemática sobre o referencial móvel e fixo.*

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \\
\frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}, \\
\vec{V}'_p &= \vec{V}_p - \vec{V}_f,
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

onde $\vec{R}$ é definido como a posição da partícula medida no referencial fixo, $\vec{r}'$ é o vetor posição da partícula medido no referencial móvel e $\vec{r}$ é a distância entre os dois referenciais. As quantidades $\vec{V}_p$, $\vec{V}'_p$ e $\vec{V}_f$ são, respectivamente, a velocidade da partícula no referencial fixo, móvel e a velocidade da fronteira. Sendo assim, recorrendo às leis de reflexão, temos que a componente tangencial da velocidade no referencial fixo é dado por

$$
\begin{aligned}
\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} &= \xi \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}, \\
(\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_f) \cdot \vec{T}_{n+1} &= \xi (\vec{V}_n - \vec{V}_f) \cdot \vec{T}_{n+1}, \\
\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} &= \xi \vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} + (1-\xi)\vec{V}_f \cdot \vec{T}_{n+1},
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} &= \xi |\vec{V}_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n)\cos(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n)\operatorname{sen}(\phi_{n+1})] + \\
&+ (1-\xi)\vec{V}_f \cdot \vec{T}_{n+1},
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

e

$$
\vec{V}_f \cdot \vec{T}_{n+1} = \frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} [\cos(\theta_{n+1})\cos(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\theta_{n+1})\operatorname{sen}(\phi_{n+1})], \tag{3.24}
$$

enquanto que a componente normal da velocidade também no referencial em repouso pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= -\kappa \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1}, \\
(\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_f) \cdot \vec{N}_{n+1} &= -\kappa (\vec{V}_n - \vec{V}_f) \cdot \vec{N}_{n+1}, \\
\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= -\kappa \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1+\kappa) \vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= \kappa |\vec{V}_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \operatorname{sen}(\phi_{n+1}) - \operatorname{sen}(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1})] + \\
&+ (1+\kappa) \vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1} = \frac{dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} [-\cos(\theta_{n+1}) \operatorname{sen}(\phi_{n+1}) + \operatorname{sen}(\theta_{n+1}) \cos(\phi_{n+1})], \tag{3.27}$$

sendo $dR_f(\theta_{n+1}, t_{n+1})/dt_{n+1}$ dado pela Eq. (3.14).

Finalmente, tomando o módulo da velocidade após a colisão, temos que

$$|\vec{V}_{n+1}| = \sqrt{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}]^2 + [\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}]^2}, \tag{3.28}$$

onde o ângulo α_{n+1} da partícula é dado por

$$\alpha_{n+1} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}} \right]. \tag{3.29}$$

De maneira resumida, podemos dizer que o mapeamento $\tilde{A}$ consiste na resolução do seguinte conjunto de equações

$$\tilde{A} : \begin{cases}
R_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1}) \\
t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{[\triangle X(\theta)]^2 + [\triangle Y(\theta)]^2}}{|\vec{V}_n|} \\
|\vec{V}_{n+1}| = \sqrt{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}]^2 + [\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}]^2} \\
\alpha_{n+1} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}} \right]
\end{cases} . \tag{3.30}$$

Com base nesta descrição, finalizamos essa seção onde descrevemos todo o formalismo envolvido no mapeamento de uma partícula no interior de um bilhar ovóide, cuja fronteira tem uma perturbação temporal do tipo *não breathing*. Na próxima seção, vamos utilizar desse formalismo para estudar e caracterizar o fenômeno da difusão ilimitada de energia no sistema conhecida como Aceleração de Fermi.

3.3 Aceleração de Fermi

O fenômeno da Aceleração de Fermi (AF) está associado ao crescimento ilimitado de energia exibido por partículas que estão sujeitas à interações com potenciais oscilantes. O conceito da Aceleração de Fermi foi originalmente proposto em 1949, pelo físico italiano Enrico Fermi [37] numa tentativa de explicar as altas energias que partículas cósmicas adquiriam ao interagirem com campos magnéticos oscilantes no espaço interestelar.

No contexto de sistemas dinâmicos, a Aceleração de Fermi está definida como sendo o crescimento ilimitado da energia média que um ensemble de partículas não-interagentes experimenta ao sofrer diversas colisões elásticas com uma parede ou fronteira móvel. Recentemente, com o avanço da computação científica, o fenômeno da Aceleração de Fermi vem sendo amplamente investigado em diversos tipos de sistemas dinâmicos, sendo a modelagem de bilhares clássicos dependentes do tempo [59, 60, 61] a mais promissora.

Um questionamento simples mas extremamente motivador no estudo da Aceleração de Fermi em bilhares nos últimos anos, foi a descrição das condições necessárias para se levar um conjunto de partículas não-interagentes a exibir o crescimento ilimitado da energia média. Apesar de parecer trivial, o caminho para a obtenção dessa resposta se mostrou muito mais complexo do que se esperava, e apenas no ano 2000 uma resposta parcial foi obtida através da conjectura LRA (Loskutov-Rayabov-Akinshin) [14, 15]. Essa conjectura diz que *"Dinâmica caótica em bilhares com fronteira estática é condição suficiente para a observação da AF quando uma perturbação temporal na fronteira é introduzida"*.

A verificação da conjectura LRA foi feita através de diversos testes em modelos de bilhares, como no bilhar circular [62], o caso concêntrico do bilhar anular [63], entre outros. Contudo, no ano de 2008, Lenz e colaboradores, demonstraram que um bilhar elíptico, que é integrável em sua versão estática e tem seu espaço de fases composto por um conjunto de curvas invariantes *spanning* e ilhas de estabilidade, exibia Aceleração de Fermi ao se introduzir uma dependência temporal em sua fonteira [59]. Embora esse fato contrarie a conjectura LRA, é importante ressaltar que esse reultado não a desqualifica, uma vez que o mesmo apenas demonstra uma incompletude por parte da teoria. Uma extensão a conjectura foi proposta por Leonel e Bunimovich no ano de 2010, onde os autores sugerem que a substituição de caos no espaço de fases estático por órbitas heteroclínicas seria um possível caminho para a observação da Aceleração de Fermi nos bilhares, uma vez que essa extensão conecta os antigos resultados verificados pela conjectura e também os encontrados no bilhar elíptico [60].

Com base nessas informações obtidas na literatura, nessa seção propomos o estudo e a verificação do fenômeno da Aceleração de Fermi no modelo do bilhar ovóide dependente do tempo discutido na Seção (3.2). Para isso tomamos um ensemble de condições iniciais dis-

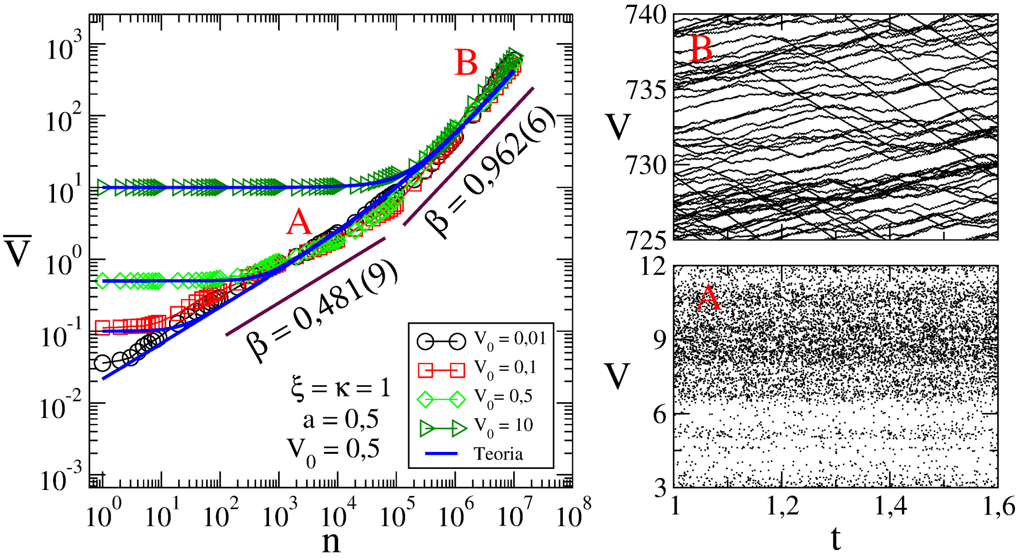

Figura 3.4: *Esboço do comportamento de* $\overline{V}$ $vs.\ n$ *para diferentes velocidades iniciais indicadas na figura. Três diferentes regimes podem ser identificados na figura. Para grandes velocidades, observamos um platô dominante para a dinâmica de poucas colisões. Após um primeiro crossover, a velocidade média começa a crescer seguindo uma lei de potência do número de colisões* n*, difundindo a velocidade com um expoente de crescimento* $\beta = 0,481(9)$. *Após um segundo crossover, a difusão da velocidade média passa a ser dada por um expoente* $\beta = 0,962(6)$. *Os painéis a direita representam porções do espaço* (V, t)*, onde* A *identifica o comportamento ao longo da difusão normal e* B *o regime super difusivo. Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,5$, $\kappa = 1$ *e* $\xi = 1$.

tribuídas aleatoriamente em $t_0 \in [0, 2\pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\alpha_0 \in [0, \pi]$ para uma velocidade inicial em módulo V_0 fixada, onde nosso objetivo é avaliar a evolução da média do módulo da velocidade das partículas conforme o número de colisão n é aumentando.

A expressão que descreve o cálculo da média do módulo das velocidades do ensemble é dado por

$$\overline{V} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|\vec{V}|_{i,j}, \tag{3.31}$$

onde o primeiro somatório corresponde a uma média ao longo do ensemble de M partículas e o segundo a uma média ao longo de $n+1$ colisões de cada órbita.

A figura 3.4 apresenta os comportamentos para a média do módulo de velocidade em função do número de colisões n, para um conjunto de $M = 10^6$ partículas que experimentam 10^7 colisões com a fronteira, onde cada curva foi evoluída a partir de um módulo de velocidade inicial V_0 diferente. Três comportamentos podem ser observados a partir da análise de $\overline{V}$ $vs.\ n$. Se o módulo da velocidade inicial V_0 dos ensembles é grande†, as curvas de velocidade média inicialmente exibem um platô que tem seu tamanho diretamente ligado ao valor de V_0. Após um primeiro *crossover*, observamos uma mudança de comportamento em $\overline{V}$ de modo que o perfil

†V_0 grande (baixo) é aquele considerado acima (abaixo) da amplitude da velocidade da fronteira $a\epsilon$, dada pela Eq. (3.13).

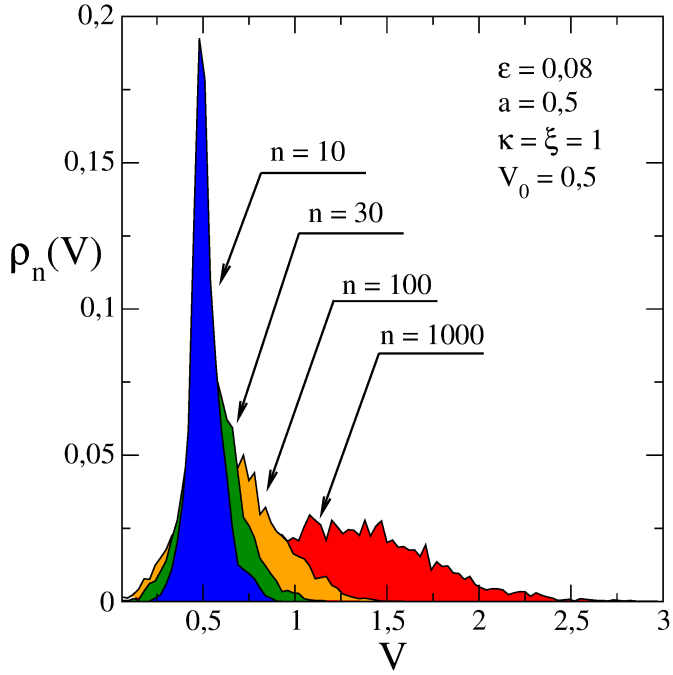

Figura 3.5: *Descrição da evolução da distribuição do módulo das velocidades $\rho_n(V)$ para um ensemble de partículas com $V_0 = 0,5$ após diferentes números de colisões n. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,5$, $\kappa = 1$ e $\xi = 1$.*

constante da curva é substituído por um regime de crescimento. Esse regime de crescimento é descrito por uma lei de potência do número de colisões n com um expoente $\beta = 0,481(9)$, que é tipicamente chamado de difusão normal [61]. Após um segundo *crossover*, observamos uma nova mudança no regime de crescimento da velocidade média do sistema, onde agora $\overline{V}$ continua a crescer seguindo uma lei de potência, porém, com expoente $\beta = 0,962(6)$ que chamaremos de super difusivo.

Os resultados acima evidenciam o fenômeno da Aceleração de Fermi no modelo do bilhar ovóide *não breathing*, fato esse já previsto pela conjectura LRA. Contudo, alguns questionamentos naturais sobre o fenômeno permanecem: *Qual o mecanismo responsável por levar o sistema a exibir a Aceleração de Fermi? Qual o motivo da transição da difusão normal para a super difusão?*

Para tentar responder o primeiro questionamento, vamos estudar o processo de difusão da velocidade das partículas no interior do bilhar, olhando para distribuição do módulo de velocidade das partículas $\rho_n(V)$ ao longo das colisões n, como mostrado na Fig. 3.5. Considerando que todas as partículas do ensemble iniciam suas trajetórias no interior do bilhar com posições e direções aleatórias, podemos supor, sem perda de generalidade, que a cada colisão com a fronteira móvel, as partículas podem ganhar ou perder velocidade em módulo, assim como podem seguir trajetórias completamente diferentes umas das outras. Logo, dado uma colisão para o ensemble completo com a fronteira do bilhar, temos aproximadamente o mesmo número de partículas ganhando e perdendo velocidade em módulo, o que leva a velocidade média do conjunto a não sofrer grandes alterações. Contudo, embora esse processo se repita por várias vezes, ele não ocorre de maneira indefinida, uma vez que as partículas podem aumentar suas velocidades em módulo de forma ilimitada, enquanto que o oposto não é necessariamente verdadeiro. Observando cuidadosamente o modelo estudado, podemos ver que o módulo da velocidade mínima que uma partícula pode experimentar é $V_{min} = 0$, implicando que ao atingir esse limite, na próxima colisão a partícula deve ganhar energia. Quando uma partícula atinge V_{min}, ocorre o fenômeno de quebra na simetria da difusão do módulo das velocidades no sistema [64]. Após um número grande de partículas atingirem V_{min}, o bilhar passa a ter mais partículas ganhando energia do que perdendo, o que consequentemente leva a média do módulo de velocidade do ensemble a ter seu valor aumentado. O momento em que ocorre a quebra da simetria na difusão do módulo das velocidades, pode ser conectado com o primeiro *crossover* da Fig. 3.4, que marca o fim do regime de platô e o início da difusão normal no sistema.

A figura 3.5 mostra a evolução da distribuição do módulo de velocidades para um conjunto de partículas aleatórias com velocidade inicial fixada em $V_0 = 0,5$. Podemos observar que após 10 colisões, a distribuição ainda não atingiu o limite inferior V_{min}, o que leva consequentemente a $\overline{V} \approx V_0$. Entretanto, após a colisão de ordem 100, a simetria de $\rho_n(V)$ já foi quebrada, acarretando então na elevação da média do conjunto.

Em relação ao segundo questionamento levantado sobre a transição dos regimes de difusão normal $\beta \sim 1/2$ e de super difusão $\beta \sim 1$, estudamos o comportamento do módulo da velocidade de uma partícula em função da fase da fronteira oscilante no instante de uma colisão, ou em outras palavras, um espaço (V, t). A figura 3.4 exibe dois painéis ao lado direito, onde são apresentados os comportamentos do espaço (V, t) para uma partícula no regime de difusão normal e também para o super difusivo. O painel A que representa o caso da difusão normal, apresenta uma total descorrelação entre o módulo da velocidade da partícula e a fase da parede. Esse comportamento é justificável pelo fato de que entre duas colisões sucessivas com a fronteira móvel, a partícula tem um tempo de voo relativamente longo, o que faz com que a parede oscile várias vezes, criando assim uma descorrelação no sistema. Porém, quando levamos em consideração o caso super difusivo apresentado no painel B, a partícula experimenta módulos de velocidades elevados quando comparados ao caso anterior. Nessa situação o tempo de voo da partícula é reduzido, o que gera uma correlação em (V, t). Esses resultados sugerem que as correlações em sistemas oscilantes podem estar ligadas à observação de processos super difusivos, enquanto a descorrelação está conectada a processos de difusão normal, também conhecidos como processos do tipo *random walk* [65, 66, 67].

Dado que o fenômeno da Aceleração de Fermi teve seus aspectos discutidos e descritos de forma ampla pelo ponto de vista numérico, vamos agora tentar encontrar uma aproximação analítica utilizando as equações do modelo do bilhar ovóide *não breathing*, de modo que elas descrevam os comportamentos observados ao longo das curvas de $\overline{V}$ $vs.$ n. Para isso, vamos por hipótese supor que o módulo da velocidade $\tilde{V}$ de uma partícula após uma dada colisão com a parede do bilhar pode ser descrita como

$$\tilde{V}(\alpha,\theta,t,V) = V + \zeta(\alpha,\theta,t,V), \tag{3.32}$$

onde V é o módulo da velocidade da partícula no instante anterior à colisão com a fronteira e $\zeta(\alpha,\theta,t,V)$ representa a contribuição da fronteira móvel no instante da colisão. Partindo disso, podemos descrever a média do módulo das velocidades para um ensemble de condições iniciais como sendo

$$\overline{V_{n+1}} = \overline{V_n} + \delta\overline{V_n}, \tag{3.33}$$

onde

$$\overline{V_n} = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi V\mathcal{F}_n(\alpha,\theta,t,V)d\alpha d\theta dt dV, \tag{3.34}$$

$$\delta\overline{V_n} = \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \zeta(\alpha,\theta,t,V)\mathcal{F}_n(\alpha,\theta,t,V)d\alpha d\theta dt dV, \tag{3.35}$$

com $\mathcal{F}_n(\alpha,\theta,t,V)$ representando a função de distribuição do espaço de fases na colisão n, que por hipótese, pode ser fatorada da forma

$$\mathcal{F}_n(\alpha,\theta,t,V) = F(\theta,\alpha)\rho_V(t)\rho_n(V), \tag{3.36}$$

tal que $F(\alpha,\theta)$ é a distribuição das variáveis $\alpha-\theta$, $\rho_V(t)$ é a distribuição de fase de colisão e $\rho_n(V)$ é distribuição do módulo de velocidades.

Para obter o perfil numérico das distribuições das variáveis angulares e de fase de colisão, tomamos uma condição inicial aleatória com V_0 definido e a deixamos evoluir por 10^7 colisões com a fronteira do bilhar, sendo que a cada colisão armazenamos as informações referentes as variáveis (α,θ,t). Após o término desse procedimento, montamos um histograma com os dados obtidos, afim de identificar as regiões mais ou menos visitadas referentes a cada uma das variáveis dinâmicas analisadas. A figura 3.6(a-d) apresenta o perfil dos histogramas que serão utilizados como as distribuições $F(\alpha,\theta)$ e $\rho_V(t)$, conforme variamos o parâmetro da amplitude de oscilação da fronteira a. Esses dados nos mostram que a distribuição $F(\alpha,\theta)$ além de ser independente do índice n, também é determinada basicamente pela geometria do bilhar ovóide estático ($a=0$) e que ela quase não é afetada pelas oscilações da fronteira. Por outro lado, a distribuição de fases de colisão $\rho_V(t)$ exibe uma dependência com o módulo da velocidade inicial, porém, não com o índice n. É importante mencionar que com respeito à distribuição do módulo de velocidades, $\rho_n(V)$ apresenta uma dependência com V_0 e também com o índice n, como ficou claro durante a descrição do mecanismo da Aceleração de Fermi.

Com base nesses dados, definimos uma quantidade chamada de média parcial, tal que

$$U(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \zeta(\alpha,\theta,t,V)F(\theta,\alpha)\rho_V(t)d\alpha d\theta dt, \tag{3.37}$$

de modo que assim podemos obter uma expressão compacta para a descrição da variação $\delta\overline{V_n}$

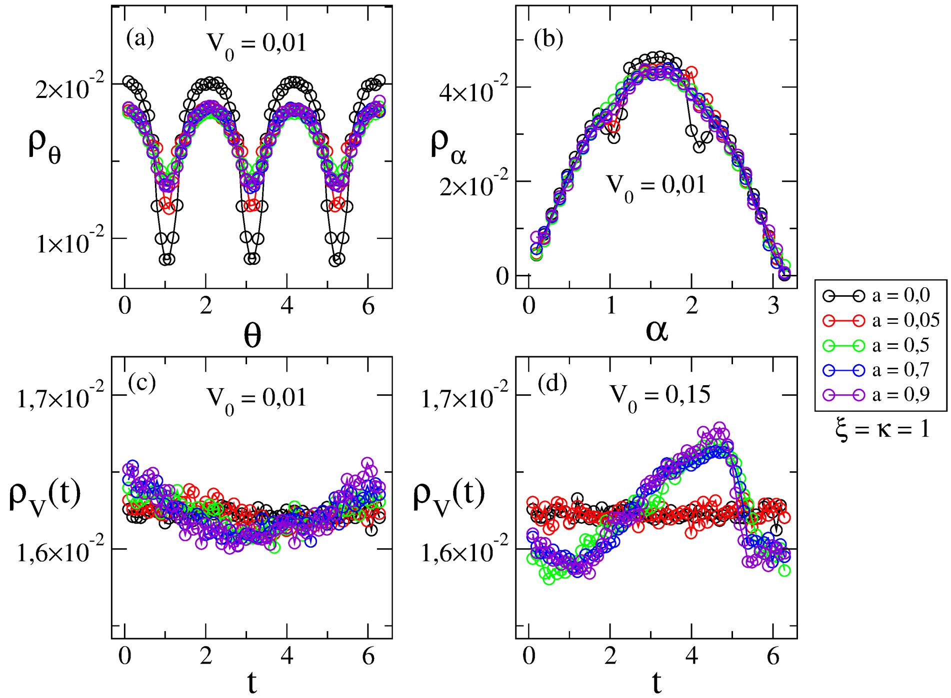

Figura 3.6: *(a,b) Perfil numérico da distribuição de ângulos $F(\alpha, \theta)$. Podemos notar que $F(\alpha, \theta)$ é determinada pela geometria estática $(a = 0)$ do bilhar ovóide; (c,d) Perfil numérico da distribuição de fase de colisão $\rho_V(t)$. Observarmos que para um valor pequeno de V_0 a distribuição $\rho_V(t)$ apresenta um perfil do tipo homogêneo, enquanto que para um valor grande de V_0 a distribuição sofre uma transformação de modo a exibir uma forma do tipo não homogênea. Essa transformação pode ser justificada como uma consequência do surgimento de correlações no sistema. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,9$, $\kappa = 1$ e $\xi = 1$.*

como sendo

$$\delta\overline{V_n} \;=\int_0^\infty \;\rho_n(V)U(V)dV. \tag{3.38}$$

Agora, vamos considerar uma expansão em segunda ordem da média parcial $U(V)$ em torno de $\overline{V_n}$ da distribuição de módulo de velocidades $\rho_n(V)$, tal que

$$U(V) \approx U(\overline{V_n}) + U'(\overline{V_n})(V - \overline{V_n}) + \frac{1}{2}U''(\overline{V_n})(V - \overline{V_n})^2, \tag{3.39}$$

e seguidamente vamos introduzir essa expansão na Eq. (3.38), que nos levará a uma aproximação em segunda ordem da variação $\delta\overline{V_n}$ da velocidade média, ou seja

$$\delta\overline{V_n} = U(\overline{V_n}) + \frac{1}{2}U''(\overline{V_n})(\overline{V_n^2} - \overline{V_n}^2). \tag{3.40}$$

É interessante notar que a aproximação feita na Eq. (3.39) se torna fraca conforme nos afastamos da média da distribuição. Contudo, $\rho_n(V)$ contribui muito pouco onde a expansão em série de Taylor da média parcial $U(V)$ é menos acurada, uma vez que $\rho_n(V)$ decai a zero para valores grandes e pequenos de V.

Substituindo a Eq. (3.40) na Eq. (3.33), nós obtemos uma aproximação em segunda ordem que descreve o comportamento de $\overline{V_{n+1}}$ como sendo

$$\overline{V_{n+1}} = \overline{V}_n + U(\overline{V}_n) + \frac{1}{2}U''(\overline{V}_n)(\overline{V_n^2} - \overline{V_n}^2), \tag{3.41}$$

onde podemos observar uma dependência de $\overline{V_{n+1}}$ com a velocidade quadrática média $\overline{V_n^2}$.

Uma aproximação para a evolução da velocidade quadrática média, pode ser encontrada seguindo um raciocínio semelhante ao feito acima. Novamente, por hipótese vamos supor que a velocidade quadrática $\tilde{V}^2$, após uma dada colisão, pode ser descrita como

$$\tilde{V}^2(\alpha, \theta, t, V) = V^2 + \psi(\alpha, \theta, t, V), \tag{3.42}$$

onde novamente V^2 é a velocidade quadrática da partícula no instante anterior à colisão e $\psi(\alpha, \theta, t, V)$ é a contribuição da fronteira do bilhar. Com os mesmos argumentos apresentados para encontrar $\overline{V_{n+1}}$, podemos descrever $\overline{V_{n+1}^2}$ como sendo

$$\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} + W(\overline{V_n}) + \frac{1}{2}W''(\overline{V_n})(\overline{V_n^2} - \overline{V_n}^2), \tag{3.43}$$

onde

$$W(V) \; = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \; \psi(\alpha, \theta, t, V)F(\theta, \alpha)\rho_V(t)d\alpha d\theta dt. \tag{3.44}$$

A conexão entre $\overline{V_{n+1}}$ e $\overline{V_{n+1}^2}$ vem através do conhecimento de como se relacionam as médias parciais $U(V)$ e $W(V)$. No limite de altas velocidades ou baixas amplitudes de oscilações da fronteira móvel, é possível mostrar que $\zeta(\alpha, \theta, t, V) \approx \psi(\alpha, \theta, t, V)/2V$, o que naturalmente nos leva a aproximação de

$$U(V) \approx W(V)/2V. \tag{3.45}$$

Esse resultado é de grande utilidade e importância em nossa descrição, pois uma vez conhecida a conexão entre as médias parciais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{V_{n+1}} &= \overline{V}_n + \frac{1}{2}W_n\overline{V_n^2}/\overline{V_n}^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{V_n}W_n'' - W_n'\right)\left(\overline{V_n^2}/\overline{V_n}^2 - 1\right), \\ \overline{V_{n+1}^2} &= \overline{V^2}_n + W_n + \frac{1}{2}W_n''(\overline{V_n^2} - \overline{V_n}^2), \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $W_n = W(\overline{V_n}), W_n' = W'(\overline{V_n})$ e $W_n'' = W''(\overline{V_n})$.

O conjunto de equações exibido acima se mostra de grande valor não apenas para nossa descrição em particular, mas também para a análise de casos gerais. Isso se deve à forma genérica com que essas equações se apresentam, sendo necessário apenas encontrar a forma particular da função $W(V)$ que é característica para cada sistema. Através da manipulação algébrica da Eq.(3.28) que descreve o módulo da velocidade da partícula, encontramos que para o bilhar ovóide dependente do tempo com perturbação do tipo *não breathing*

$$V_{n+1}^2 \quad = \quad V_n^2 + 4(a\epsilon)^2 \cos^2(p\theta)\,\mathrm{sen}^2(t) - 4a\epsilon V_n \cos(p\theta)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(t),$$

onde

$$\psi(\alpha,\theta,t,V) \quad = \quad 4(a\epsilon)^2 \cos^2(p\theta)\,\mathrm{sen}^2(t) - 4a\epsilon V \cos(p\theta)\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(t). \qquad (3.47)$$

Uma vez que encontramos a expressão de $\psi(\alpha,\theta,t,V)$ característica do problema, podemos efetivamente encontrar qual é o formato da média parcial $W(V)$. Porém, uma discussão válida deve ser feita sobre a distribuição de fases de colisão $\rho_V(t)$ no sistema. Podemos observar na Fig. 3.6(c) que para V_0 pequeno a distribuição tem um perfil quase que completamente homogênea, entretanto, para um valor grande de V_0 a distribuição tende a ter uma mudança de perfil de forma a não ser mais homogênea, tendo um pico próximo a $3\pi/2$.

Sendo assim, vamos estimar essa distribuição $\rho_V(t)$ como sendo

$$\rho_V(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 - a\epsilon\chi(V)\,\mathrm{sen}(t)\right], \qquad (3.48)$$

onde $\chi(V)$ corresponde a um parâmetro que varia lentamente em função de V, tal que para velocidades baixas $\chi(V) \to 0$, e para velocidades altas $\chi(V)$ tende a saturar em um valor χ^*. É interessante observar que o parâmetro $\chi(V)$ é o responsável pela observação do pico da distribuição $\rho_V(t)$, sendo essa região composta pelas fases que mais contribuem para o aumento do módulo da velocidade da partícula.

Desta forma, inserindo $\psi(\alpha,\theta,t,V)$ e $\rho_V(t)$ na Eq. (3.44) e definindo os seguintes coeficientes

$$\eta_1 \quad = (a\epsilon)^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \quad F(\alpha,\theta)\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(p\theta)d\theta d\alpha, \qquad (3.49)$$

$$\eta_2 \quad = (a\epsilon)^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \quad F(\alpha,\theta)\cos^2(p\theta)d\theta d\alpha, \qquad (3.50)$$

obtemos a média parcial $W(V)$ como sendo

$$W(V) = 2\eta_2 + 2\eta_1\chi(V)V. \qquad (3.51)$$

Um comentário importante a ser feito sobre os coeficientes η_1 e η_2 é que ambos são maiores que zero. Essa afirmação pode ser confirmada através de argumentos de paridade entre a função $F(\alpha,\theta)$ e as demais funções que compõem a equação dos coeficientes.

Adicionando a função $W(V)$ encontrada no conjunto de equações dado em Eq. (3.46), obtemos duas equações de diferenças, tal como

$$\overline{V_{n+1}} - \overline{V_n} = \eta_1 \chi_n + \eta_2 \overline{V_n^2}/\overline{V_n}^3, \quad (3.52)$$
$$\overline{V_{n+1}^2} - \overline{V_n^2} = 2\eta_2 + 2\eta_1 \chi_n \overline{V_n}, \quad (3.53)$$

com $\chi_n = \chi(\overline{V_n})$. Essas equações de diferenças podem ser resolvidas assintoticamente para grandes ou pequenos valores de n, o que nos ajuda a explorar os diferentes regimes de difusão observados na Fig. 3.4.

Dado que os resultados numéricos obtidos mostram que ensembles com V_0 menor ou da ordem da amplitude da velocidade da fronteira experimentam os regimes de platô, difusão normal e super difusão, vamos estudar a evolução do sistema para cada uma dessas situações, de modo que associaremos os comportamentos de platô e difusão normal para pequenos n, enquanto que o regime de super difusão será dado para grandes n. Logo, levando em consideração um conjunto de partículas com $V_0 \approx a\epsilon$ e utilizando a aproximação de limite contínuo $\overline{f_{n+1}} - \overline{f_n} \approx df(n)/dn$, temos que

$$\overline{V_p^2} = V_0^2 + 2\eta_2 n, \quad (3.54)$$

onde o sub-índice p indica a análise feita para pequenos n.

Uma vez que as Eqs. (3.52) e (3.53) estão acopladas pelo termo $\overline{V_n^2}/\overline{V_n}^3$, devemos substituir a solução da Eq.(3.54) na equação Eq. (3.52), de modo a encontrar a aproximação

$$\overline{V_p} = \left(V_0^2 + 2\eta_2 n\right)^{1/2}, \quad (3.55)$$

que descreve o comportamento da média do módulo de velocidade do conjunto analisado para um número pequeno de colisões. Ressaltamos que essa aproximação foi feita considerando que $\chi_n \to 0$, uma vez que estamos lidando com um ensemble de baixa energia inicial.

É interessante notar os comportamentos assintóticos exibidos pela Eq. (3.55), onde para um $V_0 \gg a\epsilon$, o módulo da velocidade inicial domina os primeiros instantes da dinâmica do sistema simbolizando o que chamamos de regime de platô. Entretanto, conforme o número de colisões aumenta, a quantidade $2\eta_2 n$ passa a crescer até se tornar o novo termo dominante da equação acarretando no início do regime de difusão normal.

Considerando que após um número grande de colisões, as partículas passam a experimentar velocidades em módulo cada vez maiores levando o parâmetro $\chi_n \to \chi^*$, e que $\overline{V_n^2}$ e $\overline{V_n}^2$ são de mesma ordem, então temos que o termo $\overline{V_n^2}/\overline{V_n}^3 \to 0$ para valores altos de V_n, o que para esse caso acarreta na eliminação do acoplamento existente Eqs. (3.52) e (3.53). Logo, para essa situação podemos trabalhar diretamente com

$$\overline{V_{n+1}} - \overline{V_n} \approx \eta_1 \chi^*, \quad (3.56)$$

que ao ser integrada como no caso anterior, leva a solução

$$\overline{V_g} = V_0 + \eta_1 \chi^* n. \tag{3.57}$$

onde o sub-índice g indica a análise feita para grandes n.

Analisando assintoticamente a Eq. (3.57), também podemos observar que quando $V_0 \gg a\epsilon$, temos que o módulo da velocidade inicial domina os primeiros instantes da dinâmica, ao passo que conforme o número de colisões aumenta, a quantidade $\eta_1 \chi^* n$ passa a crescer até se tornar o novo termo dominante da equação. De forma similar ao caso anterior, esse comportamento representa o regime de platô seguido pelo agora regime de super difusão no sistema.

Após a análise separada dos casos acima, podemos ver que a descrição completa da evolução da média do módulo da velocidade para esse sistema é dado pela combinação dos regimes descritos pelas Eqs. (3.55) e (3.57), ou seja

$$\overline{V} = (V_0^2 + 2\eta_2 n)^{1/2} + \eta_1 \chi^* n. \tag{3.58}$$

Entretanto, para uma comparação direta com os resultados numéricos encontrados na Fig. 3.4, é necessário realizar algumas análises complementares na Eq. (3.58). Como foi mencionado no início dessa seção, nós avaliamos numericamente o comportamento de $\overline{V}$ ao longo do ensemble e também da órbita das partículas, enquanto que a Eq. (3.58) foi construída apenas levando em consideração a média ao longo do ensemble. A análise ao longo da órbita será feita como

$$\overline{V} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overline{V_j}.$$

O somatório ao longo da órbita para o primeiro termo da Eq. (3.58) pode ser aproximado por

$$\overline{V} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} (V_0^2 + 2\eta_2 j)^{1/2} \approx \frac{1}{3\eta_2(n+1)} \left[(V_0^2 + \Omega_1)\sqrt{V_0^2 + \Omega_1} - (V_0^2 - \Omega_2)^{3/2} \right], \tag{3.59}$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 2\eta_2 \left[n + 1 - \Theta(V_0, \eta_2) \right], \\ \Omega_2 &= 2\eta_2 \Theta(V_0, \eta_2), \end{aligned}$$

sendo $\Theta(V_0, \eta_2)$ um coeficiente definido no intervalo de $0 < \Theta(V_0, \eta_2) < 1$, responsável por garantir a convergência de $\overline{V} = V_0$ quando $n = 0$[†]. Analisando o segundo termo da Eq. (3.58),

[†]Maiores informações sobre a aproximação desse somatório podem ser encontradas no Apêndice C.

temos que

$$\overline{V} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\eta_1\chi^* j = \frac{\eta_1\chi^*}{2}n. \tag{3.60}$$

Introduzindo as Eqs. (3.59) e (3.60) na Eq. (3.58), encontramos uma aproximação que descreve a média do módulo da velocidade no sistema como sendo

$$\overline{V} = \frac{1}{3\eta_2(n+1)}\left[(V_0^2+\Omega_1)\sqrt{V_0^2+\Omega_1} - (V_0^2-\Omega_2)^{3/2}\right] + \frac{\eta_1\chi^*}{2}n, \tag{3.61}$$

onde podemos verificar de forma inicial a validade da aproximação encontrada a partir do estudo de alguns casos limites observados no sistema, por exemplo:

i-) Para $\chi^* \approx 0$ e $n \gg 1$:

$$\overline{V} = \frac{2}{3}\sqrt{V_0^2 + 2\eta_2 n} \Rightarrow \overline{V} \propto n^{1/2},$$

representando a difusão normal no sistema.

ii-) Para $\chi^* \neq 0$ e para $n \gg 1$:

$$\overline{V} = \frac{\chi^*\eta_1}{2}n \Rightarrow \overline{V} \propto n,$$

representando o caso da super difusão no sistema.

Uma terceira situação de interesse é para $n = 0$ onde esperamos que $\overline{V} = V_0$. Porém, como já adiantamos, a convergência para esse caso já é garantida pelo coeficiente $\Theta(V_0, \eta_2)$.

A evolução da Eq. (3.61) é apresentada na Fig. 3.4 pela linha contínua (azul), onde podemos observar a excelente concordância entre os resultados numéricos e a previsão teórica para todos os ensembles estudados.

Como uma última observação, é interessante notar que se o perfil da distribuição $F(\alpha, \theta)$ fosse homogêneo, o sistema não apresentaria o regime de super difusão, umas vez que o coeficiente η_1 seria nulo na Eq. (3.61). Esse perfil não homogêneo de $F(\alpha, \theta)$ é uma característica comum de sistemas mistos [68, 69], o que pode sugerir que além da correlação, uma fator importante para a observação da super difusão em bilhares do tipo *não breathing* é a estrutura mista do espaço de fases.

Desta modo concluímos essa seção, onde discutimos de forma numérica e analítica o mecanismo envolvido na observação da Aceleração de Fermi assim como as características desse fenômeno no modelo discutido. Na próxima seção, concentraremos esforços para demonstrar que a supressão dessa difusão ilimitada de energia pode ser alcançada através da introdução de colisões inelásticas entre as partículas e a fronteira do bilhar.

3.4 Supressão da Aceleração de Fermi

Na seção anterior, analisamos o comportamento de um conjunto de partículas não-interagentes que, após diversas colisões elásticas com a fronteira móvel do bilhar, exibiam um crescimento ilimitado da energia média conhecido como Aceleração de Fermi. Esse fenômeno, por sua vez, foi amplamente estudado e discutido de modo que ao final da seção, tanto seu mecanismo quanto suas características foram muito bem estabelecidos. Entretanto, uma vez que conhecemos bem esses processos envolvidos na difusão ilimitada de energia, é natural que um novo questionamento seja feito: *É possível suprimir a Aceleração de Fermi nesse sistema?*

Para tentar responder essa pergunta, vamos inicialmente propor uma ideia um tanto quanto heurística, mas que pode trazer grandes informações sobre o problema. Por hipótese, vamos supor que a energia média para um conjunto de partículas, após cada colisão com uma fronteira móvel, sofra variações da ordem de ψ e que a cada colisão exista uma perda fracional de energia por parte das partículas devido a ação de um coeficiente de restituição genérico $\gamma < 1$. Desta forma, a energia média para o sistema após a colisão $n+1$ pode ser escrita como

$$\overline{V_{n+1}^2} = \gamma(\overline{V_n^2} + \psi), \tag{3.62}$$

onde $\overline{V_n^2}$ é a velocidade quadrática média na colisão n.

Partindo da premissa de que existe um coeficiente de restituição atuando no sistema, esperamos que a dinâmica do problema evolua para um regime de equilíbrio estável, no qual a perda fracional de energia por parte das partículas é compensada pelo valor da energia adquirido pelas mesmas após cada colisão com a fronteira oscilante. Sendo assim, após diversas colisões, esperamos que a velocidade quadrática média do conjunto se aproxime de um regime estacionário V_{est}, estimado como

$$V_{est} = \sqrt{\frac{\gamma\psi}{1-\gamma}}. \tag{3.63}$$

A equação (3.63) sugere que a dissipação é um fator suficiente para a observação da supressão a Aceleração de Fermi no sistema, mesmo que o coeficiente de restituição seja muito próximo do caso ideal. Note que para $\gamma \to 1$ essa equação recupera a ideia de difusão ilimitada de energia para o sistema, uma vez que $V_{est} \to \infty$.

De modo ao realizar uma verificação numérica da supressão da Aceleração de Fermi no bilhar ovóide *não breathing*, vamos estudar o comportamento da quantidade $V_{rms} = \sqrt{\overline{V_{n+1}^2}}$ para um conjunto de $M = 10^6$ partículas não-interagentes que experimentam 10^7 colisões inelásticas com a fronteira móvel do bilhar.

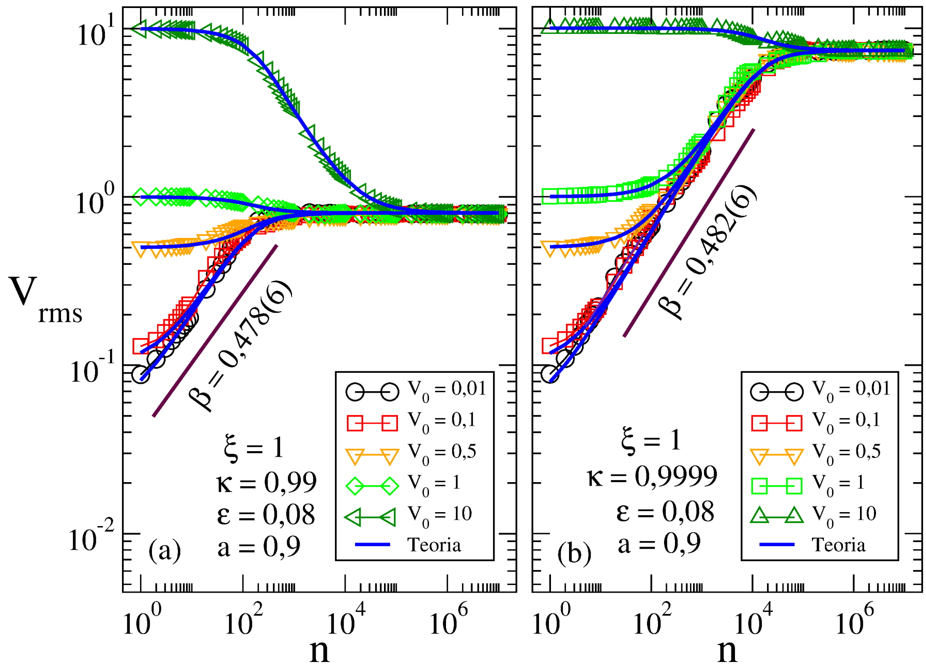

Figura 3.7: *Comportamento de V_{rms} $vs.$ n para diferentes módulos de velocidades iniciais e coeficientes de restituição. Três diferentes regimes podem ser identificados na figura. Para $V_0 \approx a\epsilon$, observamos um platô dominante para a dinâmica de poucas colisões. Após um primeiro crossover, V_{rms} começa a crescer seguindo uma lei de potência do número de colisões n, difundindo-se com um expoente de crescimento em: (a) $\beta = 0,478(6)$ e (b) $\beta = 0,482(6)$. Após um segundo crossover, V_{rms} atinge o regime estacionário V_{est}. No caso de $V_0 \gg a\epsilon$, V_{rms} apresenta um decaimento exponencial até atingir o regime estacionário V_{est}. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,9$, $\xi = 1$ e κ indicados na figura.*

O cálculo para V_{rms} é realizando seguindo a expressão

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}|\vec{V}|^2_{i,j}} \quad , \tag{3.64}$$

onde novamente o primeiro somatório representa a média ao longo do ensemble de M partículas enquanto o segundo uma média ao longo de $n+1$ colisões de cada órbita.

A figura 3.7(a,b) apresenta os resultados numéricos para um conjunto de partículas aleatoriamente distribuído em $t_0 \in [0, 2\pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$, onde cada curva foi evoluída com V_0 diferente e coeficientes de restituição indicados. Três comportamentos distintos podem ser observados em V_{rms} $vs.$ n. Assim como para o caso de colisões elásticas, para módulos de velocidades iniciais próximos da amplitude da velocidade da fronteira, as curvas de V_{rms} apresentam um platô que tem seu tamanho diretamente ligado ao valor de V_0. Após um primeiro *crossover*, observamos uma mudança de comportamento no sistema, de modo que platô antes encontrado é substituído por um regime de difusão que segue uma lei de potência do número de colisões n com um expoente $\beta \sim 1/2$, ou seja, difusão normal. Contudo, diferentemente da difusão

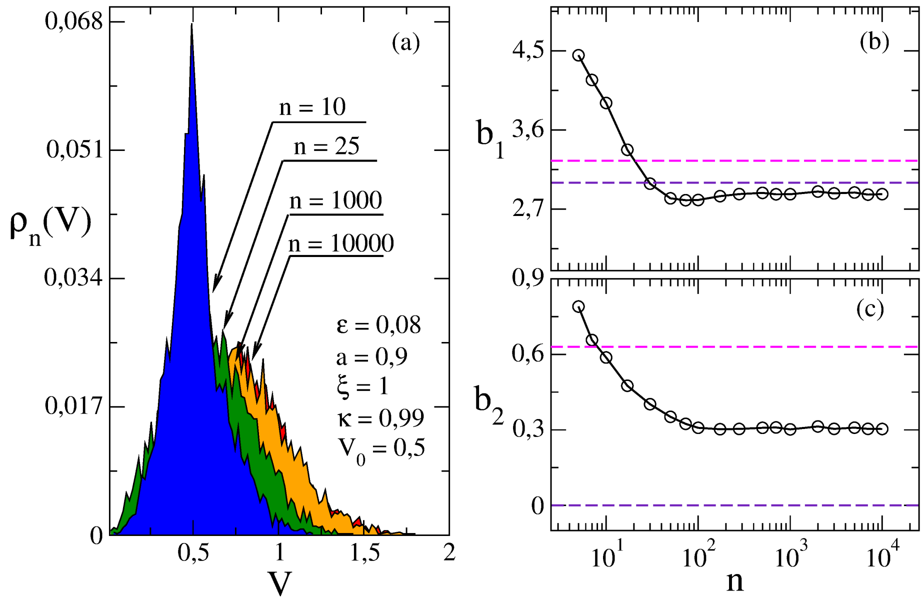

Figura 3.8: *(a) Descrição da evolução da distribuição do módulo das velocidades $\rho_n(V)$ para um ensemble de partículas após diferentes números de colisões n; (b,c) Medidas da curtose b_1 e assimetria b_2 (curva preta para ambos) para a distribuição do módulo de velocidades $\rho_n(V)$ após diferentes números de colisões n. As curvas tracejadas em roxo e rosa representam os valores de b_1, b_2 para a distribuição Normal e para a distribuição de Maxwell-Boltzmann $2D$ respectivamente. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,9$, $\kappa = 0,99$ e $\xi = 1$.*

ilimitada observada na seção anterior, após um segundo *crossover* o sistema sofre uma nova mudança de comportamento, onde V_{rms} atinge um regime estacionário em V_{est}. Vale a pena ressaltar que para o caso em que $V_0 \gg a\epsilon$, as curvas de V_{rms} atingem o regime estacionário em V_{est} seguindo um decaimento exponencial.

Como evidenciado acima, os resultados numéricos encontrados e o modelo heurístico proposto no início da seção apresentam uma boa concordância de dados. Observamos que existe um regime estacionário para o qual a dinâmica do ensemble de partículas se aproxima após diversas colisões e também verificamos que as colisões inelásticas, mesmo quando muito próximas do caso ideal, já são o suficiente para provocar a supressão da Aceleração de Fermi no bilhar.

Uma vez que a supressão da Aceleração de Fermi foi verificada, podemos de forma similar à feita na seção anterior, discutir o mecanismo envolvido na evolução do sistema a partir de seu estado inicial até seu estado final, ou seja, o estado estacionário. Para isso, novamente vamos estudar o comportamento da distribuição do módulo de velocidades $\rho_n(V)$ para um conjunto de partículas em função do número de colisões n, como mostrado na Fig. 3.8(a). Considerando novamente que as partículas do ensemble iniciam suas trajetórias no bilhar com posições e direções aleatórias, podemos supor que a cada colisão as partículas podem ganhar ou perder velocidade em módulo com a mesma probabilidade, além de seguirem diferentes trajetórias umas das outras. Sendo assim, dado uma colisão n para o ensemble, temos um número muito próximo entre as partículas que ganham ou perdem velocidade em módulo, o que leva o sistema a apresentar o regime de platô num valor próximo ao de V_0 do conjunto. Contudo, após um número de colisões característico, podemos observar o fenômeno da quebra na simetria de difusão do módulo das velocidades, o que leva o sistema a romper o regime de platô e exibir uma difusão normal. É notável que os estágios da evolução do sistema até esse ponto são muito similares ao caso de colisões elásticas, porém, a partir de um $n \approx 1000$, observamos que $\rho_n(V)$ começa a não sofrer grandes transformações ao longo das colisões, muito em virtude da perda fracional de energia por parte das partículas, o que naturalmente leva o sistema a atingir um comportamento estacionário.

Podemos também discutir a evolução da forma da distribuição do módulo de velocidades $\rho_n(V)$ via medida da *curtose* b_1 e *assimetria* b_2 em função do número de colisões n. Em estatística, as quantidades *curtose* e *assimetria* são frequentemente utilizadas para descrever o tipo de distribuição utilizada, sendo a primeira indicando o grau de achatamento da curva e a segunda o formato da distribuição no entorno da média [70]. As medidas de b_1, b_2 são calculadas da seguinte forma

$$b_1 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{V_i - \bar{V}}{\sigma_V}\right]^4, \quad b_2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\frac{V_i - \bar{V}}{\sigma_V}\right]^3, \tag{3.65}$$

onde $\sigma_V = \sqrt{\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2}$.

A figura 3.8(b,c) apresenta o resultado para as medidas de *curtose* e *assimetria* no sistema, onde observamos que a evolução da distribuição inicial de $\rho_n(V)$ tende a um regime estacionário com um grau de achatamento $b_1 \approx 2,87$ e uma *assimetria* $b_2 \approx 0,30$. Os resultados encontrados para b_1 e b_2 tornam-se mais significativos quando comparados a valores de distribuições conhecidas, como por exemplo, a distribuição Normal ou Maxwell-Boltzmann $2D$. Essa comparação é feita na Fig. 3.8(b,c), onde a distribuição Normal é indicada pela linha tracejada em roxo enquanto que a M-B $2D$ é representada pela linha tracejada em rosa. Por inspeção, é possível observar que para o regime estacionário, a distribuição $\rho_n(V)$ tem um grau de achatamento muito próximo ao de uma curva Normal, enquanto que sua *assimetria* entorno da média é algo intermediário às distribuições Normal e Maxwell-Boltzmann $2D$.

Como complemento da descrição numérica feita até agora, vamos tentar encontrar de forma similar à seção anterior, uma aproximação analítica a partir das equações que descrevem o modelo do bilhar ovóide *não breathing*, que reproduzam os resultados encontrados nas curvas de V_{rms} $vs.$ n. Novamente, por hipótese vamos supor que a velocidade quadrática $\tilde{V}^2$ de uma partícula após uma dada colisão com a parede do bilhar possa ser descrita com

$$\tilde{V}^2(\alpha, \theta, t, V) \;=\; V^2 + \psi(\alpha, \theta, t, V), \tag{3.66}$$

onde V^2 é a velocidade quadrática antes da colisão e $\psi(\alpha, \theta, t, V)$ representando a contribuição da parede móvel no instante da colisão. Desta forma, para um conjunto de partículas podemos

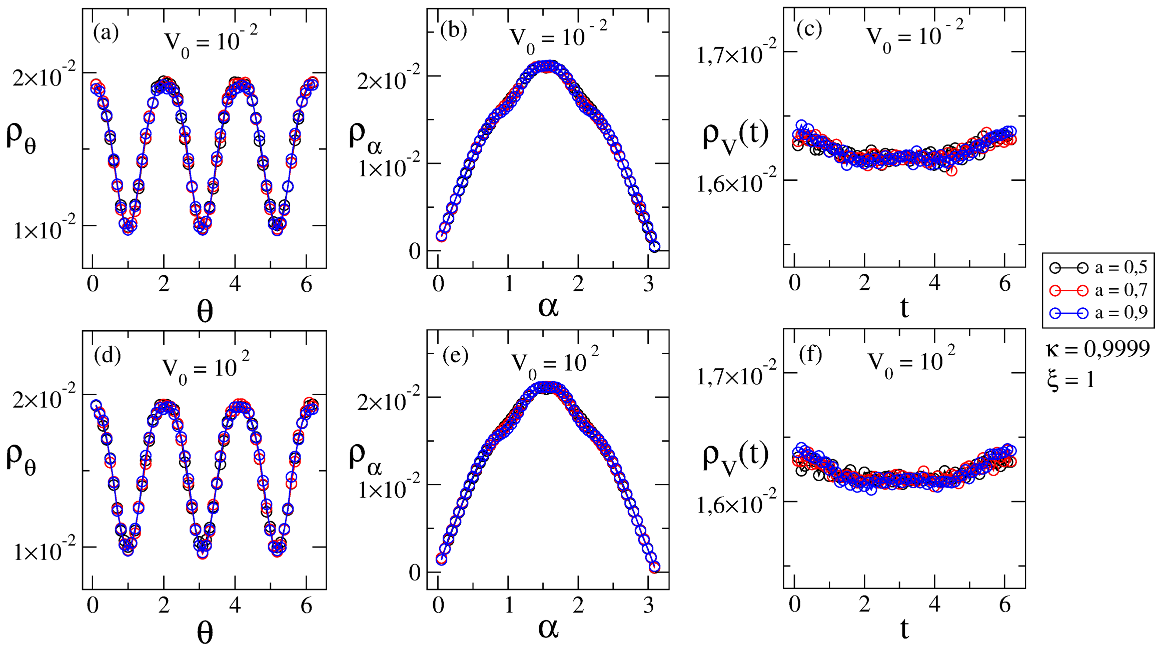

Figura 3.9: *(a,b,d,e) Perfil numérico da distribuição de ângulos $F(\alpha, \theta)$. Podemos notar que assim como no caso de colisões elásticas, $F(\alpha, \theta)$ é pouco afetada pelas oscilações da parede do bilhar; (c,f) Perfil numérico da distribuição de fases de colisão $\rho_V(t)$. Observarmos que para valores grandes ou pequenos de V_0 a distribuição $\rho_V(t)$ apresenta uma forma homogênea. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,5$, $\kappa = 0,9999$ e $\xi = 1$.*

escrever a velocidade quadrática média como

$$\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} + \delta\overline{V_n^2}, \tag{3.67}$$

onde

$$\overline{V_n^2} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi V^2 \mathcal{F}_n(\alpha, \theta, t, V) d\alpha d\theta dt dV, \tag{3.68}$$

$$\delta\overline{V_n^2} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(\alpha, \theta, t, V) \mathcal{F}_n(\alpha, \theta, t, V) d\alpha d\theta dt dV, \tag{3.69}$$

e que $\mathcal{F}_n(\alpha, \theta, t, V)$ seja a função de distribuição do espaço de fases na colisão n. Assumindo que essa distribuição pode ser fatorada da forma

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \theta, t, V) = F(\theta, \alpha) \rho_V(t) \rho_n(V), \tag{3.70}$$

onde $F(\alpha, \theta)$ indica a distribuição das variáveis $\alpha - \theta$, $\rho_V(t)$ a distribuição de fases de colisão e $\rho_n(V)$ é distribuição do módulo de velocidades.

A obtenção dos perfis das distribuições angulares e de fase de colisão foram feitas seguindo o mesmo método apresentado na seção anterior e seus resultados podem ser verificados na Fig. 3.9. Podemos observar que a distribuição $F(\alpha, \theta)$ quase não sofre alterações frente a variação da amplitude de oscilação da fronteira do bilhar e assim como para o caso de colisões elásticas, é independente do índice n. A distribuição de fase de colisão $\rho_V(t)$ diferentemente do observado para o caso de colisões elásticas, exibe um perfil homogêneo para diferentes V_0, contudo permanece independente do índice n. No caso da distribuição do módulo de velocidades, $\rho_n(V)$ apresenta uma dependência com V_0 e também com o índice n, como discutido anteriormente nessa seção.

Definindo agora $W(V)$ como uma média parcial, tal que

$$W(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(\alpha,\theta,t,V)F(\theta,\alpha)\rho_V(t)d\alpha d\theta dt, \tag{3.71}$$

podemos escrever uma expressão mais compacta para a descrição da variação $\delta\overline{V_n^2}$ como sendo

$$\delta\overline{V_n^2} = \int_0^{\infty} \rho_n(V)W(V)dV. \tag{3.72}$$

Através de uma expansão em segunda ordem da função $W(V)$ entorno de $\overline{V_n}$ da distribuição $\rho_n(V)$, encontramos que

$$W(V) \approx W(\overline{V_n}) + W'(\overline{V_n})(V-\overline{V_n}) + \frac{1}{2}W''(\overline{V_n})(V-\overline{V_n})^2, \tag{3.73}$$

que inserida na Eq. (3.72), nos leva a aproximação

$$\delta\overline{V_n^2} = W(\overline{V_n}) + \frac{1}{2}W''(\overline{V_n})(\overline{V_n^2}-\overline{V_n}^2). \tag{3.74}$$

Ressaltamos novamente que aproximação feita na Eq. (3.73) se torna fraca conforme nos afastamos da média da distribuição. Porém como já discutido, $\rho_n(V)$ contribui muito pouco onde a expansão em série de Taylor de $W(V)$ é menos acurada devido a distribuição do módulo de velocidades $\rho_n(V)$ decair a zero para valores grandes e pequenos de V. Finalmente, substituindo a Eq. (3.74) na Eq. (3.67), temos que a aproximação em segunda ordem para a velocidade quadrática média do conjunto na colisão de ordem $n+1$ é dada por

$$\overline{V_{n+1}^2} = \overline{V_n^2} + W(\overline{V_n}) + \frac{1}{2}W''(\overline{V_n})(\overline{V_n^2}-\overline{V_n}^2). \tag{3.75}$$

Considerando as equações do modelo que descrevem o módulo da velocidade da partícula (Eq. (3.28)) para o caso de colisões inelásticas, temos que para o bilhar ovóide dependente do tempo com perturbação do tipo *não breathing*

$$\begin{aligned} V_{n+1}^2 &= V_n^2 + (\kappa^2-1)V^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) + (1+\kappa)^2(a\epsilon)^2\cos^2(p\theta)\,\mathrm{sen}^2(t) + \\ &\quad + 2V\kappa a\epsilon(1+\kappa)\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(p\theta)\,\mathrm{sen}(t), \end{aligned}$$

onde

$$\psi(\alpha,\theta,t,V) = (\kappa^2-1)V^2\operatorname{sen}^2(\alpha) + (1+\kappa)^2(a\epsilon)^2\cos^2(p\theta)\operatorname{sen}^2(t) + \\ + 2V\kappa a\epsilon(1+\kappa)\operatorname{sen}(\alpha)\cos(p\theta)\operatorname{sen}(t). \quad (3.76)$$

A partir do conhecimento de $\psi(\alpha,\theta,t,V)$ para o problema e assumindo que a distribuição de fase de colisões pode ser descrita aproximadamente por

$$\rho_V(t) = \frac{1}{2\pi}, \quad (3.77)$$

podemos encontrar a função $W(V)$ introduzindo $\psi(\alpha,\theta,t,V)$ e $\rho_V(t)$ na Eq. (3.71), de modo que obtemos como resultado

$$W(V) = \eta_1(\kappa^2-1)V^2 + \frac{1}{2}(1+\kappa)^2(a\epsilon)^2\eta_2, \quad (3.78)$$

onde

$$\eta_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\alpha,\theta)\operatorname{sen}^2(\alpha)d\theta d\alpha, \quad (3.79)$$

$$\eta_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\alpha,\theta)\cos^2(p\theta)d\theta d\alpha, \quad (3.80)$$

são coeficientes maiores que zero. Novamente essa afirmação pode ser verificada por inspeção do perfil da função $F(\alpha,\theta)$ e as demais funções que compõem a equação dos coeficientes.

Inserindo a Eq. (3.78) na Eq. (3.75), encontramos uma equação de diferenças para a velocidade quadrática média, tal como

$$\overline{V^2_{n+1}} - \overline{V^2_n} = \eta_1(\kappa^2-1)\overline{V^2_n} + \frac{1}{2}(1+\kappa)^2(a\epsilon)^2\eta_2, \quad (3.81)$$

que com o auxílio da aproximação de limite contínuo $\overline{f_{n+1}} - \overline{f_n} \approx df(n)/dn$, nos fornece

$$\overline{V^2} = V_0^2 e^{\eta_1(\kappa^2-1)} + \frac{(a\epsilon)^2}{2}\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)\left[1-e^{\eta_1(\kappa^2-1)n}\right]. \quad (3.82)$$

Novamente, para realizar uma comparação direta entre os resultados numéricos encontrados na Fig. 3.7 e a aproximação analítica, é necessário efetuar uma análise sobre a Eq. (3.82) uma vez que essa equação representa o comportamento da velocidade quadrática média apenas ao longo do ensemble de partículas, enquanto que em nossas simulações numéricas levamos em consideração médias ao longo do ensemble e da órbita das partículas.

Sendo assim, levando em consideração que a média ao longo da órbita pode ser feita como

$$\overline{V^2} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overline{V_j^2},$$

e que o somatório de um exponencial converge à [71]

$$\sum_{j=0}^{n} e^{\eta_1(\kappa^2-1)j} = \left[\frac{1-e^{(n+1)\eta_1(\kappa^2-1)}}{1-e^{\eta_1(\kappa^2-1)}}\right], \tag{3.83}$$

desde que seu argumento seja negativo, então, através da introdução da Eq. (3.83) na Eq. (3.82), obtemos que a aproximação para a velocidade quadrática média no sistema é dado por

$$\overline{V^2} = \Psi + \left(\frac{V_0^2-\Psi}{n+1}\right)\left[\frac{1-e^{(n+1)\eta_1(\kappa^2-1)}}{1-e^{\eta_1(\kappa^2-1)}}\right], \tag{3.84}$$

onde

$$\Psi = \frac{(a\epsilon)^2}{2}\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right). \tag{3.85}$$

Finalmente, a expressão que descreve a aproximação da evolução do comportamento do V_{rms} no sistema é

$$V_{rms} = \sqrt{\Psi + \left(\frac{V_0^2-\Psi}{n+1}\right)\left[\frac{1-e^{(n+1)\eta_1(\kappa^2-1)}}{1-e^{\eta_1(\kappa^2-1)}}\right]}. \tag{3.86}$$

Como fizemos na seção anterior, podemos verificar a validade da aproximação encontrada para o V_{rms} a partir do estudo de alguns casos limites observados no sistema, por exemplo:

i-) Para $n = 0$:

$$V_{rms} = V_0, \tag{3.87}$$

o que representa o ensemble em seu estado inicial.

ii-) Para $V_0^2 \ll \Psi$ e no limite em que $\kappa \approx 1^{\dagger}$:

$$V_{rms} \cong a\epsilon\sqrt{\frac{\eta_2}{2}(1+\kappa)(n+1)}, \tag{3.88}$$

que para um $n \gg 1$ pode ser aproximado para

$$V_{rms} \cong a\epsilon\sqrt{\frac{\eta_2}{2}(1+\kappa)}\sqrt{n}. \tag{3.89}$$

representando o regime de difusão normal do sistema.

iii-) Para $n \to \infty$:

$$V_{rms} = \sqrt{\Psi},$$

†O resultado foi obtido através de uma expansão em primeira ordem da exponencial do denominador, enquanto a exponencial do numerador foi expandida até a segunda ordem devido ao termo $(n+1)$.

$$V_{rms} \;=\; a\epsilon\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)}, \tag{3.90}$$

que representa o caso em que o ensemble atinge o estado estacionário V_{est} do sistema.

Vale ressaltar que para $V_0 \gg \Psi$, temos que V_{rms} apresenta um decaimento exponencial. A curva gerada pela Eq. (3.86) é apresentada na Fig. 3.7(a,b) pela linha contínua (azul), onde observamos claramente a excelente concordância entre os resultados numéricos e a previsão teórica feita para todos os ensembles considerados.

Deste modo, concluímos essa seção, onde verificamos que a Aceleração de Fermi no bilhar ovóide *não breathing* pode ser suprimida através da introdução de colisões inelásticas no sistema, mesmo quando essas colisões são muito próximas do caso ideal. Além disso, também discutimos de forma numérica e analítica as características do mecanismo envolvido na evolução do sistema desde seu estado inicial até seu estado estacionário assintótico [72]. Na próxima seção vamos discutir uma conexão entre os resultados da supressão da Aceleração de Fermi com alguns conceitos relacionados a termalização em sistemas termodinâmicos.

3.5 Conexão com a Termodinâmica

Como último tópico desta tese, vamos propor uma conexão entre os resultados de difusão dinâmica e saturação da velocidade quadrática média do bilhar ovóide *não breathing*, com o conceito de termalização. Vamos iniciar essa proposta utilizando a ideia de que a temperatura de um gás de partículas não-interagente confinado a uma região fechada é proporcional a medida da velocidade quadrática média do sistema, de modo que altas temperaturas estão relacionadas com maiores velocidades, enquanto que o oposto também é verdade [38, 73].

Para isso, vamos de forma inicial estudar como se difundem as velocidades de um ensemble 10^6 partículas sorteadas aleatoriamente nos intervalos $t_0 \in [0, 2\pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $\alpha_0 \in [0, \pi]$, com módulo de velocidades iniciais $V_0 = 0,5$ e coeficientes de restituição $\kappa = 0,99$ e $\xi = 1$, no do espaço de velocidades (V_x, V_y).

A figura 3.10(a-d) apresenta os resultados da difusão de velocidades no espaço (V_x, V_y), para o ensemble de partículas confinado no interior do bilhar conforme o número de colisões é aumentado. A escala de cores nessa figura representa a medida de densidade das partículas ao longo do espaço analisado.

Conforme já discutido nas seções anteriores, uma vez definido que as partículas iniciam suas trajetórias no bilhar com o mesmo módulo de velocidade inicial e com posições e direções aleatórias, podemos supor que para o estado inicial do sistema, as partículas compõem um círculo de raio V_0 ao longo do espaço (V_x, V_y), e que naturalmente, após iniciada as colisões das partículas com a fronteira do bilhar, é permitido que ocorram flutuações internas ou externas ao círculo de raio V_0 como observado na Fig. 3.10(a), representando o sistema após 10 colisões. Note que essa figura exibe flutuações das velocidades de forma interna e externa ao círculo

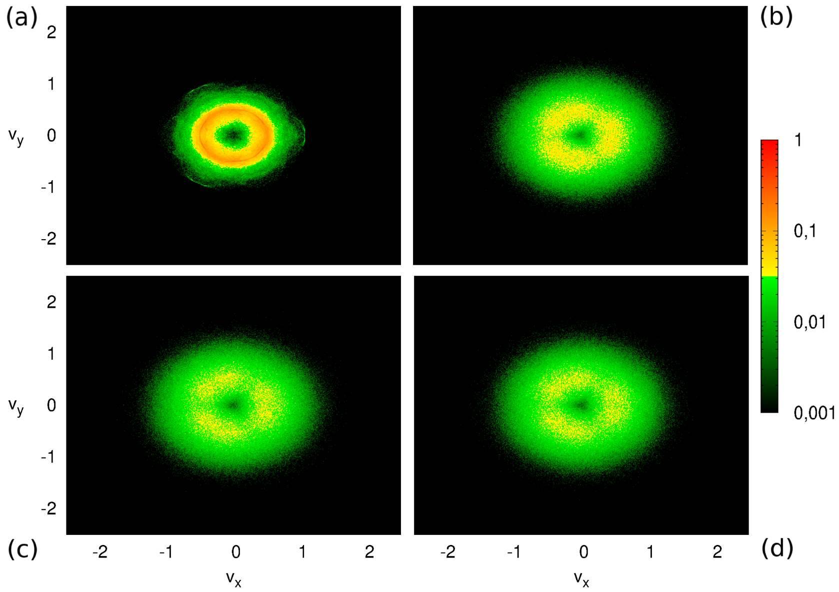

Figura 3.10: *Difusão de velocidades no espaço* (V_x, V_y) *para um conjunto de* 10^6 *partículas como* $V_0 = 0,5$ *após (a)* 10*, (b)* 25*, (c)* 1000 *e* 10000 *colisões com a fronteira móvel do bilhar respectivamente. A escala de cor é dada de forma logarítmica e representa a densidade de ocupação das partículas no espaço estudado. Os parâmetros utilizados foram* $\epsilon = 0,08$*,* $p = 3$*,* $a = 0,9$*,* $\kappa = 0,99$ *e* $\xi = 1$*.*

inicial, contudo a maior densidade de partículas continua a se concentrar ao longo de V_0. Esse comportamento pode ser ligado ao regime de platô discutido nas seções anteriores. Se observarmos o espaço (V_x, V_y) após 25 colisões, como exibido na Fig. 3.10(b), vemos que as flutuações se tornaram maiores ainda, de modo que a região de maior concentração das partículas agora é descrita por um círculo de raio $V^* > V_0$, que corresponde o sistema após à quebra da simetria de difusão de velocidades. Finalmente, para colisões da ordem de 1000 e 10000 representadas na Fig. 3.10(c,d), observamos que existe um padrão muito similar na forma como ocorre a difusão do ensemble no espaço (V_x, V_y), o que é um reflexo da chegada do sistema ao estado estacionário.

É interessante notar que as flutuações das velocidades são responsáveis por deslocarem a média do conjunto no espaço de velocidades (V_x, V_y), e essas flutuações podem ser estimadas como sendo a medida da variância

$$\sigma_V^2 = \left\langle \vec{v}^{\,2} \right\rangle - \left\langle \vec{v} \right\rangle^2 ,$$

onde a velocidade média $\langle \vec{v} \rangle$ é igual a zero devido as partículas estarem no interior de uma região fechada, no caso o bilhar, e $\langle \vec{v}^{\,2} \rangle$ sendo identificada como $\overline{V^2}$ fornecido pela Eq. (3.82).

Dado que agora sabemos como ocorre a difusão de velocidades no interior do sistema, vamos tentar criar uma conexão entre esses resultados com a ideia de temperatura. Para isso, vamos aqui definir uma quantidade chamada *temperatura dinâmica* T_d, tal que ela leve em consideração as características do sistema dinâmico em estudo. A quantidade T_d por sua vez,

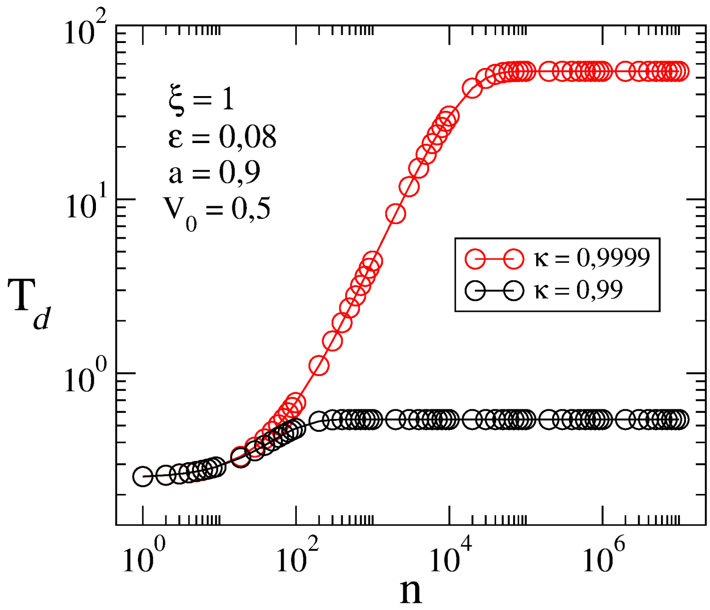

Figura 3.11: *Evolução numérica de T_d vs. n para um gás de partículas não-interagentes no interior de um bilhar ovóide do tipo não breathing. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon = 0,08$, $p = 3$, $a = 0,9$, $\xi = 1$ e κ indicados na figura.*

pode ser definida como

$$T_d \;\; \propto \;\; \overline{V^2},$$

onde a igualdade entre as duas quantidades pode ser obtida através da introdução de uma constante apropriada. Logo, a forma final para a descrição de T_d pode ser dada por

$$T_d = \frac{m}{2K_d}\left[\Psi + \left(V_0^2 - \Psi\right) e^{\eta_1(\kappa^2-1)n}\right], \tag{3.91}$$

com m igual a massa de cada partícula, K_d exercendo o equivalente a constante de Boltzmann no sistema e Ψ dado pela Eq. (3.85).

A figura 3.11 apresenta a evolução numérica da *temperatura dinâmica* T_d em função do número de colisões n para diferentes coeficientes de restituição. Como pode ser observado, quando $V_0 \ll \Psi$, a *temperatura dinâmica* do gás de partículas se eleva ao passo que o número de colisões aumenta até atingir o estado estacionário do sistema, onde permanece pelo resto da simulação. Note que o estado estacionário nesse modelo desempenha um papel semelhante ao da termalização de um sistema composto por um gás de partículas de baixa densidade em contato com um reservatório térmico à uma temperatura T. É interessante observar que tanto T_d como a temperatura de termalização T_{est} do sistema são dados em função dos parâmetros de controle que regulam a dinâmica do bilhar ovóide *não breathing*.

Uma análise complementar ao problema, pode ser feita ao considerar a ausência de potenciais externos atuando no interior do bilhar. Essa consideração indica que, a energia total das partículas no sistema é puramente cinética, ou seja, $U_{tot} = E_k$. Uma vez que a relação entre a velocidade quadrática média do conjunto e a *temperatura dinâmica* é bem conhecida, podemos, sem perda de generalidade, estimar a energia térmica referente ao sistema como sendo

$$\begin{aligned} U_{tot} &= E_k, \\ U_{tot} &= \frac{1}{2}Nm\overline{V^2}, \\ U_{ter} &= NK_dT_d, \end{aligned} \tag{3.92}$$

onde N representa o número de partículas que compõem o sistema. É interessante notar que a definição de *temperatura dinâmica* apresentada nessa seção recupera muito bem a forma da equação de energia para o caso de um gás ideal à uma temperatura T_d.

Uma importante consequência oriunda da Eq. (3.91) deve ser discutida de forma cuidadosa. No caso em que $\kappa \to 1$, temos que a *temperatura dinâmica* do sistema cresce de maneira ilimitada, o que de certa forma nos remete aos resultados do fenômeno da Aceleração da Fermi abordados na Seção (3.3). Contudo, sabemos que do ponto de vista termodinâmico, mesmo que um sistema apresente todas as condições geométricas necessárias (conjectura LRA) para a observação da Aceleração de Fermi, o equilíbrio termodinâmico sempre é observado. Logo, isso nos permite conjecturar que a não verificação da Aceleração de Fermi em sistemas termodinâmicos, pode estar ligado a algum tipo de inelasticidade envolvida nas colisões das partículas com a fronteira do recipiente em questão.

Com esses resultados, concluímos essa seção onde apresentamos uma conexão entre o regime estacionário obtido no bilhar ovóide *não breathing* com conceitos ligados termalização em sistemas térmicos [72]. Observamos que a quantidade definida nessa seção como *temperatura dinâmica* reproduz muito bem o comportamento que esperamos ver em um experimento físico real, principalmente no que tange a evolução da temperatura do sistema.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Nesta tese, analisamos a dinâmica de um bilhar ovóide quando o mesmo exibe uma fronteira estática ou dependente do tempo, para o estudo de alguns problemas clássicos encontrados na literatura. Inicialmente, apresentamos o caso em que o modelo consiste de uma fronteira estática, onde discutimos todas as equações necessárias para a construção de um mapeamento bidimensional não-linear, que descreve a dinâmica de uma partícula no interior do bilhar. Verificamos que para esse modelo a estrutura do espaço de fases é mista, o que pode levar à observação da coexistência de um mar de caos, ilhas de estabilidade e um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* no mesmo espaço de fases. Além disso, através da análise numérica dos expoentes de Lyapunov, caracterizamos o comportamento caótico que algumas partículas exibem, quando sujeitas à condições iniciais específicas do espaço de fases.

Com a posse das informações sobre a estrutura do sistema, utilizamos o modelo do bilhar ovóide para discutir as propriedades relativas ao escape de partículas através de orifícios posicionados ao longo da fronteira estática do bilhar. O objetivo principal desta etapa, foi acompanhar o comportamento da probabilidade de sobrevivência $P(n)$, ou seja, a probabilidade de permanecer no interior do bilhar, que um conjunto de partículas não-interagentes exibe após um dado número de colisões n com a fronteira. Através de resultados numéricos iniciais, foi verificado que a probabilidade de sobrevivência das partículas em média decai de forma exponencial conforme o número de colisões com a fronteira é aumentado, onde o expoente de decaimento δ de $P(n)$ é dado aproximadamente como a razão entre a extensão do orifício introduzido no sistema e o comprimento total da fronteira do bilhar.

Através de simulações numéricas, verificamos que em média o expoente δ tem um valor bem definido ao longo de todo o bilhar, contudo, para regiões específicas da fronteira, foi observado que o número partículas que visitam um determinado buraco, pode variar de modo a produzir um escape mais rápido ou mais lento do ensemble de partículas analisado. Esse fato em especial, acaba revelando a existência de possíveis regiões preferenciais para a observação do escape de partículas no bilhar. Através de uma investigação ao longo do espaço de fases da dinâmica, descobrimos que as regiões de maior frequência de escape estão conectadas as áreas predominantemente caóticas do sistema, enquanto as regiões de baixo escape estão ligadas a faixas mistas do espaço de fases. Esses resultados são de grande importância pois podem fornecer pistas para a resolução de problemas em aberto no estudo do escape de partículas em bilhares com buracos, em especial o problema envolvendo a especificação de onde posicionar um orifício ao longo da fronteira, de modo a produzir uma maximização ou minimização da fuga das partículas [36].

Com o foco na caracterização dessas regiões preferenciais e suas influências na maximização ou minimização do escape de partículas no bilhar ovóide, observamos que ao posicionar um orifício em uma das regiões de alta visitação do bilhar e efetuar o lançamento das partículas com condições iniciais de faixas predominantemente caóticas do espaço de fases, conseguimos verificar uma difusão de partículas através do orifício muito mais rápida do que comparado ao caso em que o lançamento de partículas e o posicionamento do orifício se dão em regiões com faixas mistas do espaço de fases. Notamos também que, de forma geral, lançar partículas com condições iniciais de faixas caóticas, sempre nos leva aos melhores resultados no que tange ao completo escape de partículas do interior do bilhar, independentemente da posição onde o orifício é introduzido. Essa afirmação se torna válida através de uma análise numérica revelar que, o lançamento de partículas com condições iniciais de faixas predominantemente caóticas do espaço de fases, leva a um escape extremamente rápido ou no mínimo a um escape do tipo lento, enquanto que se o lançamento se dá com condições iniciais de regiões mistas do espaço de fases, na melhor situação é observado apenas uma fuga lenta das partículas ou então no pior dos casos, a interrupção total da difusão das partículas para fora bilhar.

Através das informações obtidas para a verificação da maximização da fuga de partículas no sistema, estudamos as bacias de escape produzidas por dois orifícios h_1 e h_2 introduzidos na fronteira do bilhar, de modo que o sistema é configurado na situação ideal para a verificação de um escape rápido das partículas. Essa análise foi feita com o intuito de demonstrar que não existe uma preferência de escape por parte das partículas por qualquer um desses dois orifícios. Isso foi comprovado após verificar que, aproximadamente metade do ensemble de partículas analisado escapa por h_1, enquanto a outra metade tem sua fuga atingida em h_2. Ainda através das bacias de escape, foi observado que devido a característica mista do espaço de fases do problema, mesmo em uma situação que privilegia a maximização do escape, podemos encontrar alguns fatores que podem influenciar algumas partículas a permanecerem mais tempo no interior do bilhar, como por exemplo o fenômeno de *stickiness* ou pequenas cadeias de ilhas embutidas em meio a faixas predominantemente caóticas do espaço de fases.

Como complemento ao estudo das bacias de escape, realizamos algumas análises sobre as propriedades estruturais exibidas na fronteira entre as bacias de h_1 e h_2. Como observado ao longo dos resultados numéricos, devido a natureza complexa das regiões próximas a fronteira das bacias, é extremamente difícil definir por qual buraco ocorreu o escape de uma partícula com condição inicial no entorno dessas regiões. Essa dificuldade por sua vez, acaba por gerar uma incerteza sobre os pontos da fronteira das bacias de escape, o que através de algumas análises revelou uma natureza fractal da fronteira, com uma dimensão estimada em $D_0 = 1,8798(5)$.

A segunda parte desta tese, foi dedicada ao estudo do bilhar ovóide quando uma perturbação temporal é introduzida na fronteira, de modo a produzir oscilações periódicas. Essa abordagem permite que a cada colisão, a fronteira oscilante entregue ou retire uma porção de energia da partícula, de forma que o módulo da velocidade dessa mesma partícula pode aumentar ou diminuir dependendo do instante em que ocorre a impacto. Inicialmente, construímos as equações necessárias para a obtenção do mapeamento quadrimensional não-linear responsável pela descrição do movimento de uma partícula no interior do bilhar. Discutimos também, que o tipo da perturbação temporal introduzida na fronteira é do tipo *não breathing*, o que leva a área interna do bilhar a ser preservada, ao passo que a forma geométrica da fronteira é alterada a todo instante de tempo. Observamos também que ao supor colisões elásticas no sistema, a análise do comportamento médio do módulo de velocidades de um ensemble de partícula não-interagentes, tende a crescer de forma indefinida, seguindo uma lei de potência do número de colisões n. Esse crescimento ilimitado é conhecido como Aceleração de Fermi (AF). Demonstramos também, através da análise da distribuição do módulo de velocidades das partículas no bilhar, como se dá mecanismo envolvido nessa difusão ilimitada, além de verificar que esse fenômeno está ligado à quebra na simetria da difusão de velocidades no interior do bilhar.

Posterior a isso, estudamos uma maneira para suprimir o crescimento ilimitado de energia observado no bilhar ovóide e verificamos que a introdução de colisões inelásticas no modelo é suficiente para extinção da Aceleração de Fermi. Observamos que a difusão ilimitada é sensível a colisões inelásticas e mesmo quando o coeficiente de restituição responsável por essa inelasticidade é pequeno, quase ideal, o fenômeno da AF é interrompido. Verificamos também que, como a cada colisão existe uma perda fracional de energia por parte da partícula devido a ação do coeficiente de restituição, após um número de colisões característico, o sistema evolui para um estado de estagnação ou estacionário, que de forma direta pode ser interpretado como o momento em que as partículas começam a perder energia de forma proporcional ao que ganham nas colisões com a fronteira móvel do bilhar.

Com base nos resultados obtidos em relação ao caso de colisões inelásticas, fizemos como último tópico desta tese, uma conexão entre a evolução da velocidade quadrática média no sistema dissipativo, com a medida de uma quantidade denominada *temperatura dinâmica* T_d, que tem uma característica muito similar à medida da temperatura usual vista na Termodinâmica. Através de simulações numéricas, verificamos que a evolução de T_d exibe um comportamento muito similar ao esperado para a evolução da temperatura em um experimento físico real, composto por gás de baixa densidade confinado a um reservatório térmico à uma temperatura T_d.

Como perspectivas futuras, pretendemos dar continuidade no estudo dessa conexão entre o bilhar ovóide *não breathing* com outros observáveis termodinâmicos, como por exemplo a entropia. Um segunda hipótese, é uma tentativa em acoplar o estudo feito com relação ao escape de partículas na versão estática do bilhar com a versão dependente do tempo, para tentar através do estudo do escape, estimar o comportamento de uma outra quantidade termodinâmica denominada como potencial químico.

Referências Bibliográficas

[1] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, “Regular and Chaotic Dynamics”, *Appl. Math. Sci.*, **38**, Springer-Verlag, New York.(1992).

[2] G. D. Birkhoff, “Dynamical Systems”, *Amer. Math. Soc. Colloquim Publ. 9. Providence: American Mathematical Society.*, (1927).

[3] D.F.M. Oliveira e E. D. Leonel, “On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **15**, 1092 (2010).

[4] Ya. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections”, *Russ. Math. Surveys.*, **25**, 137 (1970).

[5] L. A. Bunimovich, “On Ergodic Properties of Certain Billiards”, *Funct. Anal. Appl.*, **8**, 254 (1974).

[6] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, “Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatteres”, *Commun. Math. Phy*, **78**, 479 (1981).

[7] L. A. Bunimovich, “On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards”, *Commun. Math. Phys.*, **65**, 295 (1979).

[8] Ya. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersive billiards”, *Russ. Math. Surveys.*, **25**, 141 (1970).

[9] L. A. Bunimovich, “Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards”, *Chaos*, **1**, 187 (1991).

[10] R. Markarian, “Ergodic properties of plane billiards with symmetric potencials”, *Nonlinearity*, **6**, 819 (1993).

[11] M. Robnik, “Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries”, *J. Phys. A.*, **16**, 3971 (1983).

[12] M. Henon e J. Wisdom, “The Benettin-Strelcyn oval billiard revisited”, *Physica D*, **8**, 157 (1983).

[13] L. G. Akinshin e A. Loskutov, "Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries", *Physical Ideas of Russia*, **2**, 67 (1997).

[14] L. G. Akinshin, K. A. Vasiliev, A. Loskutov e A. B. Ryabov, "Dynamical of billiards with perturbed boundaries and the problem of Fermi acceleration", *Physical Ideas of Russia*, **2**, 87 (1997).

[15] A. Loskutov, A. B. Ryabov e L. G. Akinshin, "Mechanism of Fermi acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries", *J. Exp. and Theor. Physics*, **89**, 966 (1999).

[16] A. Loskutov, A. B. Ryabov e L. G. Akinshin, "Properties of some chaotic billiards with time-dependet boundaries", *J. Physics A*, **33**, 7973 (2000).

[17] A. Loskutov e A. B. Ryabov, "Chaotic time-dependent billiards", *Int. J. of Comp. Anticipatory Syst.*, **8**, 336 (2001).

[18] A. Loskutov, A. B. Ryabov e A. N. Sobolevsky, "Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries", *Applied Nonlin. Dynamics.*, **9**, 50 (2001).

[19] A. Loskutov e A. B. Ryabov, "Particle dynamical in time-dependent stadium-like billiard", *J. Stat. Phys.*, **108**, 995 (2002).

[20] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman e R. H. Cohen, "Fermi acceleration revisited", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1**, 291 (1980).

[21] M. A. Lieberman e K. Y. Tsang, "Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems", *Phys. Rev. Lett*, **55**, 908 (1985).

[22] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, "Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model", *Phys. Rev. E*, **73**, 1 (2006).

[23] D. A. Egolf, "Equilibrium regained: from nonequilibrium chaos to statistical mechanics", *Science*, **287**, 101 (2000).

[24] H. D. Graf *et al.*, "Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics", *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1296 (1992).

[25] T. Sakamoto, *et al.*, "Electron focusing in a widely tapered cross junction", *Jpn. J. Appl. Phys.*, **30**, L1186 (1992).

[26] J. P. Bird, "Recent experimental studies of electron transport in open quantum dots", *J Phys. Condens. Matter.*, **11**, R413 (1992).

[27] M. Robnik e M.V. Berry, "Classical billiards in magnetic fields", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, 1361 (1985).

[28] A. I. Neishtadt e A.V. Artemyev, “Destruction of Adiabatic Invariance for Billiards in a Strong Nonuniform Magnetic Field”, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 064102 (2012).

[29] N. Chernov e R. Markarian, “Chaotic Billiards”, *American Mathematical Society*, (2006).

[30] D. R. da Costa, C. P. Dettmann e E. D. Leonel, “Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat*, **22**, 731 (2014).

[31] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer e E. D. Leonel, “Fermi acceleration and its suppression in a time-dependent Lorentz gas”, *Physica D*, **240**, 389 (2011).

[32] R. Markarian, S. O. Kamphorst e S. P. de Carvalho, “Chaotic properties of the elliptical stadium”, *Commun. Math. Phys.*, **174**, 661 (1996).

[33] V. Lopac, I. Mrkonjić e D. Radić, “Chaotic dynamics and orbit stability in the parabolic oval billiard”, *Phys. Rev. E*, **66**, 1 (2002).

[34] V. Lopac, I. Mrkonjić, N. Pavin e D. Radić, “Chaotic dynamics of the elliptical stadium billiard in the full parameter space”, *Physica D*, **217**, 88 (2006).

[35] M. Hansen, R. Egydio de Carvalho e E. D. Leonel, “Influence of stability islands in the recurrence of particles in a static oval billiard with holes” *Phys. Lett. A*, **380**, 3634 (2016).

[36] Book chapter: Recent advances in open billiards with some open problems: C. P. Dettmann, in *Frontiers in the study of chaotic dynamical systems with open problems*, Editted by Z. Elhadj and J. C. Sprott. World Scientific, (2011).

[37] E. Fermi, “On the origins of the cosmic Radiation”, *Phy. Rev.*, **75**, 1169 (1949).

[38] F. Reif, “Fundamentals of Statistical and Thermal Physics”, *Waveland Press*, (2009).

[39] E. D. Leonel e C. P. Dettmann, “Recurrence of particles in static and time varying oval billiards”, *Phys. Lett. A.*, **376**, 1669 (2012).

[40] A. P. C. Humes, I. S. H. Melo, L. K. Yoshida e W. T. Martins, “Noções de cálculo numérico”, *MacGraw Hill*, (1984).

[41] A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, “A family of stadium-like billiards with parabolic boundaries under scaling analysis”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**, 175102 (2011).

[42] N. Ferrara e C. do Prado, “Caos uma introdução”, *Edgard Blucher* , **1ED**, (1995).

[43] S. H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, *Westview Press* , **1ED**, (2001).

[44] D.F.M. Oliveira, “Bilhares Dependentes do Tempo: Um Mecanismo para Suprimir Aceleração de Fermi”, *Dissertação (Mestrado em Física)*, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2009).

[45] R. A. Bizão, "Dissipação via arrasto viscoso como mecanismo de supressão da aceleração de Fermi o bilhar elíptico-ovóide com fronteira dependente do tempo", *Dissertação (Mestrado em Física)*, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2013).

[46] J.P. Eckmann e D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617 (1985).

[47] P. Boulos e I. de Camargo, "Geometria analítica, um tratamento vetorial", *Pearson Education*, **2ED**, (2003).

[48] N. Friedman, A. Kaplan, D. Carasso e N. Davidson, "Observation of Chaotic and Regular Dynamics in Atom-Optics Billiards", *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 1518 (2001).

[49] U. Kuhl, H. J. Stockmann e R. Weaver, "Classical wave experiments on chaotic scattering", *J. Phys. A*, **38** 10433 (2005).

[50] P. Gaspard e T. Gilbert, "Heat Conduction and Fouriers Law by Consecutive Local Mixing and Thermalization", *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 020601 (2008).

[51] T. Harayama e S. Shinohara, "Two-dimensional microcavity lasers", *Laser Photonics Rev.*, **5**, 247 (2011).

[52] L. A. Bunimovich e C. P. Dettmann, "Open Circular Billiards and the Riemann Hypothesis", *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 100201 (2005).

[53] E. G. Altmann and T. Tél, "Poincaré recurrences and transient chaos in systems with leaks", *Phys. Rev. E*, **79**, 016204 (2009).

[54] M. H. Francisco, "Propriedades estatísticas de bilhares abertos", *Dissertação (Mestrado em Física)*, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, (2015).

[55] L. Poon, J. Campos, E. Ott e C. Grebogi, "Wada basin boundaries in chaotic scattering", *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, **6**, 251 (1996).

[56] E. C. da Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana e M. A. F. Sanjuàn, "Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters", *Phys. Plasmas*, **9**, 4917 (2002).

[57] K. T. Alliggod, T. D. Sauer e J. A. Yorke, "CHAOS. An Introduction to Dynamical Systems", Springer-Verlag, New York, (2012).

[58] S. W. Mcdonald, C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, "Fractal basin boundaries", *Physica D*, **17**, 125 (1985).

[59] F. Lenz, F. K. Diakonos e P. Schmelcher, "Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard", *Phys. Rev. Lett.*, **100** 014103 (2008).

[60] E. D. Leonel e L. A. Bunimovich, "Suppressing Fermi Acceleration in a Driven Elliptical Billiard", *Phys. Rev. Lett.*, **104** 224101 (2010).

[61] B. Batistić, "Exponential Fermi acceleration in general time-dependent billiards", *Phys. Rev. E*, **90** 032909 (2014).

[62] S. O. Kamphorst e S. P. de Carvalho, "Bounded gain of energy on the breathing circle billiard", *Nonlinearity*, **12** 1363 (1999).

[63] R. E. de Carvalho, F. C. de Souza e E. D. Leonel, "Fermi acceleration on the annular billiard: a simplified version", *J. Phys. A: Gen.*, **39** 3561 (2006).

[64] D. F. M. Oliveira, M. R. Silva e E. D. Leonel, "A symmetry break in energy distribution and a biased random walk behavior causing unlimited diffusion in a two dimensional mapping", *Physica A*, **436** 909 (2015).

[65] B. Batistić, "Fermi acceleration in chaotic shape-preserving billiards", *Phys. Rev. E*, **89** 022912 (2014).

[66] V. Gelfreich e D. Turaev, "Fermi acceleration in non-autonomous billiards", *J. Phys. A*, **41** 212003 (2008).

[67] V. Gelfreich, V. Rom-Kedar e D. Turaev, "Fermi acceleration and adiabatic invariants for non-autonomous billiards", *Chaos*, **22** 033116 (2012).

[68] M. Hansen, D. R. da Costa, I. L. Caldas e E. D. Leonel, "Statistical properties for an open oval billiard: An investigation of the escaping basins", *Chaos, Solitons and Fractals*, **106** 355 (2018).

[69] M. Hansen, D. Ciro, I. L. Caldas e E. D. Leonel, "Explaining a changeover from normal to super diffusion in time-dependent billiards", *Europhysics Letters*, **121** 60003 (2018).

[70] R. Hoffmann, "Estatística para Economistas", *Cengage Learning*, (2006).

[71] E. D. Leonel, M. V. C. Galia, L. A. Barreiro e D. F. M. Oliveira, "Thermodynamics of a time-dependent and dissipative oval billiard: A heat transfer and billiard approach", *Phys. Rev. E*, **94** 062211 (2016).

[72] M. Hansen, D. Ciro, I. L. Caldas e E. D. Leonel, "Dynamical thermalization in time-dependent Billiards", *submetido para publicação*, (2019).

[73] E. D. Leonel, "Fundamentos de Física Estatística", *Blucher*, (2015).

Apêndice A

Matriz Jacobiana do bilhar ovóide com fronteira estática

Neste apêndice, discutimos a construção da matriz Jacobiana J para o modelo do bilhar ovóide com fronteira estática discutido na seção (2.3) desta tese. Dado que matriz J é escrita como

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

e que os elementos que a compõe são descritos por

$$j_{11} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n}, \qquad j_{12} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n}, \qquad j_{21} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n}, \qquad j_{22} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \frac{[1 + \operatorname{tg}^2(\phi_n + \alpha_n)\frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n} \triangle X + Y'(\theta_n) - \operatorname{tg}(\phi_n + \alpha_n) X'(\theta_n)]}{\Xi}, \\
\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{\triangle X[1 + \operatorname{tg}^2(\phi_n + \alpha_n)]}{\Xi}, \\
\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n}, \\
\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} - 1,
\end{aligned}$$

onde $\triangle X$, Ξ e $\partial \phi_n / \partial \theta_n$ são variáveis auxiliares dadas por

$$\begin{aligned}
\triangle X &= X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n), \\
\Xi &= \frac{\partial R(\theta_{n+1})}{\partial \theta_{n+1}} [\operatorname{sen}(\theta_{n+1}) - \operatorname{tg}(\phi_n + \alpha_n) \cos(\theta_{n+1})] + \\
&+ R(\theta_{n+1})[\cos(\theta_{n+1}) + \operatorname{tg}(\phi_n + \alpha_n) \operatorname{sen}(\theta_{n+1})],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n} = \left[1 + \left[\frac{Y'(\theta)}{X'(\theta)}\right]^2\right]^{-1} \left[\frac{Y'(\theta)}{X'(\theta)} - \frac{Y'(\theta)X''(\theta)}{[X'(\theta)]^2}\right].$$

Os termos $X'(\theta)$, $Y'(\theta)$, $X''(\theta)$ e $Y''(\theta)$ correspondem, respectivamente, às primeiras e segundas derivadas das coordenadas retangulares da partícula em relação ao ângulo θ, e podem ser descritas como

$$\begin{aligned}
X'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta), \\
Y'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta}\mathrm{sen}(\theta) + R(\theta)\cos(\theta), \\
X''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\cos(\theta) - 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\mathrm{sen}(\theta) - R(\theta)\cos(\theta), \\
Y''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\mathrm{sen}(\theta) + 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{dR(\theta)}{d\theta} &= -\epsilon p\,\mathrm{sen}(p\theta), \\
\frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} &= -\epsilon p^2\cos(p\theta).
\end{aligned}$$

Apêndice B

Curvatura da fronteira do bilhar

Neste apêndice, vamos descrever os cálculos para a obtenção da Eq. (2.15), que indica a ocorrência da troca da curvatura da fronteira do bilhar. Para isso, inicialmente, vamos propor que a curvatura da fronteira do bilhar seja definida como

$$\Gamma = \frac{d\Theta}{d\Omega}, \tag{B.1}$$

onde Θ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre uma reta tangente à superfície Ω e eixo positivo X, como ilustrado na Fig. B.1. Através da variação dos parâmetros de controle do bilhar, podemos fazer com que a curvatura da fronteira Γ mude seu sinal de forma que regiões convexas possam ser exibidas por ela.

No caso de uma fronteira ser descrita, por exemplo, por uma função do tipo $Y = f(X)$, podemos escrever a curvatura dessa fronteira em termos de coordenadas X e Y, e com o auxílio da regra da cadeia, temos que

$$\frac{d\Theta}{d\Omega} = \frac{d\Theta}{dX}\frac{dX}{d\Omega}, \tag{B.2}$$

onde $dX/d\Omega$ pode ser obtido através da descrição de uma pequena parte da superfície Ω, como $\Delta\Omega = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$, onde ΔX e ΔY são pequenos incrementos ao longo dos eixos X e Y.

Com base nessas informações, fazendo $\Delta\Omega/\Delta X$ temos

$$\frac{\Delta\Omega}{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\Delta X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)^2}, \tag{B.3}$$

que ao ser avaliada no limite em que $\Delta X \to 0$, nos leva à

$$\frac{d\Omega}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2}. \tag{B.4}$$

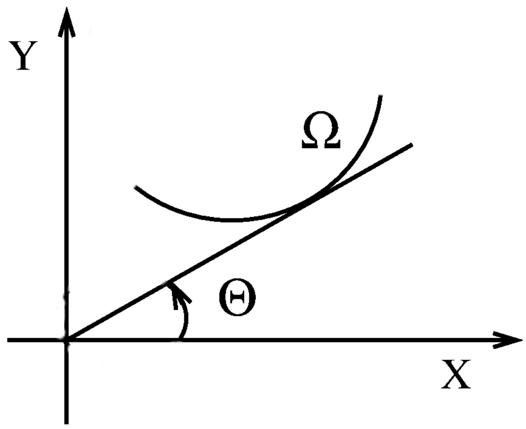

Figura B.1: *Ilustração esquemática para curvatura de uma superfície* Ω*.*

Supondo que a função seja contínua, podemos escrever que

$$\frac{dX}{d\Omega} = \frac{1}{\frac{d\Omega}{dX}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2}}, \tag{B.5}$$

o que de certa forma acaba resolvendo parcialmente a Eq. (B.2).

Para a resolução da segunda parte da Eq. (B.2), ou mais especificamente descrever a forma como é dado $d\Theta/dX$, vamos utilizar o coeficiente angular da reta tangente à superfície Ω, ou seja, $dY/dX = \text{tg}\Theta$, o que através de uma derivação implícita em relação a coordenada X, nos leva a

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dX^2} &= \left[\frac{1}{\cos^2\Theta}\right]\frac{d\Theta}{dX} = \left[\sec^2\Theta\right]\frac{d\Theta}{dX}, \\ \frac{d\Theta}{dX} &= \frac{d^2Y}{dX^2}\left[\frac{1}{1+\text{tg}^2\Theta}\right], \\ \frac{d\Theta}{dX} &= \frac{d^2Y}{dX^2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Munidos dessas informações e substituindo as Eq. (B.5) e Eq. (B.6) na expressão da curvatura Γ fornecida pela Eq. (B.1), temos

$$\Gamma = \frac{d^2Y}{dX^2}\left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{-3/2}, \tag{B.7}$$

onde Γ corresponde a curvatura de uma fronteira descrita por uma função do tipo $Y = f(X)$. Para o caso do bilhar, a fronteira é descrita em termos de coordenadas polares que podem ser decompostas como

$$\vec{R}(\theta) = X(\theta)\hat{\imath} + Y(\theta)\hat{\jmath},$$

onde $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ são os versores unitários nas direções X e Y respectivamente.

Analisando a Eq. (B.7) e com o auxílio mais uma vez da regra da cadeia, podemos escrever que

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{d\theta}\frac{d\theta}{dX}, \tag{B.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{d}{dX}\left(\frac{dY}{dX}\right), \\
\frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{d}{dX}\left(\frac{dY}{d\theta}\frac{d\theta}{dX}\right), \\
\frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{dY}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{d\theta}{dX}\frac{d}{dX}\left(\frac{dY}{d\theta}\right), \\
\frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{dY}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{d\theta}{dX}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dY}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dX}, \\
\frac{d^2Y}{dX^2} &= \frac{dY}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dX^2} + \left(\frac{d\theta}{dX}\right)^2\frac{d^2Y}{d\theta^2}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Com a informação de que $d\theta/dX = (dX/d\theta)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta}{dX^2} &= \frac{d}{dX}\left(\frac{d\theta}{dX}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^{-1}, \\
\frac{d^2\theta}{dX^2} &= -\frac{d}{dX}\left(\frac{dX}{d\theta}\right)\left[\frac{dX}{d\theta}\right]^{-2}, \\
\frac{d^2\theta}{dX^2} &= -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dX}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dX}\left[\frac{dX}{d\theta}\right]^{-2}, \\
\frac{d^2\theta}{dX^2} &= -\frac{d^2X}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dX}\left[\frac{dX}{d\theta}\right]^{-2}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Fazendo a substituição da Eq. (B.10) na Eq. (B.9), podemos finalmente atualizar a Eq. (B.7) de modo a obter uma expressão que nos leva a curvatura Γ da fronteira do bilhar, que tem sua forma final dada por

$$\Gamma(\theta) = \frac{X'(\theta)Y''(\theta) - Y'(\theta)X''(\theta)}{[X'^2(\theta) + Y'^2(\theta)]^{3/2}}, \tag{B.11}$$

onde $X'(\theta), X''(\theta), Y'(\theta), Y''(\theta)$ são as primeiras e segundas derivadas das componentes retangulares X, Y em relação ao ângulo θ.

Para o bilhar ovóide com o raio definido pela Eq.(2.1), as equações que devem ser utilizadas na expressão da curvatura $\Gamma(\theta)$ são dadas por

$$X'(\theta) = \frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta), \tag{B.12}$$

$$
\begin{aligned}
Y'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta) + R(\theta)\cos(\theta), && \text{(B.13)}\\
X''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\cos(\theta) - 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\operatorname{sen}(\theta) - R(\theta)\cos(\theta), && \text{(B.14)}\\
Y''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2}\operatorname{sen}(\theta) + 2\frac{dR(\theta)}{d\theta}\cos(\theta) - R(\theta)\operatorname{sen}(\theta), && \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\frac{dR(\theta)}{d\theta} &= -\epsilon p \operatorname{sen}(p\theta), && \text{(B.16)}\\
\frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} &= -\epsilon p^2 \cos(p\theta). && \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

Para encontrar o ponto onde ocorre a mudança da curvatura da fronteira, basta observar quando $\Gamma(\theta) = 0$. Após realizar esses cálculos, encontramos que a troca de concavidade da fronteira acontece quando o parâmetro ϵ atinge um valor crítico ϵ_c, de modo que para valores de $\epsilon < \epsilon_c$ o bilhar exibe uma curvatura $\Gamma(\theta) > 0$ (côncava), enquanto que para um $\epsilon > \epsilon_c$ a fronteira tem curvatura $\Gamma(\theta) < 0$ (convexa). No caso em que $\epsilon = \epsilon_c$, temos exatamente o ponto onde ocorre a troca do sinal da curvatura da fronteira, o que reflete no instante em que as trajetórias do tipo *whispering gallery orbits* são destruídas no interior do bilhar. A expressão final para a determinação da criticalidade do parâmetro ϵ é dada como

$$
\epsilon_c = \frac{1}{1+p^2}, \qquad p \geq 1. \tag{B.18}
$$

Apêndice C

Aproximação para média ao longo da órbita

Neste apêndice, descrevemos o método utilizado para encontrar a aproximação feita na Eq. (3.59) de modo a reproduzir o comportamento da média ao longo da órbita. Para isso, inicialmente vamos supor um conjunto de velocidades tal como $\{V_0, V_1, V_2, V_3, ..., V_n\}$, que representa o histórico de velocidades de uma partícula ao longo de uma órbita qualquer. O somatório para esse conjunto de velocidades pode ser representado da seguinte forma

$$S = \sum_{j=0}^{n} V_j. \tag{C.1}$$

Agora, vamos definir uma função $f(x)$, tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e que para um $F(j)$ com $j \in \mathbb{N}$, temos um $f(j) = V_j$, ou seja, para qualquer valor inteiro positivo a função nos leva a uma velocidade do histórico discutido acima.

Naturalmente, esperamos que

$$\int_0^{n+1} f(x)dx > \sum_{j=0}^{n} V_j, \tag{C.2}$$

logo, vamos definir um coeficiente Θ de modo que

$$\int_0^{n+1} f(x-\Theta)dx \approx \sum_{j=0}^{n} V_j, \tag{C.3}$$

ou seja, buscamos um coeficiente que nos permita fazer uma aproximação entre área da integral e a área obtida através do somatório.

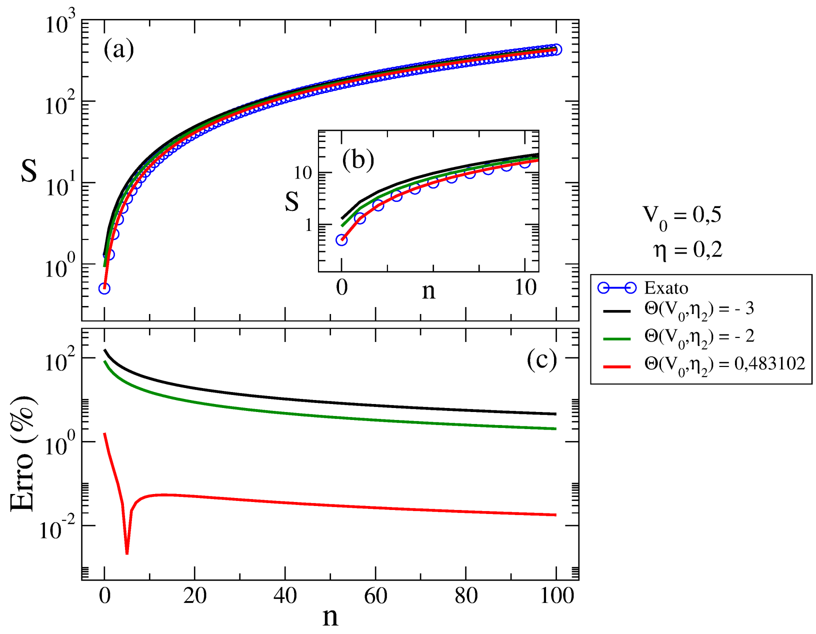

Figura C.1: *(a) Comparação entre o valor exato do somatório S com a aproximação S' encontrada para diferentes valores de $\Theta(V_0, \eta_2)$; (b) Comparação entre entre S e S' para um número pequenos n; (c) Evolução do erro relativo percentual entre o somatório exato e sua aproximação.*

Sabendo que o somatório a ser estudado é escrito como

$$S = \sum_{j=0}^{n} (V_0^2 + 2\eta_2 j)^{1/2}, \tag{C.4}$$

vamos então definir uma função $f(x - \Theta)$, tal como

$$f(x - \Theta) = [V_0^2 + 2\eta_2(x - \Theta)]^{1/2}, \tag{C.5}$$

de modo que

$$S' = \int_0^{n+1} [V_0^2 + 2\eta_2(x - \Theta)]^{1/2} dx. \tag{C.6}$$

A integral dada pela Eq.(C.6) pode ser resolvida através de uma substituição apropriada das variáveis de integração, resultando em

$$S' = \frac{1}{3\eta_2}[V_0^2 + 2\eta_2(x - \Theta)]^{3/2}\Big|_0^{n+1}, \tag{C.7}$$

que após ter sido avaliado nos limites de integração, nos leva a

$$S' = \frac{1}{3\eta_2}\left[[V_0^2 + 2\eta_2(n + 1 - \Theta)]\sqrt{V_0^2 + 2\eta_2(n + 1 - \Theta)} - (V_0^2 - 2\eta_2\Theta)^{3/2}\right]. \tag{C.8}$$

Note que a aproximação encontrada na Eq. (C.8) é dada em função do coeficiente Θ que deve ser ajustado de maneira a satisfazer algumas condições do problema. A figura C.1(a) apresenta a comparação entre o resultado exato do somatório dado pela Eq. (C.4) em comparação com a aproximação feita para diferentes valores de Θ. É possível observar que independente do valor atribuído a Θ, para grandes valores de n a aproximação S' converge muito bem ao valor exato de S, entretanto como pode ser verificado na Fig. C.1(b), a aproximação S' reproduz com pouca qualidade o comportamento inicial do somatório S. Sendo assim, de forma a tornar a aproximação dada pela Eq. (C.8) válida também para pequenos valores de n, vamos procurar um coeficiente Θ, tal que, para um $n = 0$ o valor de $S' = V_0$.

Utilizando de recursos numéricos computacionais, encontramos que para valores de $V_0 = 0,5$ e $\eta_2 = 0,2$, obtemos um $\Theta = 0,483102$, que como pode ser verificado na Fig. (C.1)(b), reproduz muito bem tanto o comportamento inicial quanto o comportamento final da solução exata do somatório dado pela Eq. (C.4).

A figura C.1(c) apresenta os valores do erro relativo percentual da aproximação S' em comparação com S para diferentes valores do coeficiente Θ, onde podemos observar que para o valor numérico obtido do coeficiente, temos um erro da ordem de 1% para pequenos n e $0,016\%$ para valores grande de n, o que torna a aproximação proposta confiável.

É importante ressaltar que alterações nas quantidades V_0 e η_2 necessariamente acarretam em variações do valor do coeficiente, o que implica em $\Theta(V_0, \eta_2)$. Desta forma, finalmente podemos escrever que

$$\overline{V} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(V_0^2 + 2\eta_2 j)^{1/2} \approx \frac{1}{3\eta_2(n+1)}\left[(V_0^2+\Omega_1)\sqrt{V_0^2+\Omega_1} - (V_0^2-\Omega_2)^{3/2}\right],$$

onde

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 2\eta_2\left[n+1-\Theta(V_0,\eta_2)\right],\\ \Omega_2 &= 2\eta_2\Theta(V_0,\eta_2),\end{aligned}$$

o que completa a dedução da aproximação feita na Eq. (3.59).