PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 1

11 de setembro de 2024

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 12/09/2024.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para luis.bernardi.souza@usp.br ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

Questão 1 A Lagrangiana de um elétron de massa m e carga $-e$ em um campo magnético é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{e}{c}\right)\vec{v}\cdot\vec{A},$$

na ausência de um campo elétrico. No caso de um movimento em uma plano, temos que $\vec{A} = (B/2)(-y, x)$.

(a) Obtenha a hamiltoniana do sistema em coordenadas polares (r, φ). **(0,5 ponto)**

(b) Considere um movimento circular: encontre o raio da órbita r_0 e sua frequência angular ω. **(1 ponto)**

(c) Estude a estabilidade de órbitas circulares para uma perturbação radial $r = r_0 + \rho$, onde $\rho << r_0$, e determine a natureza e a frequência de pequenas oscilações do movimento radial. **(0,5 ponto)**

Questão 2 Considere o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação do potencial conservativo:

$$V(q) = \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{A}{3}q^3,$$

com $\omega > 0$ e $A > 0$.

(a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana do sistema. **(0,5 ponto)**

(b) Verifique que H é uma constante de movimento. **(0,5 ponto)**

(c) Verifique que $(q, p) = (0, 0)$ e $(\omega^2/A, 0)$ são pontos fixos no espaço de fase $p \times q$. **(0,5 ponto)**

(d) Faça um esboço do gráfico de V em função de q. **(0,5 ponto)**

(e) **(0,5 ponto)** Mostre que a equação da trajetória da separatriz (que separa as trajetórias periódicas das demais) é dada por:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} = \frac{\omega^6}{6A^2}.$$

(f) Faça um esboço das possíveis trajetórias (linhas com H constante) no espaço de fase para diferentes valores de H. Identifique no esboço os pontos fixos, a separatriz e as trajetórias confinadas e não confinadas. **(1,5 ponto)**

Questão 3 A Hamiltoniana de um sistema é,

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = p_1^2 + p_2^2 + \epsilon \cos(q_2 + ct),$$

sendo ϵ e c constantes conhecidas.

A função geratriz,

$$S = q_1 P_1 + P_2(q_2 + ct),$$

pode ser usada para obter um novo conjunto de variáveis canônicas (Q, P) e Hamiltoniana H, tal que,

$$\frac{\partial H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial t} = 0.$$

Obtenha:

(a) as novas variáveis Q_1, Q_2, P_1 e P_2 em função das antigas q_1, q_2, p_1 e p_2. **(0,5 ponto)**

(b) a nova Hamiltoniana $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. **(0,5 ponto)**

Questão 4 Considere a Hamiltoniana

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2,$$

na qual I_j e θ_j, $j = 1, 2$, são variáveis canonicamente conjugadas.

(a) Dados os valores iniciais I_j^0 e θ_j^0, no instante de tempo $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$. **(0,5 ponto)**

(b) Daqui em diante, considere a seguinte Hamiltoniana perturbada:

$$H = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2),$$

na qual $\alpha \ll 1$. Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento. **(0,5 ponto)**

(c) (1 ponto) Mostre que a seguinte transformação, das variáveis (θ_j, I_j) para as variáveis (ϕ_j, J_j), é canônica:

$$J_1 = I_1 + I_2, \quad J_2 = I_2, \quad \phi_1 = \theta_1, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

(d) (0,5 ponto) Obtenha a Hamiltoniana $H(\phi_j, J_j)$:

$$H = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2) \cos(2\phi_2).$$

(e) O sistema perturbado é integrável? Justifique. **(0,5 ponto)**

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t) \ + \ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = \sin\varphi$$