PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 2

27 de setembro de 2023

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 28/09/2023.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para mmugnaine@gmail.com ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

Questão 1 Inicialmente, considere a Hamiltoniana integrável,

$$H_0 = \frac{I^2}{2},$$

a qual descrevemos em termos da variável de ação I. A seguir, considere a Hamiltoniana H composta pela função H_0 e duas perturbações dependentes da variável angular θ e do tempo canônico τ:

$$H(\theta, I, \tau) = H_0(I) - a\cos\theta - b\cos(2\theta - \tau),$$

na qual as constantes $a \ll 1$ e $b \ll 1$ representam os parâmetros de controle.

(a) Mostre que as perturbações atuam de forma ressonante sobre trajetórias com ações em torno dos valores $I = 0$ e $I = 0.5$.

(b) Calcule o espaçamento δI entre as ressonâncias no espaço de fase $I \times \theta$.

(c) Calcule a largura no espaço de fase Δ_a da ilha localizada na região da ressonância com $I = 0$. Neste caso, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($b = 0$).

(d) Calcule a largura no espaço de fase Δ_b de uma ilha localizada na região da ressonância com $I = 0.5$. Nesta situação, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($a = 0$).

(e) Escreva, em função dos valores dos parâmetros a e b, a condição de Chirikov para a observação, no espaço de fase, de caos global na região entre as duas ressonâncias discutidas anteriormente.

Questão 2 Considere a seguinte Hamiltoniana:

$$H = \frac{J^3}{8} + \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3t), \qquad \epsilon \ll 1,$$

na qual (ϕ, J) são as variáveis de ângulo e ação do sistema para $\epsilon = 0$.

(a) Estime o valor da condição inicial $J(t = 0) = \beta_r$ para o qual a perturbação sobre a trajetória, decorrente do termo da Hamiltoniana que depende do parâmetro ϵ, é ressonante.

Considere agora as trajetórias próximas à região de ressonância, ou seja, com condição inicial $J(t=0) \approx \beta_r$.

(b) Expandindo H em torno de $J = \beta_r$, obtenha a Hamiltoniana,

$$h(\phi, \Delta J) = \omega_0 \Delta J + \frac{3\beta_r}{8} \Delta J^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos(2\phi - 3t).$$

Indique as transformações necessárias para obter h.

(c) Realize a transformação canônica com função geratriz $S = I(2\phi - 3t)$, entre os conjuntos de variáveis $(\phi, \Delta J)$ e (θ, I), e reescreva a Hamiltoniana h como,

$$\bar{h}(\theta, I) = \frac{3\beta_r}{2} I^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos\theta.$$

(d) Calcule a semi-largura Δ da ilha próxima à região da ressonância para $\bar{h}$.

Questão 3 Utilizando novamente a Hamiltoniana H da questão **2**, considere agora as trajetórias distantes da região de ressonância. O objetivo desta questão é analisar os efeitos da perturbação $H_1 = \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3t)$ sobre as trajetórias da Hamiltoniana $H_0 = \dfrac{J^3}{8}$.

(a) Escreva a transformação canônica entre as variáveis (ϕ, J) e (θ, I) para que a nova Hamiltoniana seja escrita no seguinte formato:

$$H(\theta, I) = I^3 - 3I + 4\epsilon I^2 \cos\theta \tag{1}$$

(b) Considerando a Hamiltoniana (1), calcule $\theta(t)$ e $I(t)$ para o caso em que $\epsilon = 0$. Considere a trajetória com condições iniciais $\phi(t=0) = \alpha$ e $J(t=0) = \beta$. Explicite $\theta(t=0)$ e $I(t=0)$ em termos de α e β.

(c) Para $\epsilon \ll 1$, calcule a solução $I(t)$ perturbada, devida ao termo H_1, levando em conta apenas as correções de primeira ordem em ϵ

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$\phi = \phi^{(0)}(\theta, I) + \epsilon\phi^{(1)}(\theta, I) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad J = J^{(0)}(\theta, I) + \epsilon J^{(1)}(\theta, I) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$K(I) = K_0(I) + \epsilon K_1(I) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad K_1(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\theta, I) d\theta$$

$$J^{(1)} = \frac{K_1(I) - H_1(\theta, I)}{\omega_0(I)} \qquad \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\partial J^{(1)}}{\partial I}$$