

Sincronização de Osciladores Forçados

Disciplina: Sistemas Dinâmicos Não Lineares
PGF5326-2

IF-USP

Maio/2022

Introdução

1 – Sincronização no Circuito de Kuramoto

2 - Sensibilidade na Sincronização de Rede de Osciladores

3- Sincronização de Fase entre um Atrator Caótico e um Forçamento Periódico

1 – Sincronização no Circuito de Kuramoto

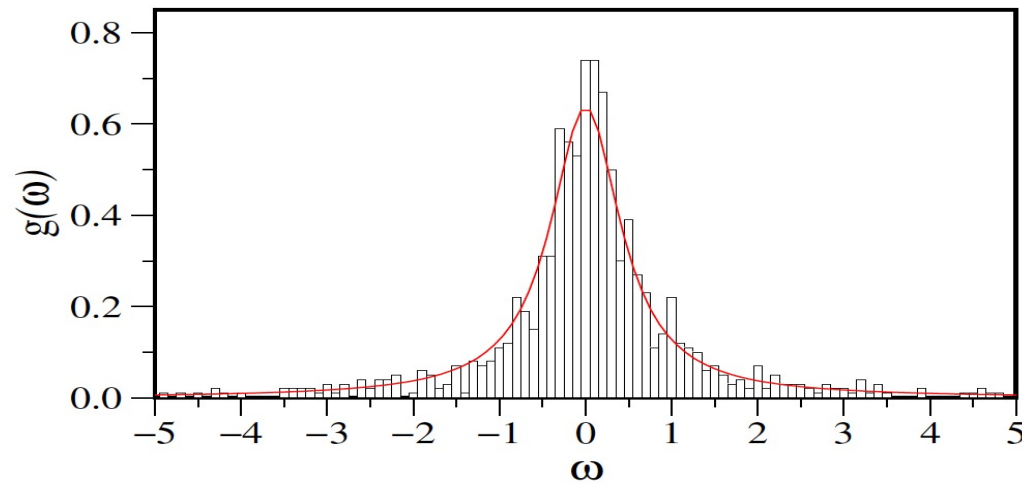
Sobre vagalumes, pedestres e neurônios: a sincronização de osciladores de fase

A. S. Reis, I. L. Caldas, R. L. Viana

Revista Brasileira de Ensino de Física 44, e20210368 (2022)

Modelo de Kuramoto para Rede de N osciladores acoplados

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$



Distribuição de Lorentz

$$g(\tilde{\omega}) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + \tilde{\omega}^2)}$$

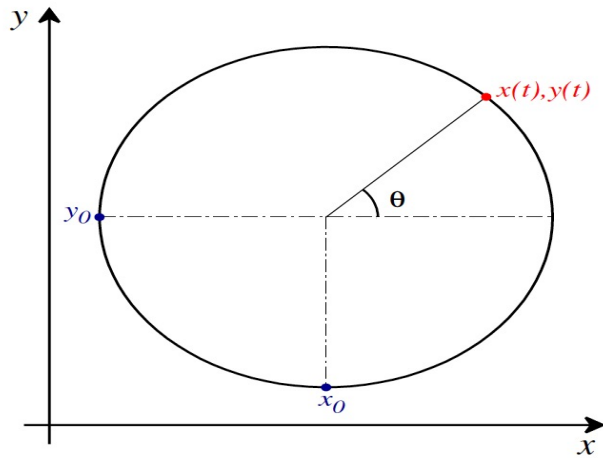
Figura 3. Histograma para as frequências naturais de $N = 1000$ osciladores de fase. A curva vermelha representa uma distribuição Lorentziana (26) com $\gamma = 0,5$.

Frequências resultantes

$$\Omega_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Parâmetro de Ordem Complexo

Fase



Representação do atrator; após o transiente

Figura 1. Ilustração da determinação de uma fase geométrica para o movimento sobre um ciclo limite atrativo descrito no plano de fase x, y , sendo x_0, y_0 , os pontos considerados no interior do plano de fase.

$$z(t) = r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}$$

$r = 1$ totalmente sincronizado

$r = 0$ não sincronizado

Valor calculado está no
Intervalo $0 < r < 1$

Parâmetro de Ordem Complexo

$$z(t) = r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}$$

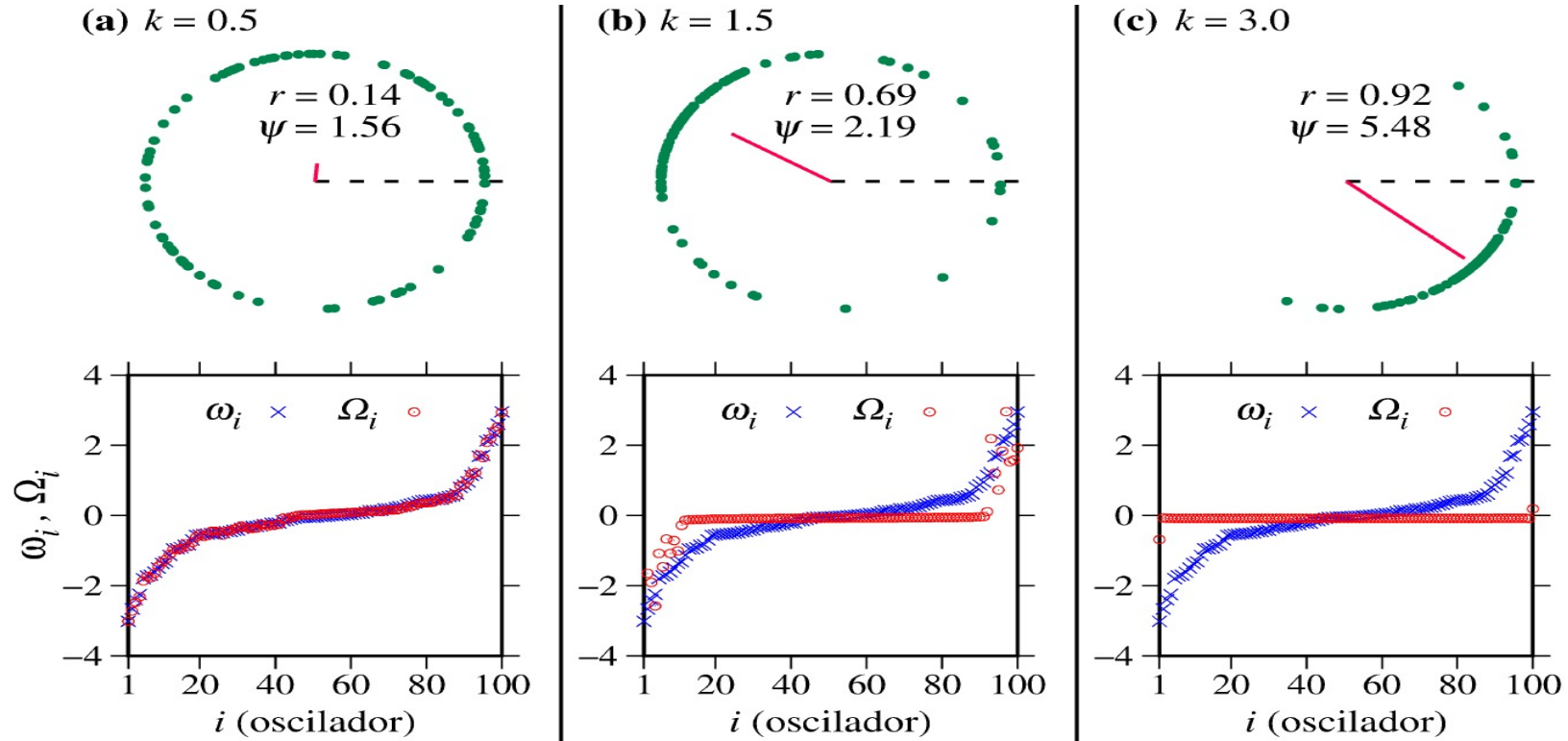


Figura 4. Fases (acima) e frequências perturbadas (cor vermelha, abaixo) e não-perturbadas (cor azul, abaixo) para o modelo de Kuramoto com $N = 100$ osciladores nos casos (a) $K = 0,5$; (b) $1,5$; (c) $3,0$. Nos painéis acima indicamos os parâmetros de ordem correspondentes aos três casos.

Sincronização depende do parâmetro K

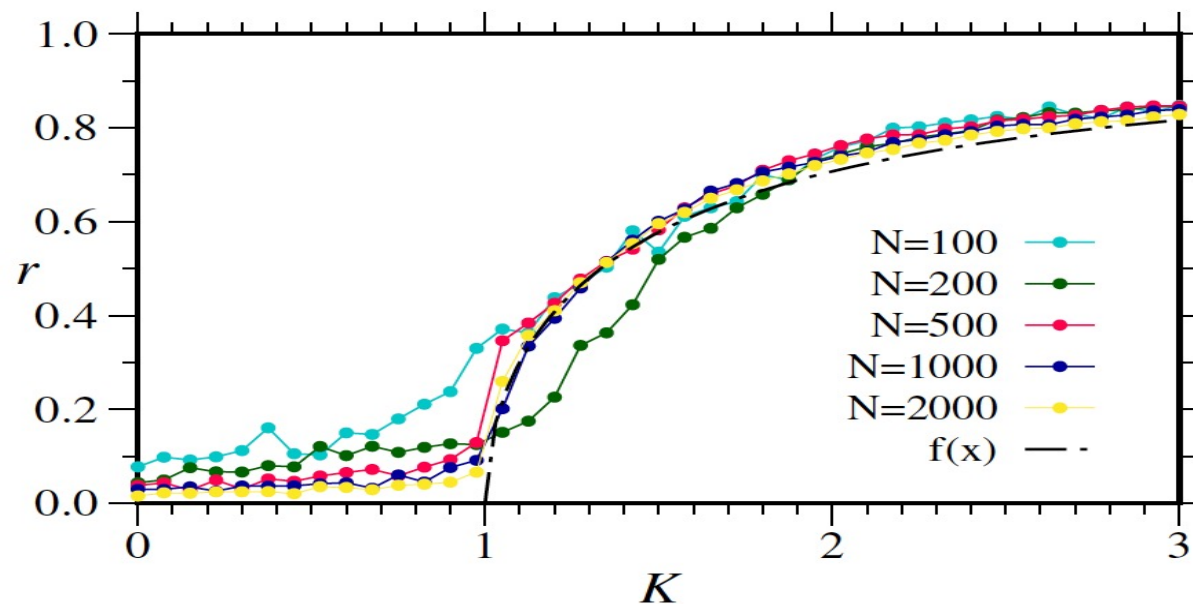


Figura 5. Módulo do parâmetro de ordem em função da intensidade de acoplamento em um sistema de $N = 100, 200, 500, 1000$ e 2000 osciladores de fase acoplados segundo o modelo de Kuramoto. A linha tracejada preta representa a previsão teórica (57) no limite de N grande.

Conclusões

Sincronização: propriedade emergente da rede

Parâmetro de controle

2 - Sensibilidade na Sincronização de Rede de Osciladores

Boundaries of synchronization in oscillator networks

E. S. Medeiros, R. Medrano T., I. L. Caldas, U. Feudel

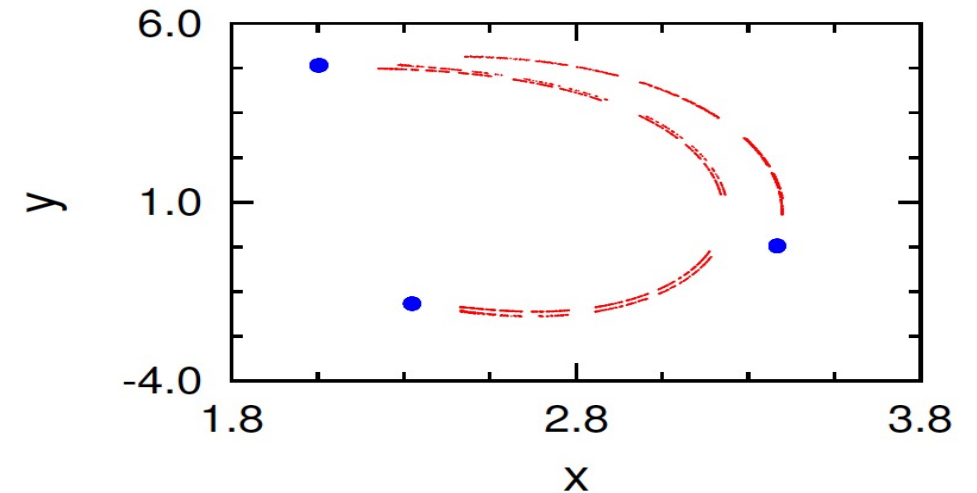
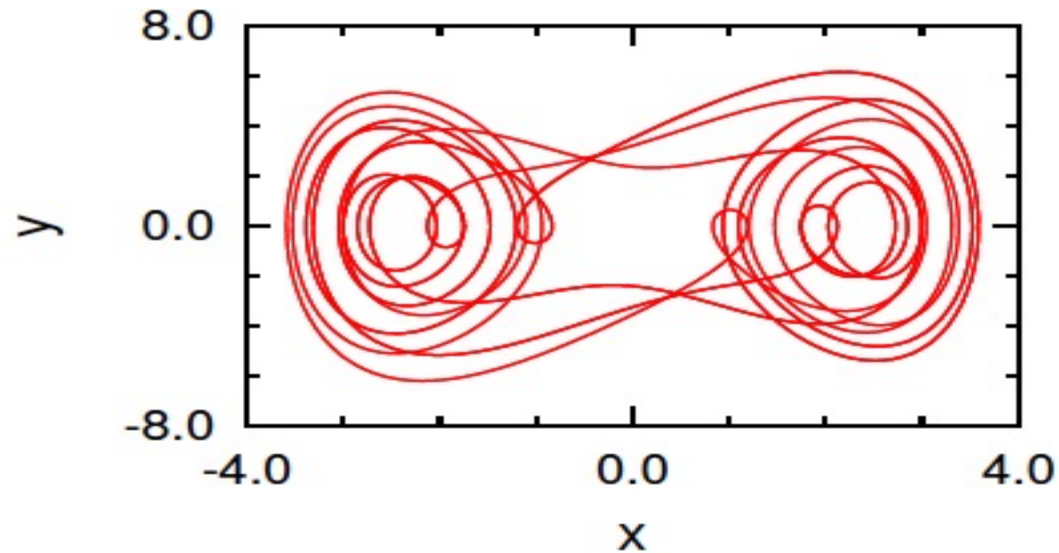
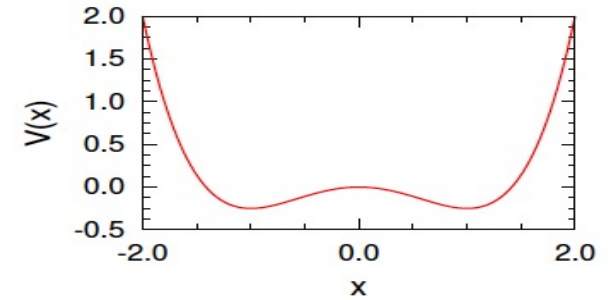
Phys. Rev. E 98 (2018), Rapid Communications

Dynamics of the units described by Duffing equation

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\gamma y + x - x^3 + A \cos(\omega t).\end{aligned}$$

$$\gamma = 0.24 \quad A = 13.6330 \quad \omega = 0.5$$

For these parameters: stable periodic orbit and chaotic saddle



Stroboscopic Map ($T = 2\pi/\omega$)

Connecting such units in a network

$$\dot{x}_i = y_i + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{j=i+R} (x_j - x_i),$$

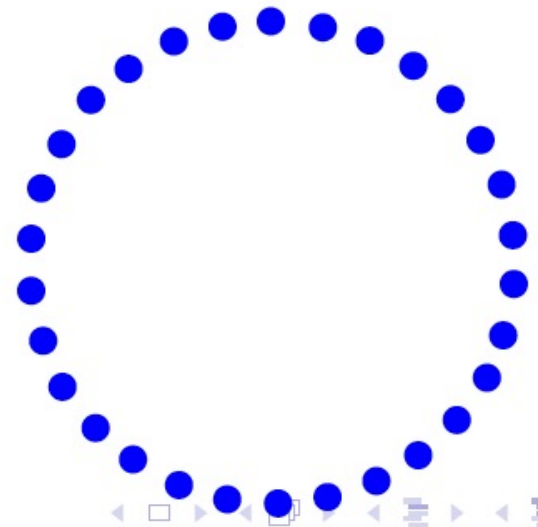
$$\dot{y}_i = -\gamma y_i + x_i - x_i^3 + A \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{j=i+R} (y_j - y_i)$$

Network parameters:

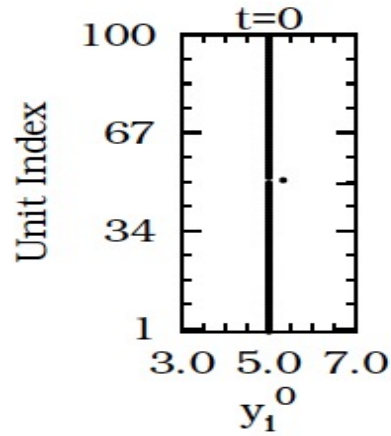
$$N = 100$$

$$R = 5$$

$$\sigma = 0.0040$$



Defining a synchronization manifold:



Synchronization manifold (x_i^0, y_i^0) :

$$x_i^0 = -5.0$$

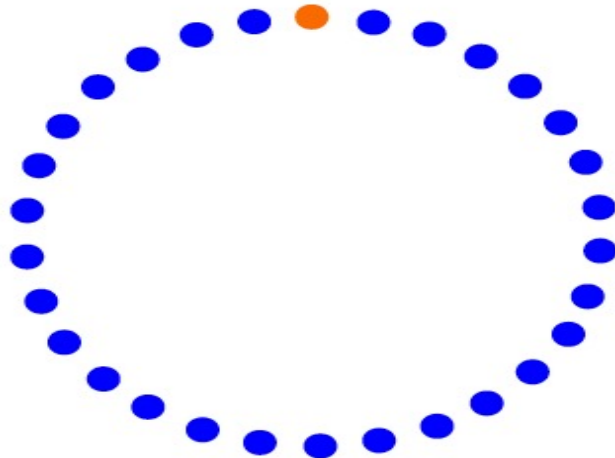
$$y_i^0 = 5.0$$

Perturbation (x_{50}^0, y_{50}^0) :

$$x_{50}^0 = -1.6$$

$$y_{50}^0 = 5.328$$

Sync error: $E_i(t) = \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_{i-1}(t)\|$



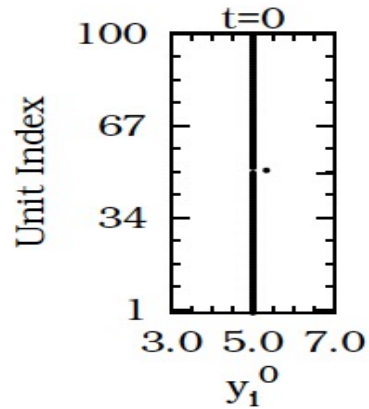
Defining an order parameter to identify synchronization:

$$E_i = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|$$

$\mathbf{r}_i$ is the state vector of the dynamical variables (x_i, y_i) ;

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i, \quad K_i = \begin{cases} 1, & \text{if } E_i > \gamma \\ 0, & \text{if } E_i < \gamma. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \gamma = 0.01 \\ N = 25 \end{array}$$

Defining a synchronization manifold:



Synchronization manifold (x_i^0, y_i^0) :

$$x_i^0 = -5.0$$

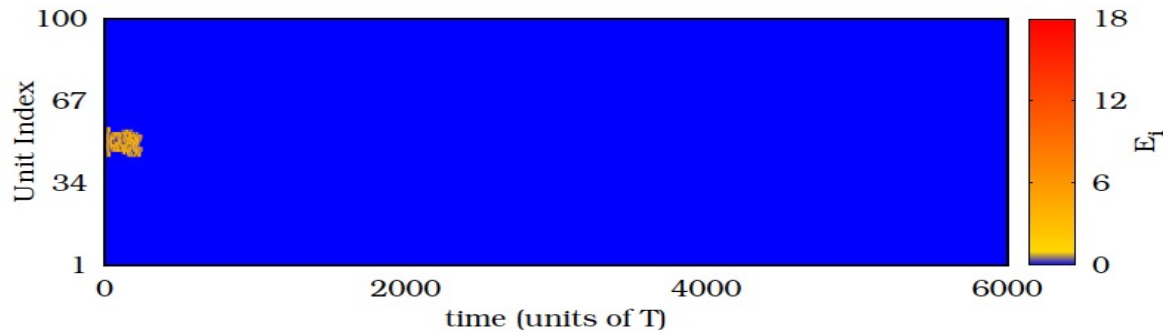
$$y_i^0 = 5.0$$

Perturbation (x_{50}^0, y_{50}^0) :

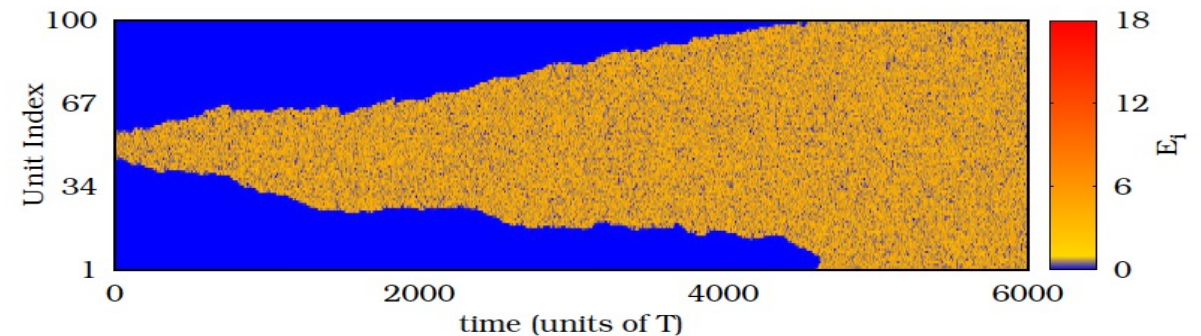
$$x_{50}^0 = -1.6$$

$$y_{50}^0 = 5.328$$

Evolving in time: Sync error $E_i(t) = \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_{i-1}(t)\|$



$$x_{50}^0 = -1.6$$
$$y_{50}^0 = 5.328$$



$$\Delta y_{50}^0 = 10^{-4}$$

Defining an order parameter to identify synchronization:

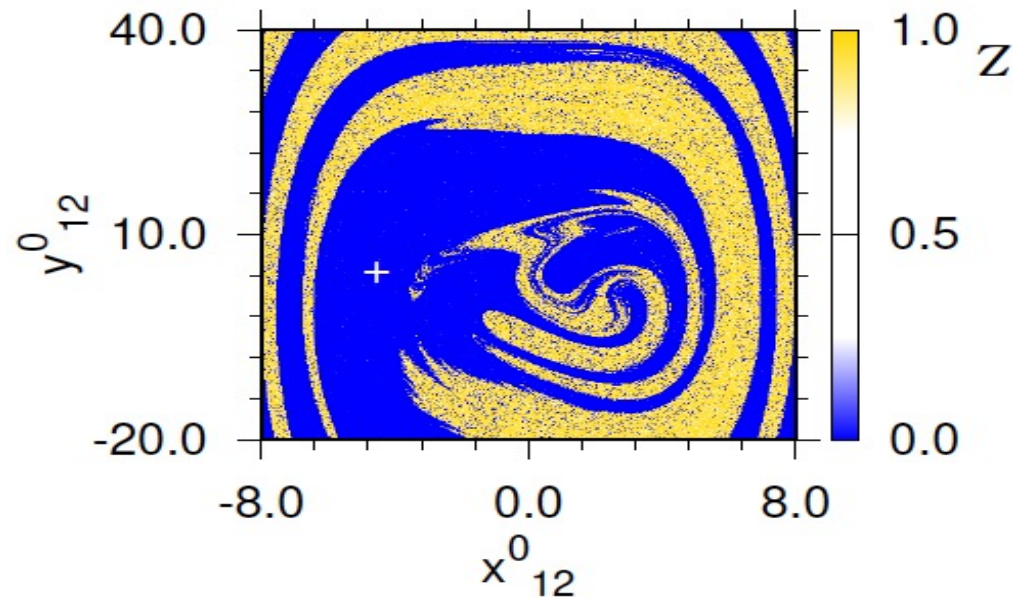
$$E_i = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|$$

$\mathbf{r}_i$ is the state vector of the dynamical variables (x_i, y_i) ;

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i, \quad K_i = \begin{cases} 1, & \text{if } E_i > \gamma \\ 0, & \text{if } E_i < \gamma. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \gamma = 0.01 \\ N = 25 \end{array}$$

Synchronization Basin

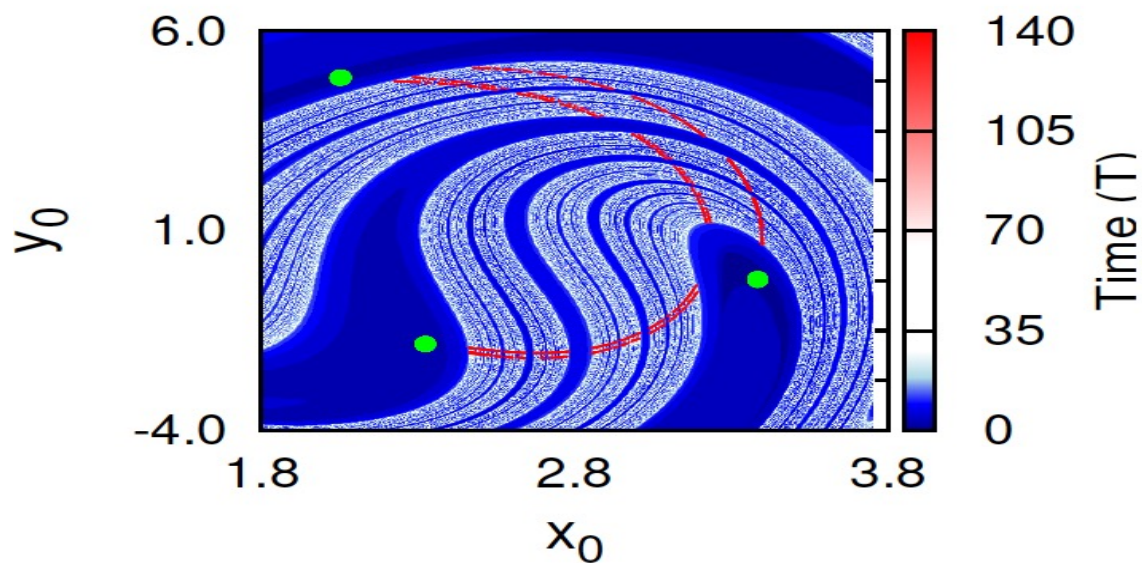
Fractal Boundary



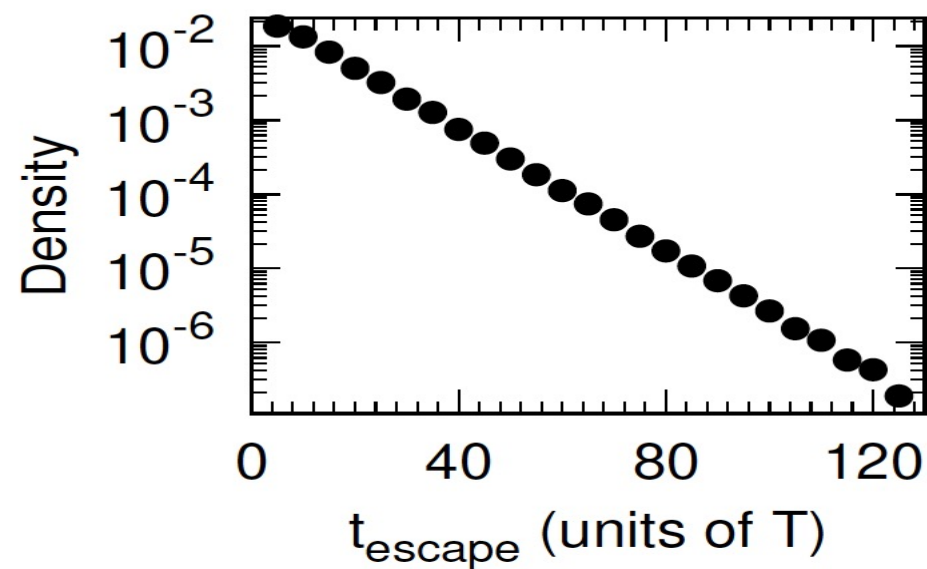
$Z = 0$ sincronizado

$Z = 1$ não sincronizado

Ways to the saddle: Stable manifold of the chaotic saddle.

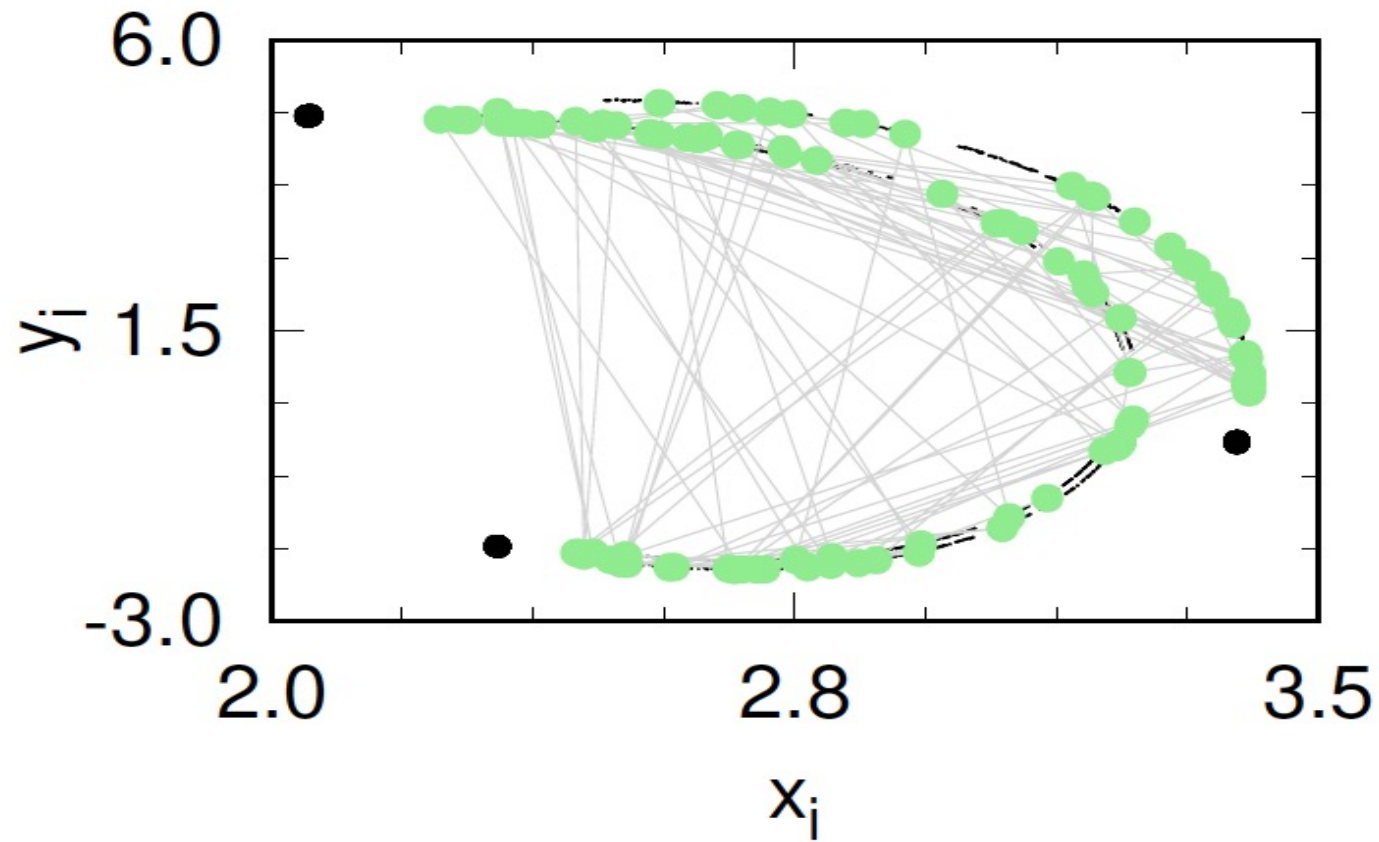


The last point concerning to the local dynamics: Distribution of escape times



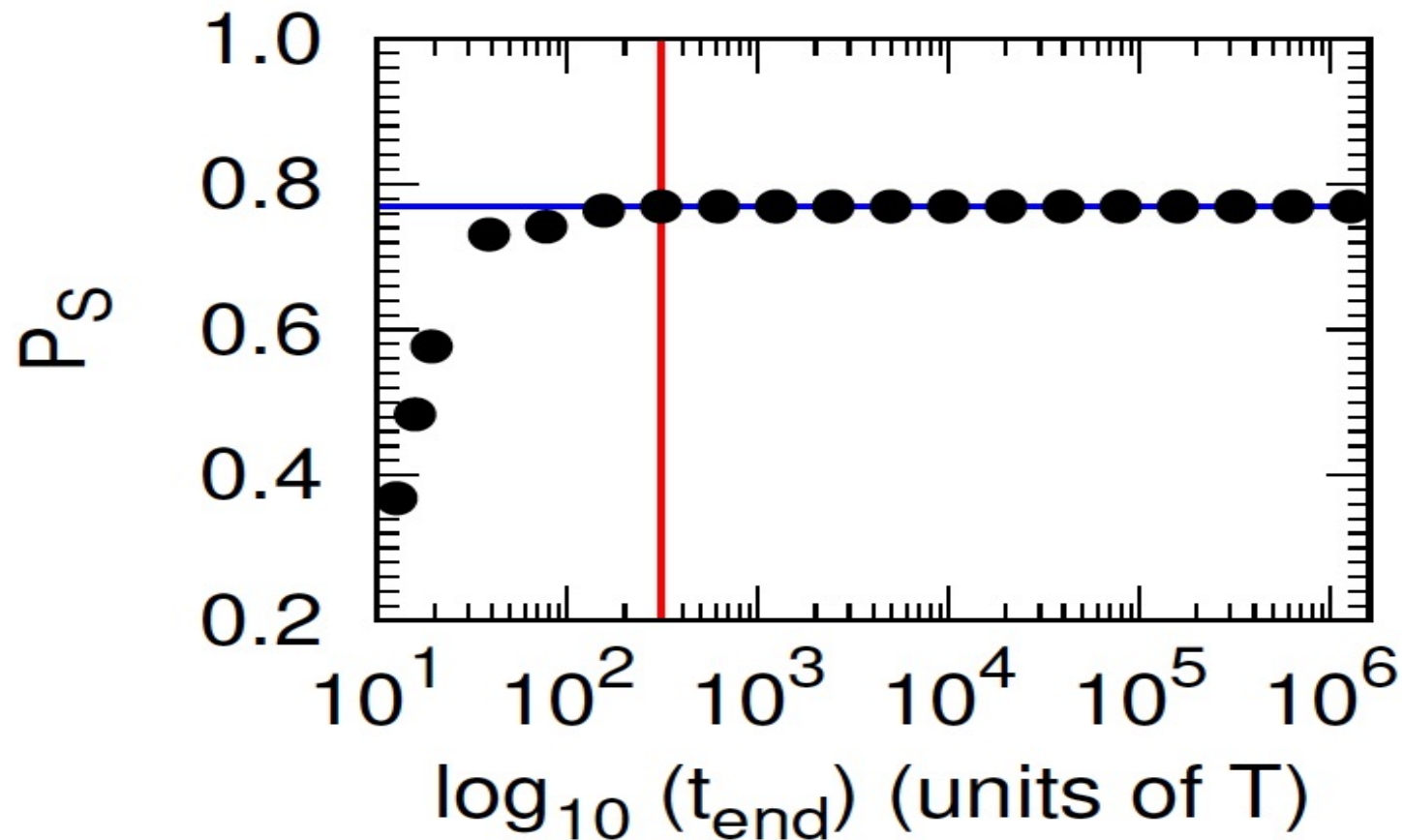
Long term existence of the desynchronized state:

Even after 10^6 periods of the system forcing, the units still are spread over the chaotic set.



Long term existence of the desynchronized state:

For 200 different initial conditions, after a transient, a constant fraction synchronizes.



Conclusões

- Acesso à bacia de sincronização perturbando apenas um oscilador da rede.
- Conjunto caótico de um único oscilador determina a sincronização do sistema.
- Rede exibe sensibilidade de sincronização na rede.

3 - Sincronização de Fase entre um Atrator Caótico e um Forçamento periódico

Transition to Phase Synchronization of Chaos

Epaminondas Rosa, Jr.,* Edward Ott, and Mark H. Hess

Institute for Plasma Research, University of Maryland, College Park, Maryland 20742

Procedimento para medir a diferença de fase entre um atrator caótico (sistema de Rössler) e um forçamento periódico.

Universidade de Maryland

Experimental Real-Time Phase Synchronization of a Paced Chaotic Plasma Discharge

Catalin M. Ticos, Epaminondas Rosa, Jr., William B. Pardo, Jonathan A. Walkenstein, and Marco Monti

Nonlinear Dynamics Laboratory, Department of Physics, University of Miami, Coral Gables, Florida 33146

Aplicação em um experimento com tubo de descarga em plasma.

Universidade de Miami

FIG. 1. (a) The Chua circuit, and (b) the piecewise linear characteristic curve of the resistor R_{NL} . The perturbation introduced is $V \sin(2\pi f t)$.

PHYSICAL REVIEW E **67**, 056212 (2003)

Phase synchronization in the perturbed Chua circuit

Murilo S. Baptista, Tiago P. Silva, José C. Sartorelli, and Iberê L. Caldas

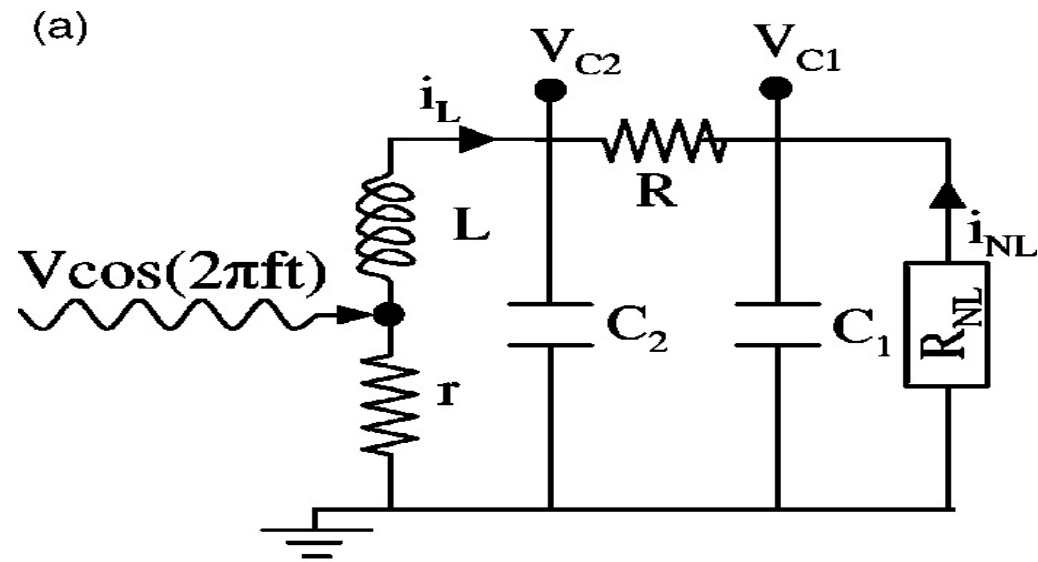
Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil

Epaminondas Rosa, Jr.

Department of Physics, Illinois State University, Normal, Illinois, USA

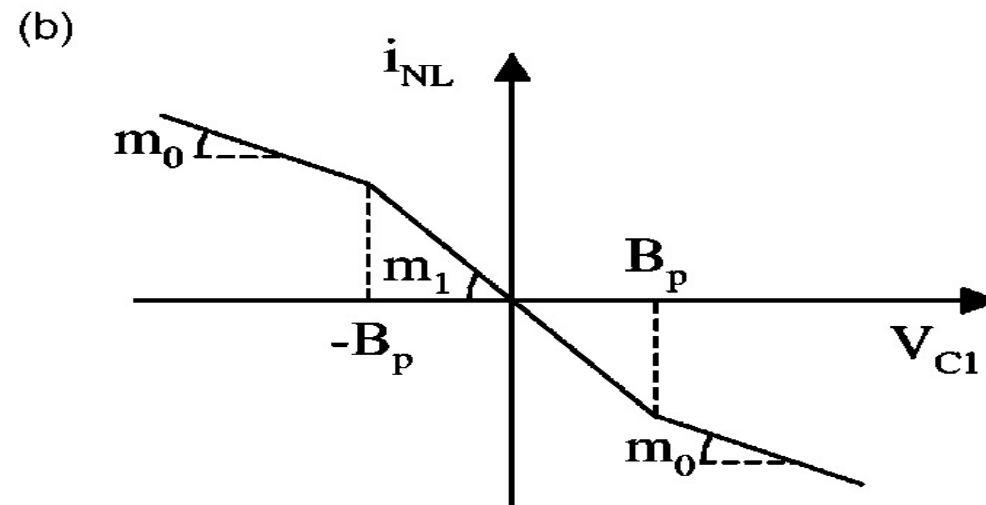
Aplicação no Circuito Elétrico de Chua.

IFUSP



Circuito de Chua

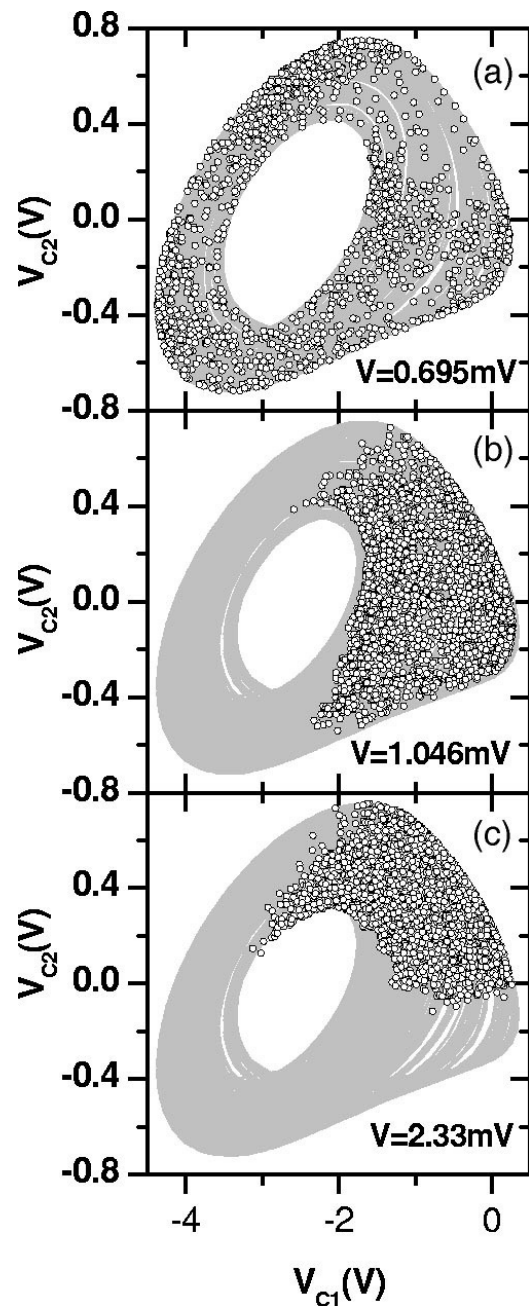
Forçamento com amplitude V e frequência f



Curva Característica
Linear por partes

Parâmetros escolhidos para se obter o atrator caótico tipo Rössler

Experiência



Pontos cinzas: oscilação no espaço $V_{c1} \times V_{c2}$

Pontos brancos: mapa estroboscópico com $T = 2\pi f$
 f : frequência característica do circuito

Valores fixos de $C1$, $C2$, F , R , L , r

Variação da amplitude de forçamento V
e valor fixo da frequência $f_0 = 5.264 \text{ kHz} \cong f_0$

Escolhidos para se obter o atrator caótico tipo Rössler

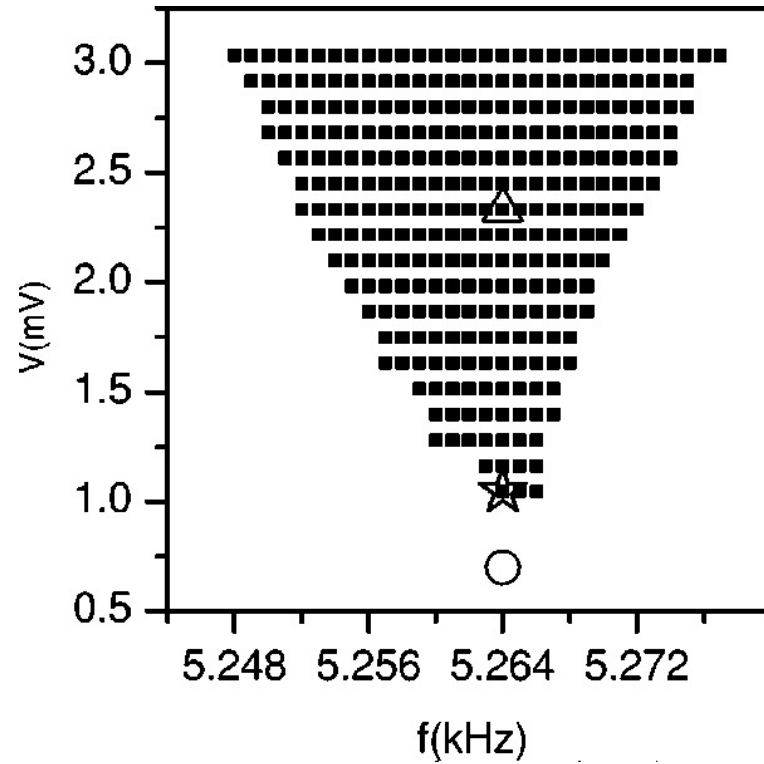
Sincronizado

(Diferença de fases restringe o mapa estroboscópico a um intervalo no espaço de fases)

Espectro de frequências do circuito com máximo em f

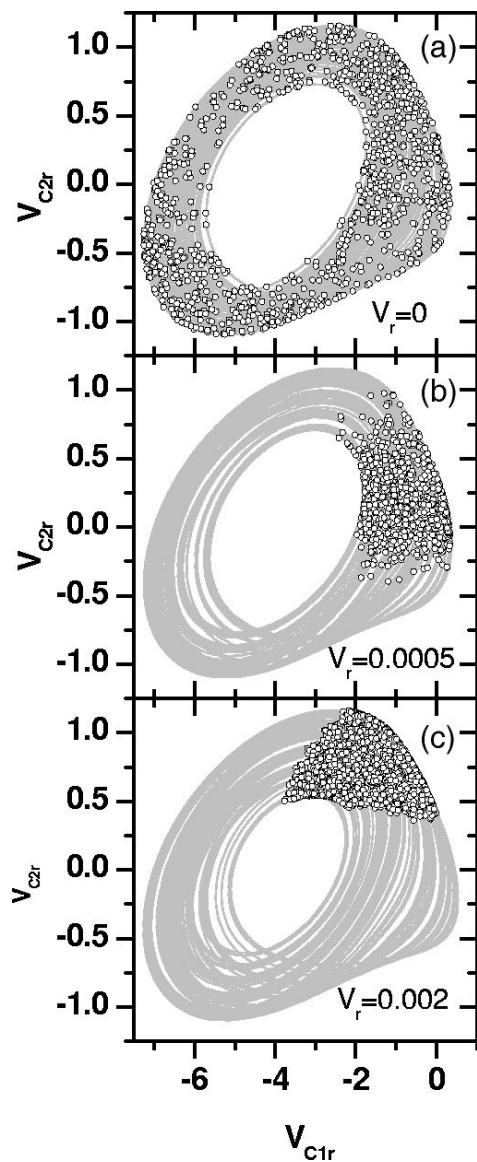
Experiência

Valores de V , f com Sincronização de Fase

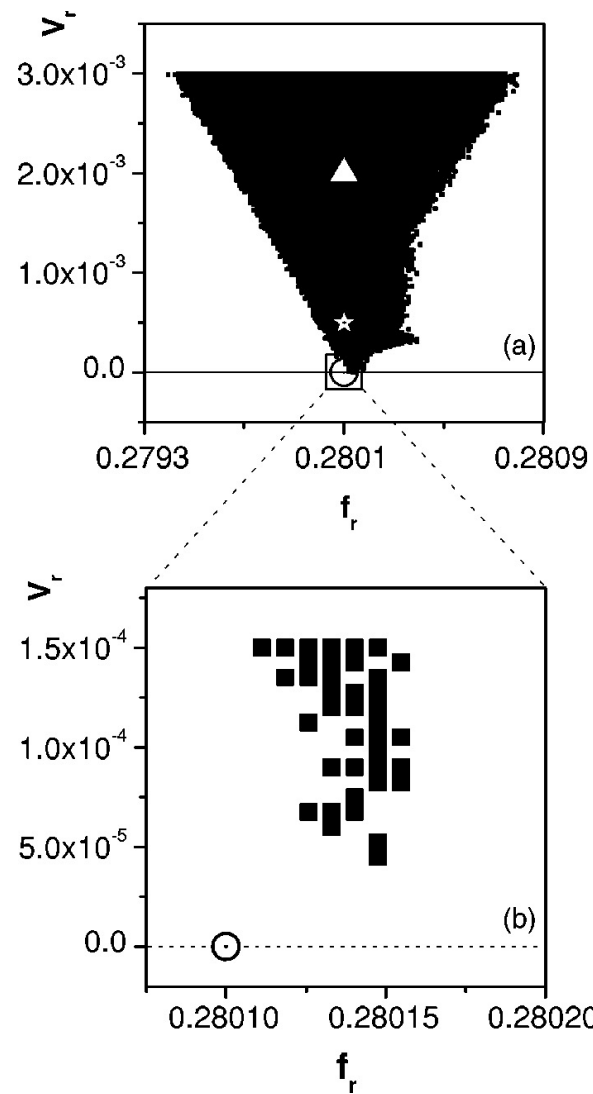


Pontos usados na figura anterior:
Círculo, estrela, triângulo

Simulações Numéricas (Atrator tipo Roessler)



Espaço de Parâmetros da Figura ao Lado



Pontos pretos: sincronização

Amplificação
Fronteira Complexa

Conclusões

Evidências experimentais de sincronização do atrator com o forçamento

Validação numérica

Resultado robusto no espaço de parâmetros

Bacia de sincronização com incerteza na fronteira