PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 2

23 de outubro de 2024

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 25/10/2024.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para luis.bernardi.souza@usp.br ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

Questão 1 Inicialmente, considere a Hamiltoniana integrável,

$$H_0 = \frac{I^2}{2},$$

a qual descrevemos em termos da variável de ação I. A seguir, considere a Hamiltoniana H comporta pela função H_0 e duas perturbações dependentes da variável angular θ e do tempo canônico τ:

$$H(\theta, I, \tau) = H_0(I) - a\cos\theta - b\cos(2\theta - \tau),$$

na qual as constantes $a \ll 1$ e $b \ll 1$ representam os parâmetros de controle.

(a) Mostre que as perturbações atuam de forma ressonante sobre trajetórias com ações em torno dos valores $I = 0$ e $I = 0.5$.
Resolução:

$$\frac{d\theta}{dt} \approx 0 \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = I = 0 \rightarrow I_1^* = 0$$
$$\frac{d}{dt}(2\theta - \tau) \approx 0 \rightarrow 2\dot{\theta} - 1 = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = I = \frac{1}{2} \rightarrow I_2^* = 0.5$$

(b) Calcule o espaçamento δI entre as ressonâncias no espaço de fase $I \times \theta$.
Resolução:

$$\delta I = |I_2^* - I_1^*| = 0.5$$

(c) Calcule a largura no espaço de fase Δ_a da ilha localizada na região da ressonância com $I = 0$. Neste caso, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($b = 0$).
Resolução:
Largura Δa

$$H = \frac{1}{2}GI^2 - F\cos\theta \rightarrow \Delta a = 4\left|\frac{F}{G}\right|^{1/2}$$

$$H = \frac{1}{2}I^2 - a\cos\theta \rightarrow \Delta a = 4\left|\frac{a}{1}\right|^{1/2} \rightarrow \Delta a = 4\sqrt{a}$$

(d) Calcule a largura no espaço de fase Δ_b de uma ilha localizada na região da ressonância com $I = 0.5$. Nesta situação, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($a = 0$).
Resolução: Largura Δb

$$H = \frac{1}{2}I^2 - b\cos(2\theta - \tau) \rightarrow \Delta b = 4\left|\frac{b}{1}\right|^{1/2} \rightarrow \Delta b = 4\sqrt{b}$$

(e) Escreva, em função dos valores dos parâmetros a e b, a condição de Chirikov para a observação, no espaço de fase, de caos global na região entre as duas ressonâncias discutidas anteriormente.
Resolução: Soma das semi-larguras devidida pela distância das ilhas

$$K_c = \frac{\frac{\Delta a}{2} + \frac{\Delta b}{2}}{\delta I} \gtrapprox 1 \rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \gtrapprox \frac{1}{4}$$

Questão 2 Considere a seguinte Hamiltoniana::

$$H = \frac{J^3}{8} + \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3y), \qquad \epsilon \ll 1,$$

na qual (ϕ, J) são as variáveis de ângulo e ação do sistema para $\epsilon = 0$.

(a) Estime o valor da condição inicial $J(t = 0) = \beta_r$ para o qual a perturbação sobre a trajetória, decorrente do termo da Hamiltoniana que depende do parâmetro ϵ, é ressonante.
Resolução:

$$\frac{d}{dt}(2\phi - 3t) = 0 \rightarrow \dot{\phi} = \frac{3}{2}$$
$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \frac{3J^2}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow J = \beta_r = 2$$

Considere agora as trajetórias próximas à região de ressonância, ou seja, com condição inicial $J(t = 0) \approx \beta_r$.

(b) Expandindo H em torno de $J = \beta_r$, obtenha a Hamiltoniana,

$$h(\phi, \Delta J) = \omega_0 \Delta J + \frac{3\beta_r}{8}\Delta J^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos(2\phi - 3t).$$

Indique as transformações necessárias para obter h.
Resolução: $J = J^* + \Delta J \rightarrow J = \beta_r + \Delta J$

$$H = H(J^*) + \left.\frac{\partial H}{\partial J}\right|_{J^*} \Delta J + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 H}{\partial J^2}\right|_{J^*} \Delta J^2 + \ldots$$

Considerando $\epsilon\Delta J, \epsilon\Delta J^2 \rightarrow \mathcal{O}(\Delta J^3)$

$$H - \frac{\beta_r^3}{8} = \frac{3\beta_r^2}{8}\Delta J + \frac{3\beta_r}{8}\Delta J^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos(2\phi - 3t)$$
$$h(\phi, \Delta J) = \frac{3\beta_r^2}{8}\Delta J + \frac{3\beta_r}{8}\Delta J^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos(2\phi - 3t)$$

Sendo $\dot{\phi} = \omega_0 = \frac{3}{2}$, temos

$$\frac{3\beta_r^2}{8} = \frac{3}{2}\frac{(2)^2}{4} = \frac{3}{2} \to \frac{3\beta_r^2}{8} = \omega_0,$$

temos,

$$h(\phi, \Delta J) = \omega_0 \Delta J + \frac{3\beta_r}{8}\Delta J^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos(2\phi - 3t)$$

(c) Realize a transformação canônica com função geratriz $S = I(2\phi - 3t)$, entre os conjuntos de variáveis $(\phi, \Delta J)$ e (θ, I), e reescreva a Hamiltoniana h como,

$$\bar{h}(\theta, I) = \frac{3\beta_r}{2} I^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos\theta.$$

Resolução: $S \to F_2(q, P, t)$

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \to \Delta J = \frac{\partial S}{\partial \phi} &\to \Delta J = 2I \\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \to \theta = \frac{\partial S}{\partial I} &\to \theta = 2\phi - 3t \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -3I \end{aligned}$$

$$\bar{h}(\theta, I) = \frac{3\beta_r}{2} I^2 + \epsilon\beta_r^2 \cos\theta$$

(d) Calcule a semi-largura Δ da ilha próxima à região da ressonância para $\bar{h}$.

Resolução: Sendo $H = \frac{G}{2}I^2 + F\cos\theta$

$$\Delta = 2\left|\frac{F}{G}\right|^{1/2} = 2\left|\frac{\epsilon\beta_r^2}{3\beta_r}\right| \to \Delta = \sqrt{\frac{4\epsilon\beta_r}{3}}$$

Questão 3 Considere, inicialmente, a seguinte Hamiltoniana integrável:

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2,$$

a qual está descrita em termos de suas variáveis de ângulo e ação, designadas respectivamente por θ_i e I_i, para $i = 1, 2$.

(a) Mostre que as frequências características das trajetórias no espaço de fase são

$$\omega_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 1 - 3I_1 + 2I_2.$$

Resolução: Tendo a hamiltoniana escrita em variáveis de ângulo $\hat{\theta}_i$ e ação $\hat{I}_i$, as variáveis de ângulo evoluem linearmente com frequência $\hat{\omega}_i$, e portanto, são obtidas pelas equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial I_1} = \omega_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \omega_2 = 1 - 3I_1 + 2I_2 \end{aligned}$$

(b) No espaço de fase descrito pela Hamiltoniana H_0, considere uma trajetória Γ com condições iniciais $\theta_1(t=0)=\alpha_1$, $\theta_2(t=0)=\alpha_2$, $I_1(t=0)=\beta_1$ e $I_2(t=0)=\beta_2$. Calcule $\theta_i(t)$ e $I_i(t)$.

Resolução: A partir da solução geral para as equações de movimento:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \implies \theta_1 = \omega_1 t + \theta_1(0) = \omega_1 t + \alpha_1 \\
\dot{\theta}_2 &= \omega_2 \implies \theta_2 = \omega_2 t + \theta_2(0) = \omega_2 t + \alpha_2 \\
\dot{I}_1 &= 0 \implies I_1 = \beta_1 \\
\dot{I}_2 &= 0 \implies I_2 = \beta_2
\end{aligned}$$

E com os parâmetros dados, temos:

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \omega_1 t + \alpha_1 \\
\theta_1(t) &= (1 - 2\beta_1 - 3\beta_2)t + \alpha_1 \\
\theta_2(t) &= \omega_2 t + \alpha_2 \\
\theta_2(t) &= (1 - 3\beta_1 + 2\beta_2)t + \alpha_2
\end{aligned}$$

(c) Agora, considere a Hamiltoniana H composta por H_0 e uma pequena perturbação:

$$H = H_0 + \alpha H_1 = H_0(I_1, I_2) + \alpha I_1 I_2 \cos\left(m\theta_1 - n\theta_2\right),$$

na qual m e n são dois números inteiros e $\alpha \ll 1$. Seja a função geratriz

$$G = F_1\theta_1 + F_2\theta_2 + \alpha g_{nm}\sin(m\theta_1 - n\theta_2), \quad g_{nm} = -\frac{F_1 F_2}{m\omega_1 - n\omega_2},$$

que define uma transformação canônica entre as variáveis (θ_i, I_i) e (ϕ_i, F_i). Empregando a transformação de variáveis estabelecida por G, podemos reescrever a Hamiltoniana H no seguinte formato:

$$H = h_0(F_1, F_2) + O(\alpha^2).$$

Mostre que as relações entre as novas e as antigas variáveis até a primeira ordem em α são

$$\begin{aligned}
I_1 &= F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
I_2 &= F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
\theta_1 &= \phi_1 - \alpha\frac{g_{mn}}{F_1}\sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
\theta_2 &= \phi_2 - \alpha\frac{g_{mn}}{F_2}\sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)
\end{aligned}$$

Resolução: Sendo G uma geratriz do tipo $F_2(q,P) = F_2(\theta_i, F_i)$, temos as seguintes equações de transformação:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\partial G}{\partial \theta_1} = F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\theta_1 - n\theta_2) \\
I_2 &= \frac{\partial G}{\partial \theta_2} = F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\theta_1 - n\theta_2) \\
\phi_1 &= \frac{\partial G}{\partial F_1} = \theta_1 - \alpha\frac{F_2}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2) \\
\phi_2 &= \frac{\partial G}{\partial F_2} = \theta_2 - \alpha\frac{F_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)
\end{aligned}$$

Isolando (I_i, θ_i) em termos de (F_i, ϕ_i) e expandindo cossenos e senos, temos:

$$\cos(m\theta_1 - n\theta_2) = \cos\left(m\phi_1 + \alpha\frac{F_2}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right) - n\left(\phi_2 + \alpha\frac{F_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)$$

$$\cos(m\theta_1 - n\theta_2) = \cos\left(m\phi_1 - n\phi_2 + \alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)$$

$$\begin{aligned}\cos(m\theta_1 - n\theta_2) = \cos(m\phi_1 - n\phi_2)\cos\left(\alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)\\ - \sin(m\phi_1 - n\phi_2)\sin\left(\alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(m\theta_1 - n\theta_2) = \cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha)}$$

$$\sin(m\theta_1 - n\theta_2) = \sin\left(m\phi_1 + \alpha\frac{F_2}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right) - n\left(\phi_2 + \alpha\frac{F_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)$$

$$\sin(m\theta_1 - n\theta_2) = \sin\left(m\phi_1 - n\phi_2 + \alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)$$

$$\begin{aligned}\sin(m\theta_1 - n\theta_2) = \sin(m\phi_1 - n\phi_2)\cos\left(\alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)\\ + \cos(m\phi_1 - n\phi_2)\sin\left(\alpha\frac{mF_2 - nF_1}{m\omega_1 - n\omega_2}\sin(m\theta_1 - n\theta_2)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(m\theta_1 - n\theta_2) = \sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha)}$$

Tomando termos até ordem α, temos:

$$\begin{aligned}I_1 &= F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)\\ I_2 &= F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)\\ \theta_1 &= \phi_1 - \alpha\frac{g_{mn}}{F_1}\sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)\\ \theta_2 &= \phi_2 - \alpha\frac{g_{mn}}{F_2}\sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

(d) Determine $h_0(F_1, F_2)$. (**1 ponto**)

Resolução: Substituindo novamente em $H(I_1, I_2)$

$$\begin{aligned}H(I_1, I_2) &= I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2 + \alpha I_1 I_2\cos(m\theta_1 - n\theta_2)\\ H(F_1, F_2) &= F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &\quad - (F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))^2\\ &\quad - 3(F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))(F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))\\ &\quad + (F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))^2\\ &\quad + \alpha(F_1 + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))(F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2))\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &\quad + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(F_1, F_2) = F_1 &+ \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + F_2 - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &- F_1^2 - 2\alpha m F_1 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &- 3\left(F_1F_2 - \alpha n F_1 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) + \alpha m F_2 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\right)\\ &+ F_2^2 - 2\alpha n F_2 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &+ \alpha F_1 F_2\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\\ &+ O(\alpha^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(F_1,F_2) = {} & F_1 + F_2 - F_1^2 - 3F_1F_2 + F_2^2 \\
& + \alpha m g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) - \alpha n g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) \\
& - 2\alpha m F_1 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) \\
& - 3(\alpha m F_2 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) - \alpha n F_1 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)) \\
& - 2\alpha n F_2 g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2) \\
& + \alpha F_1F_2\cos(m\phi_1 - n\phi_2) \\
& + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(F_1,F_2) = {} & F_1 + F_2 - F_1^2 - 3F_1F_2 + F_2^2 \\
& + \alpha g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)\left(m(1-2F_1-3F_2) - n(1-3F_1+2F_2) + \frac{F_1F_2}{g_{mn}}\right) + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(F_1,F_2) = {} & F_1 + F_2 - F_1^2 - 3F_1F_2 + F_2^2 \\
& + \alpha g_{mn}\cos(m\phi_1 - n\phi_2)(m(1-2F_1-3F_2) - n(1-3F_1+2F_2) - (m\omega_1 - n\omega_2)) + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

Assumindo que

$$
\begin{aligned}
1 - 2F_1 - 3F_2 &\approx \omega_1(I_1,I_2) + O(\alpha) \\
1 - 3F_1 + 2F_2 &\approx \omega_2(I_1,I_2) + O(\alpha)
\end{aligned}
$$

até primeira ordem em α, temos:

$$
\begin{aligned}
H(F_1,F_2) &= F_1 + F_2 - F_1^2 - 3F_1F_2 + F_2^2 + O(\alpha^2) \\
H(F_1,F_2) &= h_0(F_1,F_2) + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

(e) F_1 e F_2 são constantes de movimento, ao longo da trajetória Γ perturbada, até a primeira ordem em α. Justifique esta afirmação.

Resolução: Uma vez que

$$
\begin{aligned}
\dot{F}_i &= \partial_{\theta_i} H(F_1,F_2) \\
\dot{F}_i &= \partial_{\theta_i} h_0(F_1,F_2) + \partial_{\theta_i} O(\alpha^2) \\
\dot{F}_i &= 0 + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

(f) Obtenha as frequências características ν_1 e ν_2 da trajetória Γ perturbada no espaço de fase $F_i \times \phi_i$.

Resolução: Calculando diretamente pela hamiltoniana, temos:

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= \partial_{F_1} H(F_1,F_2) = 1 - 2F_1 - 3F_2 \\
\nu_2 &= \partial_{F_2} H(F_1,F_2) = 1 - 3F_1 + 2F_2
\end{aligned}
$$

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J)dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t)\ +\ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$