PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 1

11 de setembro de 2024

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 12/09/2024.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para luis.bernardi.souza@usp.br ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

Questão 1 A Lagrangiana de um elétron de massa m e carga $-e$ é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{e}{c}\right)\vec{v}\cdot\vec{A},$$

na ausência de um campo elétrico. No caso de um movimento em uma plano, temos que $\vec{A} = (B/2)(-y, x)$.

(a) Obtenha a hamiltoniana do sistema em coordenadas polares. **(0,5 ponto)**

Resolução: Em coordenadas polares

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

Portanto,

$$\vec{v}\cdot\vec{A} = \frac{B}{2}r^2\dot{\varphi}$$

Desta forma a lagrangeana fica em coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{e}{c}\frac{B}{2}r^2\dot{\varphi}$$

Obtendo os momenta

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} - \frac{e}{c}\frac{B}{2}r^2$$

temos

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2}\left(p_\varphi + \frac{eB}{2c}r^2\right)$$

Portanto,

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\varphi + \frac{eB}{2c}r^2\right)^2$$

(b) Considere um movimento circular: encontre o raio da órbita r_0 e sua frequência angular ω. **(1 ponto)**

Resolução: Se o movimento reside em uma orbita circular $p_r, \dot{p}_r = 0$. Isto é equivalente a

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{1}{4}mr\omega^2 = 0$$

A solução da equação acima da o raio da órbita em termos de p_φ e ω

$$r_0 = \left(\frac{2p_\varphi c}{eB}\right)^{-1/2}$$

Já a frequência, temos

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{1}{mr_0^2}\left(p_\varphi + \frac{eB}{2c}r_0^2\right) \quad \Rightarrow \omega = \frac{eB}{mc}$$

(c) Estude a estabilidade de órbitas circulares para uma perturbação radial $r = r_0 + \rho$, onde $\rho << r_0$, e determine a natureza e a frequência de pequenas oscilações do movimento radial. **(0,5 ponto)**

Para avaliar a estabilidade do movimento circular em torno de r_0, definimos

$$r = r_0 + \rho$$

disso tiramos que $p_r = p_\rho$. Avaliando

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\frac{1}{(1+\rho/r_0)^2} \approx \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{\rho}{r_0} + 3\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2 + O(\rho)\right)$$

Substituindo resultado acima na hamiltoniana e depois de várias simplificações temos

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \frac{m\omega^2 r_0^2}{2}$$

O último termo a direita é uma constante, logo a hamiltoniana acima representa a hamiltoniana de um oscilador harmônico de frequência ω.

Questão 2 Considere o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação do potencial conservativo:

$$V(q) = \frac{\omega^2}{2}q^2 - \frac{A}{3}q^3,$$

com $\omega > 0$ e $A > 0$.

(a) Encontre a Lagrangiana e a Hamiltoniana do sistema. **(0,5 ponto)**

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad L(q,\dot{q}) = T - V \quad \Rightarrow \quad L(q,\dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}q^2 + \frac{A}{3}q^3$$

Calculando a hamiltoniana

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad \Rightarrow \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3}$$

(b) Verifique que H é uma constante de movimento. **(0,5 ponto)**

Precisamos mostrar que $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}\dot{p} + \omega^2 q\dot{q} - Aq^2\dot{q}$$

Lembrando,

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(\omega^2 q - Aq^2\right)$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{p}{m}\left(\omega^2 q - Aq^2\right) + \omega^2 q\frac{p}{m} - Aq^2\frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$$

(c) Verifique que $(q,p) = (0,0)$ e $(\omega^2/A, 0)$ são pontos fixos no espaço de fase $p \times q$. **(0,5 ponto)**

Das equações de Hamilton temos

$$\dot{p} = -\left(\omega^2 q - Aq^2\right); \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Verificando para $(q,p) = (0,0)$

$$\begin{aligned} (q,p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = 0 \quad &\Rightarrow \quad p = \text{constante} = 0 \\ \dot{q} = 0 \quad &\Rightarrow \quad q = \text{constante} = 0 \end{aligned}$$

Verificando para $(\omega^2/A, 0)$

$$(q,p) = (\omega^2/A, 0) \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = A\left(\frac{\omega^2}{A}\right)^2 - \omega^2\left(\frac{\omega^2}{A}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{constante} = 0$$

$$\dot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \text{constante} = \frac{\omega^2}{A}$$

(d) Faça um esboço do gráfico de V em função de q. **(0,5 ponto)**

(e) **(0,5 ponto)** Mostre que a equação da trajetória da separatriz (que separa as trajetórias periódicas das demais) é dada por:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} = \frac{\omega^6}{6A^2}.$$

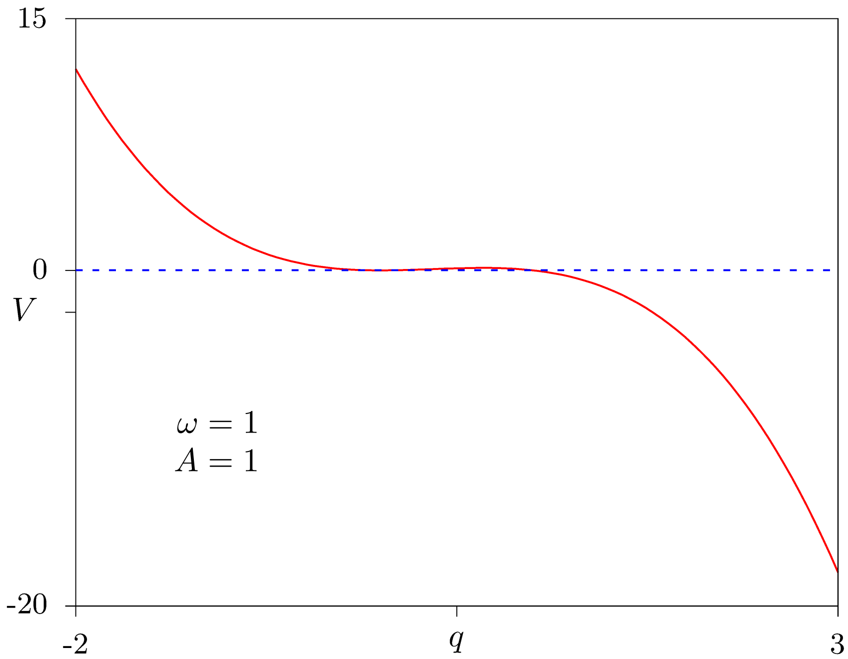
O ponto $(\omega^2/A, 0)$ pertence a separatriz pois é um ponto hiperbólico. Encontrando H nessa superfície

$$H_s(\omega^2/A, 0) = 0 + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{\omega^2}{A}\right)^2 - \frac{A}{3}\left(\frac{\omega^2}{A}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad H_s = \frac{\omega^6}{6A^2}$$

Logo,

$$H_s = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \frac{Aq^3}{3} = \frac{\omega^6}{6A^2}$$

(f) Faça um esboço das possíveis trajetórias (linhas com H constante) no espaço de fase



para diferentes valores de H. Identifique no esboço os pontos fixos, a separatriz e as trajetórias confinadas e não confinadas. **(1,5 ponto)**

Questão 3 A Hamiltoniana de um sistema é,

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = p_1^2 + p_2^2 + \epsilon \cos(q_2 + ct),$$

sendo ϵ e c constantes conhecidas.

A função geratriz,

$$S = q_1 P_1 + P_2(q_2 + ct),$$

pode ser usada para obter um novo conjunto de variáveis canônicas (Q, P) e Hamiltoniana H, tal que,

$$\frac{\partial H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial t} = 0.$$

Obtenha:

(a) as novas variáveis Q_1, Q_2, P_1 e P_2 em função das antigas q_1, q_2, p_1 e p_2. **(0,5 pontos)**

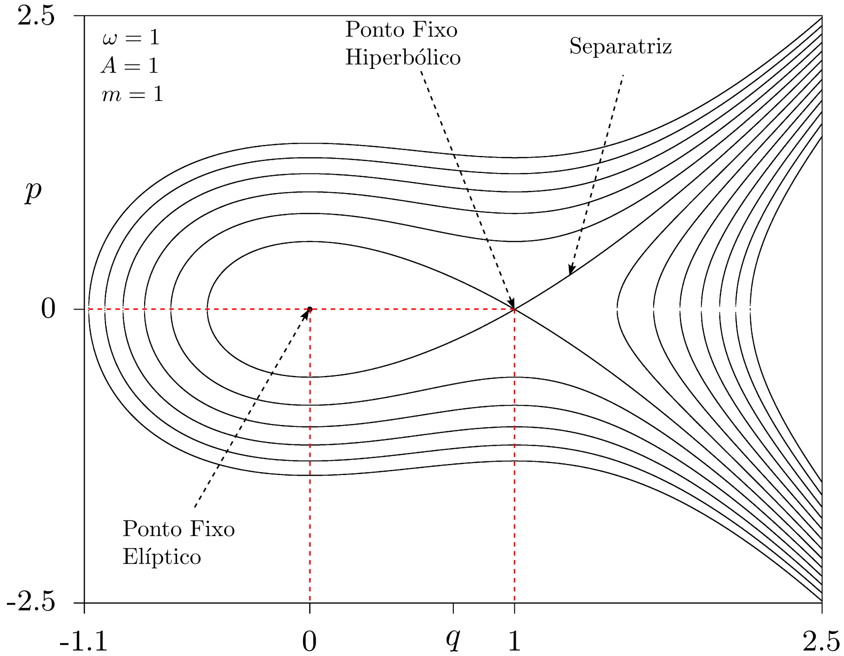
Resolução: $S = S(\vec{q}, \vec{P}) = F_2(q, P, t)$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = P_1, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1$$
$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = P_2, \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2 + ct$$

(b) a nova Hamiltoniana $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. **(0,5 pontos)**

Resolução: $H = h + \dfrac{\partial S}{\partial t}$

$$H = P_1^2 + P_2^2 + \epsilon \cos Q_2 + cP_2$$



Questão 4 Considere a Hamiltoniana

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2,$$

na qual I_j e θ_j, $j = 1, 2$, são variáveis canonicamente conjugadas.

(a) Dados os valores iniciais I_j^0 e θ_j^0, no instante de tempo $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$. **(0,5 ponto)**

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_1} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_1^0$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_1 = 1 - 3I_1 + 2I_2$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_2^0$$

Integrando $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ temos

$$\theta_1 = \theta_1^0 + (1 - 2I_1^0 - 3I_2^0)t$$
$$\theta_2 = \theta_2^0 + (1 - 3I_1^0 + 2I_2^0)t$$

(b) Considere a seguinte Hamiltoniana perturbada:

$$H = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2),$$

na qual $\alpha \ll 1$. Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento. **(0,5 ponto)**

$$\dot{\theta}_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2 + \alpha I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)$$
$$\dot{I}_1 = 2\alpha I_1 I_2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2)$$
$$\dot{\theta}_2 = 1 - 3I_1 + 2I_2 + \alpha I_1 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)$$
$$\dot{I}_2 = -2\alpha I_1 I_2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2)$$

Logo,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_1 + I_2) = (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = 2\alpha I_1 I_2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) - 2\alpha I_1 I_2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$$

(c) (1 ponto) Mostre que a seguinte transformação, das variáveis (θ_j, I_j) para as variáveis (ϕ_j, J_j), é canônica:

$$J_1 = I_1 + I_2, \quad J_2 = I_2, \quad \phi_1 = \theta_1, \quad \phi_2 = \theta_2 - \theta_1.$$

Mostrar

$$[Q_1, Q_2] = 0 = [P_1, P_2]$$
$$[Q_i, P_j] = \delta_{ij} = [q_i, p_j]$$

(d) (0,5 ponto) Obtenha a Hamiltoniana $H(\phi_j, J_j)$:

$$H = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2)\cos(2\phi_2).$$

Basta substituir as realções canônicas na hamiltoniana,

$$H = J_1 - J_2 + J_2 - J_1^2 + 2J_1J_2 - J_2^2 - 3J_1J_2 + 3J_2^2 + J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2)\cos[2(\theta_1 - \theta_2)] \Rightarrow$$
$$H = J_1 - J_1^2 - J_1J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2)\cos(2\phi_2)$$

(e) O sistema perturbado é integrável? Justifique. **(0,5 ponto)**

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

Portanto, o sistema é integrável uma vez que possui 2 graus de liberdade e duas constantes do movimento: H e F.

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p \; dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \; H(q, p, t) \; + \; \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$