VIII - Órbitas Periódicas e Conjuntos Limites

Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke

Springer (1997)

Equações Autonomas

Dimensão do espaço de fase limita as formas do comportamento assintótico das soluções dos sistemas autônomos.

Na linha, soluções limitadas convergem para um ponto de equilíbrio. No plano, elas convergem a ciclos limites.

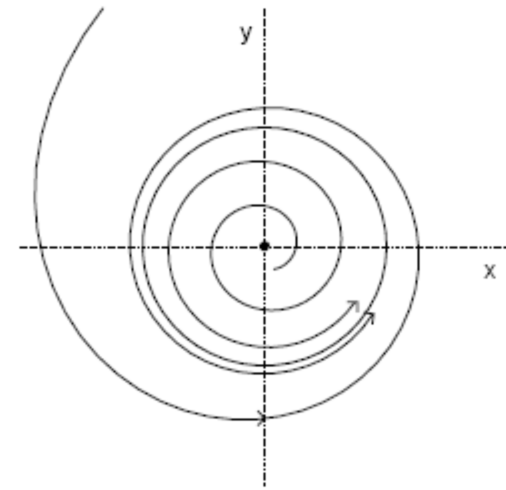
No plano não há soluções caóticas.

Teorema da curva de Jordan $\rightarrow$ Teorema de Poincaré - Bendixson
No espaço tridimensional pode haver caos.

Exemplo:

$$\dot{r} = r(1 - r)$$

$$\dot{\theta} = 8$$



Ponto de equilíbrio instável: (0, 0)

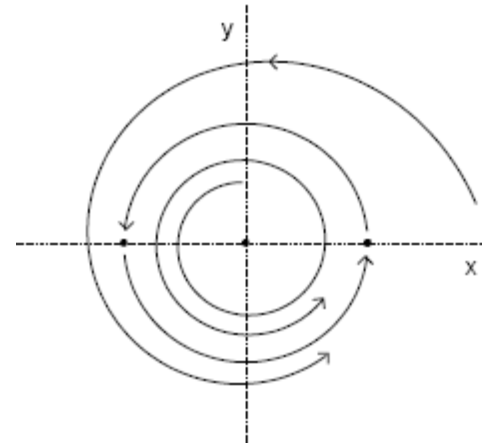
r = 1 órbita periódica $\rightarrow$ ciclo limite estável

$$r = \frac{c\,e^{t}}{c\,e^{t} - 1} \qquad \theta = 8\,t + d$$

Exemplo:

$$\dot{r} = -r(1-r)$$

$$\dot{\theta} = 8$$



Ponto de equilíbrio estável: $(0,0)$

$r = 1$ órbita periódica instável $\rightarrow$ ciclo limite instável

Conjuntos Limites no Plano

$\dot{\vec{v}} = \vec{f}(\vec{v})$; $\vec{f}$ mapa contínuo e diferenciável em R^n

Definição: Um ponto $\vec{z}$ está no conjunto limite $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}(\vec{v}_0)$ *da* solução $F(t, \vec{v}_0)$, *se* houver uma sequência de pontos que converge para $\vec{z}$ quando $t \to +\infty$.

$\vec{z} \subset \vec{\omega}(\vec{v}_0)$ se existir uma sequência crescente não limitada $\{t_n\}$ de números reais $\left(t_n \to \infty\right)$ com $\lim\limits_{n \to \infty} F(t_n, \vec{v}_0) = \vec{z}$.

$\vec{z}$ está no conjunto limite $\vec{\alpha}(\vec{v}_0)$ se existir uma sequência decrescente não limitada $\{t_n\}$ de números reais $\left(t_n \to -\infty\right)$ com $\lim\limits_{n \to \infty} F(t_n, \vec{v}_0) = \vec{z}$.

$\vec{v}_0$ *ponto* de equilíbrio $\to$ $\vec{\omega}(\vec{v}_0) = \vec{\alpha}(\vec{v}_0) = \{\vec{v}_0\}$

$\vec{\alpha}(\vec{v}_0)$ da equação $\dot{\vec{v}} = \vec{f}(\vec{v})$ é $\vec{\omega}(\vec{v}_0)$ de $\dot{\vec{v}} = -\vec{f}(\vec{v})$

Órbitas Periódicas

Definition 8.4 If there exists a $T > 0$ such that $\mathbf{F}(t + T, \mathbf{v}_0) = \mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$ for all t, and if $\mathbf{v}_0$ is not an equilibrium, then the solution $\mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$ is called a **periodic orbit,** or **cycle**. The smallest such number T is called the **period** of the orbit.

Exemplo

$$\dot{x} = x(a - x), \quad a > 0$$

Pontos de equilíbrio: $x = 0$ e $x = a$

Para $x_0 > 0$, $\omega(x_0) = \{a\}$

Para $x_0 = 0$, $\omega(x_0) = \{0\}$

Para $x_0 < 0$, $\omega(x_0) = \{\ \}$: conjunto vazio

Exemplo

$$\dot{r} = r(a - r)$$

$$\dot{\theta} = b$$

Origem é ponto de equilíbrio estável

$$\omega(0) = \{0\}$$

$$\omega(r_0, \theta_0) = \{r = a\} \; ; \; r_0 \neq 0$$

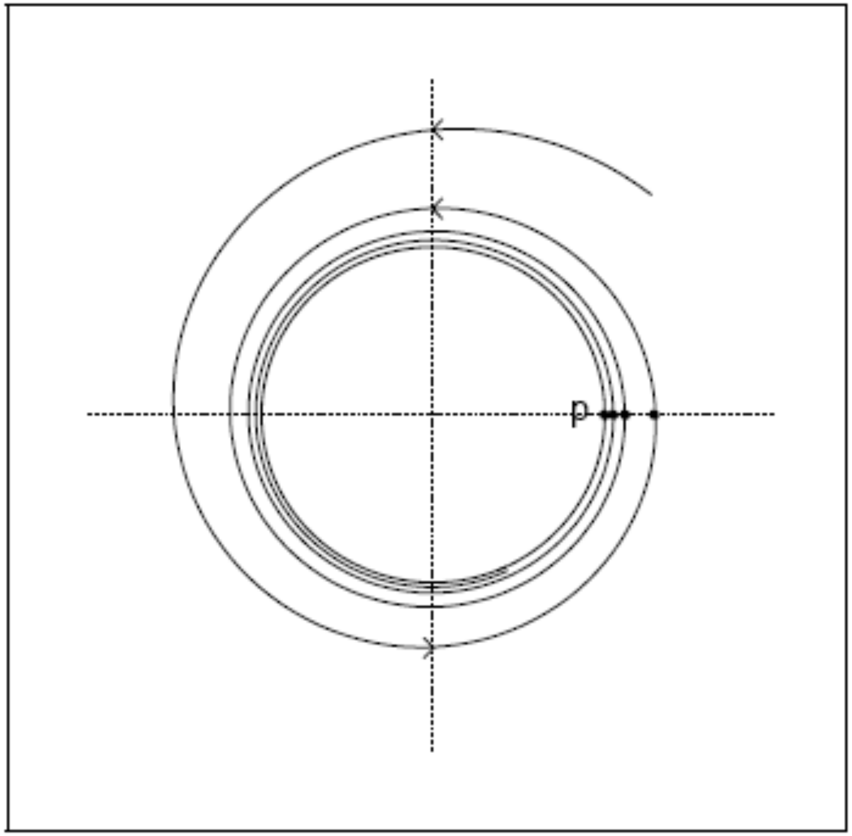


Figure 8.1 The definition of an ω-limit set.

The point $\mathbf{p}$ is in the ω-limit set of the spiraling trajectory because there are points $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{v}_0)$, $\mathbf{F}(t_2, \mathbf{v}_0)$, $\mathbf{F}(t_3, \mathbf{v}_0)$ . . . of the trajectory, indicated by dots, that converge to $\mathbf{p}$. The same argument can be made for any point in the entire limiting circle of the spiral solution, so the circle is the ω-limit set.

Exemplo

$$\dot{r} = r\,(a - r)$$

$$\dot{\theta} = \mathrm{sen}^2\theta + (r - a)^2$$

$$\text{Pontos de equilíbrio}: \begin{cases} (a, 0) \\ (a, \pi) \\ (0, 0) \end{cases}$$

$$\omega(0) = \{0\}$$

$$\omega(r_0, \theta_0) = \{r = a\}\ ; \quad \forall\ r_0 \neq 0$$

$$\omega(a, \theta_0) = (a,\ \theta = 0, \pi)$$

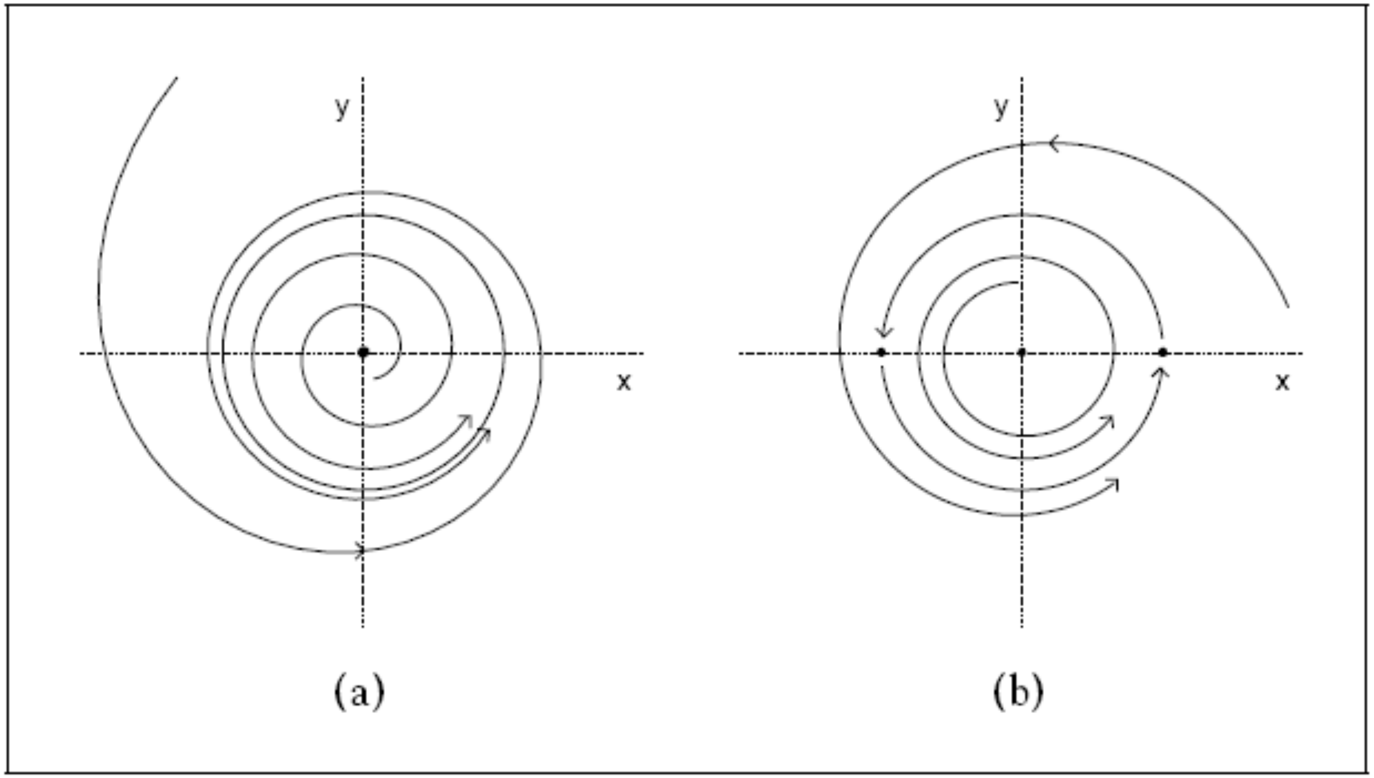


Figure 8.3 Examples of ω-limit sets for planar flows.
(a) The phase plane for Example 8.5 shows the circle $r = a$ as an attracting periodic orbit of system (8.3). The origin is an unstable equilibrium. The ω-limit set of every trajectory except the equilibrium is the periodic orbit. (b) The phase plane for Example 8.6 looks very similar to the phase plane in (a), except that in this example there are no periodic orbits. There are three equilibria: the origin and the points $(a, 0)$ and (a, π). Every other point on the circle $r = a$ is on a solution called a connecting arc, whose α- and ω-limit sets are the equilibria. The ω-limit set of each nonequilibrium solution not on the circle is the circle $r = a$.

Teorema de Poincaré - Bendixson

$\dot{\vec{v}} = f(\vec{v})$, f suave em R^2, com pontos de equilíbrio isolados.

Se a órbita ($t \to \infty$) $F(t, \vec{v}_0)$ for limitada $\Rightarrow$

a – $\omega(\vec{v}_0)$ é um ponto de equilíbrio ou

b - $\omega(\vec{v}_0)$ é uma órbita periódica ou

c - Para cada $\vec{u}$ em $\omega(\vec{v}_0)$, os conjuntos limites $\alpha(\vec{u})$ e $\omega(\vec{u})$ são pontos de equilíbrio.

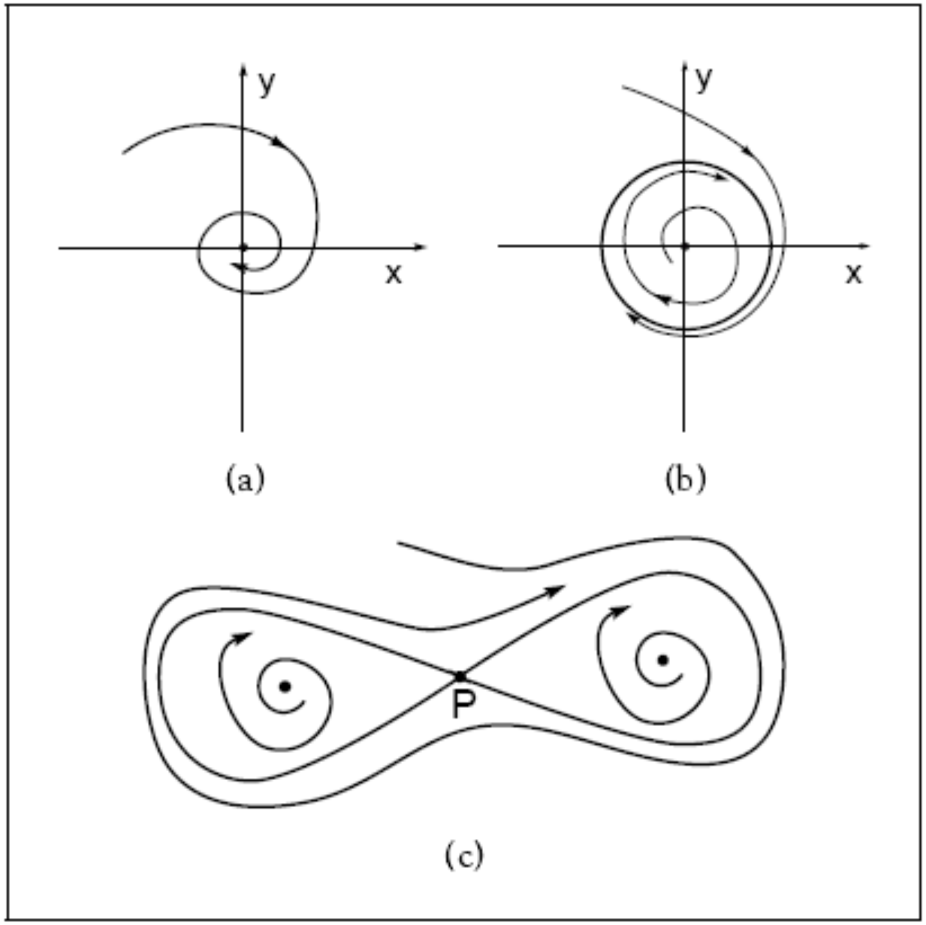


Figure 8.4 Planar limit sets.

The three pictures illustrate the three cases of the Poincaré-Bendixson Theorem. (a) The limit set is one point, the origin. (b) The limit set of each spiraling trajectory is a circle, which is a periodic orbit. (c) The limit set of the outermost trajectory is a figure eight. This limit set must have an equilibrium point P at the vertex of the "eight". It consists of two connecting arcs plus the equilibrium. Trajectories on the connecting arcs tend to P as $t \to \infty$ and as $t \to -\infty$.

Propriedades dos Conjuntos Limites

Um ponto $\vec{v} \in R^n$ é um ponto limite de um conjunto A se cada vizinhança $N_\varepsilon(\vec{v})$ contem pontos de A distintos de $\vec{v}$.
(Há uma sequência de pontos em A que convergem para $\vec{v}$)
O ponto limite $\vec{v}$ pode estar em A ou não.

1- Existência

O conjunto limite ω de uma órbita limite não é um conjunto vazio.

2 - Fechamento

Um conjunto limite ω é fechado.

3 - Invariança

Se $\vec{y}$ está em $\omega(\vec{v}_0)$, então a órbita toda $F(t, \vec{y})$ está em $\omega(\vec{v}_0)$.

4 – Conexão

O conjunto limite ω limitado de uma órbita é conectado.

5 - Transitiva

Se $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ e $\vec{y} \in \omega(\vec{v}_0) \Rightarrow \vec{z} \in \omega(\vec{v}_0)$

Duas freqências incomensuráveis formam um torus T^2

Movimento preenche uma superfície toroidal em um volume tridimensional.

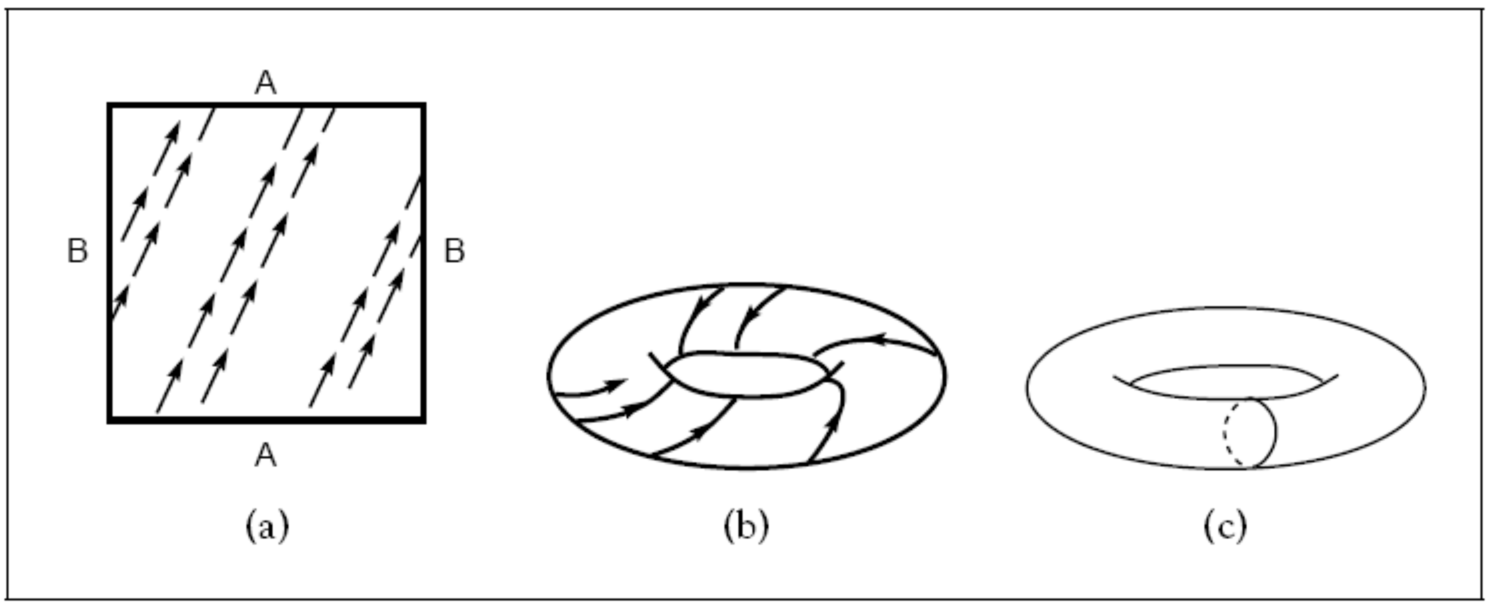


Figure 8.9 A dense orbit on the torus.