



Prova 1

PGF 5005 – Mecânica Clássica
Matheus Lazarotto e Iberê Caldas



10 de setembro de 2025

Questão 1 (3.0 pts) Para um elétron de massa m e carga $-e$ movendo-se em um campo magnético uniforme, considere a Lagrangiana

$$L = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A},$$

sendo $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2}(-y, x)$ o potencial vetor, c a velocidade da luz e $\vec{r} = (x, y)$ a posição do elétron.

a) (1.5 pt) Obtenha a Hamiltoniana do sistema em coordenadas polares (r, φ) .

Solução: Sendo a Lagrangiana dada por $L = T - V$, o termo potencial fica dado por

$$V(x, y) = \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$V(x, y) = \frac{e}{c} \frac{B}{2} (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (-y, x)$$

$$V(x, y) = \frac{eB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$V(x, y) = \frac{eB}{2c} (r \cos(\varphi) (\dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi)) - r \sin(\varphi) (\dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi)))$$

$$V(x, y) = \frac{eB}{2c} (r^2 \dot{\varphi} \cos^2(\varphi) + r^2 \dot{\varphi} \sin^2(\varphi))$$

$$V(r, \dot{\varphi}) = \frac{eB}{2c} r^2 \dot{\varphi}$$

enquanto que o termo cinético em coordenadas polares fica

$$T = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

e portanto

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{eB}{2c} r^2 \dot{\varphi}$$

Com a Lagrangiana em mãos, obtém-se os momentos conjugados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \implies \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} - \frac{eB}{2c} r^2 \quad \implies \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{mr^2} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} r^2 \right)$$

e com isso pode-se calcular a transformada de Legendre para a Hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=r,\varphi} p_i \dot{q}_i - L \\
H &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \left(\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{eB}{2c} r^2 \dot{\varphi} \right) \\
H &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{eB}{2mc} p_\varphi - \frac{m}{2} \left(\frac{p_r}{m} \right)^2 - \frac{m}{2} \frac{1}{m^2 r^2} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} r^2 \right)^2 + \frac{eB}{2mc} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} r^2 \right) \\
H &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{eB}{mc} p_\varphi - \frac{1}{2mr^2} \left(p_\varphi^2 + \frac{e^2 B^2}{4c^2} r^4 + \frac{eB}{c} p_\varphi r^2 \right) + \frac{e^2 B^2}{4mc^2} r^2 \\
H &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{eB}{2mc} p_\varphi + \frac{e^2 B^2}{8mc^2} r^2 \\
\boxed{H} &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} r^2 \right)^2
\end{aligned}$$

b) (1.5 pt) Encontre o raio r_c para órbitas circulares em função dos parâmetros do sistema (p_φ , c , e , B). O raio r_c é comumente chamado raio de ciclotron ou raio de Larmor. Obtenha também a frequência de rotação ω_c , associada à rotação do ângulo φ .

Solução: Para um movimento circular, temos a condição de equilíbrio apenas para a componente radial, ou seja

$$\begin{aligned}
\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = 0 &\implies p_r^* = 0 \\
\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{e^2 B^2}{4mc^2} r = 0 &\implies r^* = \left(\frac{4c^2 p_\varphi^2}{e^2 B^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\
\boxed{r^* = r_c} &= \sqrt{\frac{2p_\varphi c}{eB}}
\end{aligned}$$

A frequência de movimento ω_c por sua vez é dada por $\dot{\varphi}$, calculada para uma órbita circular (r^*, p^*)

$$\begin{aligned}
\omega_c = \dot{\varphi} &= \left. \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \right|_{r^*} \\
\omega_c &= \frac{1}{m(r^*)^2} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} (r^*)^2 \right) \\
\omega_c &= \frac{eB}{2p_\varphi mc} \left(p_\varphi + \frac{eB}{2c} \frac{2p_\varphi c}{eB} \right) \\
\omega_c &= \frac{eB}{2p_\varphi mc} (2p_\varphi) \\
\boxed{\omega_c} &= \frac{eB}{mc}
\end{aligned}$$

valendo também que $p_\varphi^* = \frac{1}{2} m \omega_c r_c^2$.

Questão 2 (3.0 pts) Considere um sistema Hamiltoniano de um grau de liberdade descrito pelo par canônico (q, p) sob uma mudança para novas coordenadas (θ, I) dada por

$$\begin{aligned}
q(\theta, I) &= f(I) \sin(\theta) \\
p(\theta, I) &= f(I) \cos(\theta),
\end{aligned}$$

onde $f(I)$ é uma função a ser determinada.

a) (1 pt) Determine a função $f(I)$ tal que a transformação seja canônica.

Solução: Sendo $\vec{\omega} = (q, p)$ e $\vec{z} = (\theta, I)$ os vetores de estado e $\vec{\psi}(\vec{z}) = \vec{\omega} = (q, p)$ a transformação de $\vec{z} \rightarrow \vec{\omega}$, temos

$$\vec{\psi}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{z}) \\ \psi_2(\vec{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(I) \sin(\theta) \\ f(I) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

implicando que o Jacobiano de $\vec{\psi}$ é dado por

$$D\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \psi_1}{\partial I} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \psi_2}{\partial I} \end{pmatrix}$$

sendo

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = f(I) \cos(\theta) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial I} = \dot{f}(I) \sin(\theta) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = -f(I) \sin(\theta) \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial I} = \dot{f}(I) \cos(\theta)$$

É preciso então verificar se a condição de canonicidade é satisfeita:

$$D\vec{\psi}^T J D\vec{\psi} = J \quad \text{sendo} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D\vec{\psi}^T J D\vec{\psi} = \begin{pmatrix} f \cos(\theta) & -f \sin(\theta) \\ \dot{f} \sin(\theta) & \dot{f} \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \cos(\theta) & \dot{f} \sin(\theta) \\ -f \sin(\theta) & \dot{f} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$D\vec{\psi}^T J D\vec{\psi} = \begin{pmatrix} f \cos(\theta) & -f \sin(\theta) \\ \dot{f} \sin(\theta) & \dot{f} \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f \sin(\theta) & \dot{f} \cos(\theta) \\ -f \cos(\theta) & \dot{f} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$D\vec{\psi}^T J D\vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & f\dot{f} \\ -f\dot{f} & 0 \end{pmatrix} = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto, deve valer que

$$f\dot{f} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int f df = \int dI$$

$$\frac{1}{2}(f^2 - f_0^2) = I - I_0$$

$$\boxed{f(I) = \sqrt{2(I - c)}}$$

onde a constante $c = f_0^2 - 2I_0$ pode ser descartada sem perda de generalidade ou ser determinada por condições iniciais.

b) (1 pt) Mostre que a geratriz $S(q, \theta) = \frac{1}{2}q^2 \cot(\theta)$ promove a transformação encontrada anteriormente.

Solução: Sendo $S(q, \theta)$ uma função geratriz do tipo $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$, temos as seguintes equações de transformação

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = q \cot(\theta)$$

$$I = -\frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{2}q^2 \csc^2(\theta)$$

Expressando (q, p) em função apenas de (θ, I)

$$q \rightarrow I = \frac{q^2}{2 \sin^2(\theta)} \rightarrow q = \sqrt{2I} \sin(\theta)$$

$$p \rightarrow p = \left(\sqrt{2I} \sin(\theta) \right) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \rightarrow p = \sqrt{2I} \cos(\theta)$$

encontra-se a transformação obtida no item a).

c) (1 pt) Mostre que o par (θ, I) são as variáveis de ângulo e ação da Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) .$$

Encontre $q(t)$ e $p(t)$ para condições iniciais (θ_0, I_0) , no instante $t = 0$.

Solução: Substituindo $q(\theta, I)$ e $p(\theta, I)$, e sabendo que $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, temos a nova hamiltoniana

$$\begin{aligned} K(\theta, I) &= H(\theta, I) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ K(\theta, I) &= \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 \\ K(\theta, I) &= \frac{1}{2} (2I \cos^2(\theta)) + \frac{1}{2} (2I \sin^2(\theta)) \\ K(\theta, I) &= I (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

$$\boxed{K(\theta, I) = I}$$

Resolvendo o sistema em coordenadas de ângulo e ação, temos:

$$\begin{aligned} \dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \theta} &= 0 \quad \implies \quad I(t) = I_0 \\ \dot{\theta} = \frac{\partial K}{\partial I} &= 1 \quad \implies \quad \theta(t) = t + \theta_0 \end{aligned}$$

a posição e momento ficam

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{2I_0} \sin(t + \theta_0) \\ p(t) &= \sqrt{2I_0} \cos(t + \theta_0) \end{aligned}$$

Questão 3 (3.0 pts) Considere o movimento de uma partícula com massa $m = 1$ e momento p sob a ação do potencial

$$V(q) = 2q^2 - q^4$$

a) (0.5 pt) Faça um esboço do gráfico de $V(q)$.

Solução:

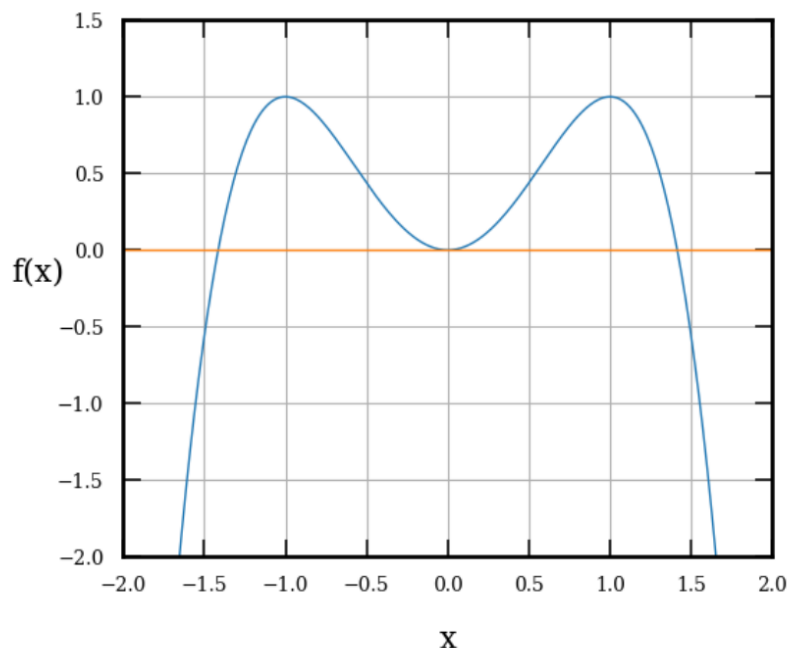


Figure 1: Potencial $V(x) = 2x^2 - x^4$

b) (1.0 pt) Determine os pontos de equilíbrio (q^*, p^*) no espaço de fase e sua estabilidade linear.

Solução: Sendo o sistema separável e conservativo, a condição de equilíbrio é dada por $(q_*, p_*) = (q_*, 0)$, onde as posições de equilíbrio correspondem aos pontos extremantes do potencial, tais que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dq}\bigg|_{q^*} &= 0 \\ 4q^* - 4(q^*)^3 &= 0 \\ q^* (1 - (q^*)^2) &= 0\end{aligned}$$

que possui raízes

$$q_c^* = 0 \quad q_+^* = +1 \quad q_-^* = -1$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Para a estabilidade, podemos calcular diretamente a segunda derivada do potencial

$$\frac{d^2V}{dq^2}\bigg|_{q^*} = 4 - 12(q^*)^2$$

Para $q^* = q_c = 0 \implies \frac{d^2V}{dq^2} = 4 > 0$, indicando que o ponto é **mínimo local** e portanto **estável**.

Para $q^* = q_+ = 1 \implies \frac{d^2V}{dq^2} = -8 < 0$, indicando que o ponto é **máximo local** e portanto **instável**.

Para $q^* = q_- = -1 \implies \frac{d^2V}{dq^2} = -8 < 0$, indicando que o ponto é **máximo local** e portanto **instável**.

c) (1.0 pt) Esboce os tipos de trajetórias possíveis no espaço de fase. Lembre-se de indicar os pontos de equilíbrio e direção do movimento.

Solução:

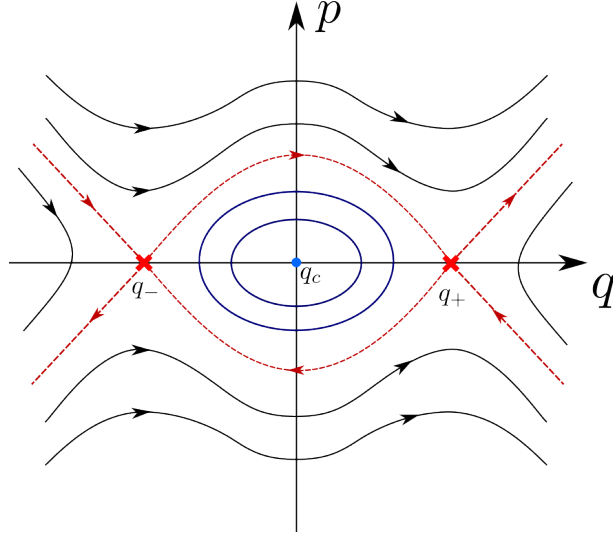


Figure 2: Espaço de fase para o uma partícula submetida ao potencial $V(q) = 2q^2 - q^4$.

d) (0.5 pt) Escreva a equação da curva separatriz.

Solução: Dado que a energia é uma constante sobre as curvas no espaço de fase para este sistema, basta calcular a energia para um ponto da separatriz. Tomando o ponto fixo $(q, p) = (q_+, 0)$, temos

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + 2q^2 - q^4$$

$$H(q_+, 0) = 2(1^2) - (1^4)$$

$$H_{\text{sep}} = 1 = \frac{p^2}{2m} + 2q^2 - q^4 \quad (1)$$

O item pode ser resolvido graficamente a partir do item a), olhando para a energia dos pontos de máximo do potencial, uma vez que neles a energia cinética é nula e $H_{\text{eq}} = V(q_{\pm}^*)$.

Questão 4 (2.0 pts) Considere a Hamiltoniana

$$H_0(I_1, I_2) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2$$

escrita em suas variáveis de ângulo e ação (θ_j, I_j) , $j = 1, 2$.

a) (1.0 pt) Dados os valores iniciais θ_j^0 e I_j^0 no instante $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$.

Solução: Pelas equações de Hamilton

$$\dot{I}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_1^0$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_2^0$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = 1 - 2I_1 - 3I_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_1^0$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = 1 - 3I_1 + 2I_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_2^0$$

sendo

$$\omega_1 = 1 - 2I_1^0 - 3I_2^0 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 1 - 3I_1^0 + 2I_2^0$$

frequências constantes.

b) (0.5 pt) Considere agora uma perturbação sobre o sistema, escrito pela nova Hamiltoniana

$$H(\theta_1, \theta_2, I_1, I_2) = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2).$$

Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento.

Solução: Computando a derivada temporal de F , vem

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \frac{dF}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} - \frac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ \frac{dF}{dt} &= 2\alpha I_1 I_2 (\sin(2\theta_1 - 2\theta_2) - \sin(2\theta_1 - 2\theta_2))\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = 0}$$

c) (0.5 pt) O sistema perturbado é integrável? Justifique.

Solução: O sistema permanece integrável, uma vez que temos H e F como constantes de movimento independentes. Sendo que o sistema possui dois graus de liberdade, o teorema de Liouville-Arnold garante a integrabilidade.

Vale ressaltar que, apesar de perturbada, a nova Hamiltoniana continua independente do tempo e portanto continua sendo uma constante de movimento. Ao encontrar a segunda constante F , garantimos as funções necessárias exigidas pelo teorema.