PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 1

30 de agosto de 2023

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 31/08/2023.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para mmugnaine@gmail.com ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

Questão 1 Considere a Hamiltoniana integrável (que descreve a rede de Toda com três partículas):

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{-(\varphi_1 - \varphi_3)} + e^{-(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-(\varphi_3 - \varphi_2)} - 3.$$

(a) Mostre que a Hamiltoniana H e a função $F = p_1 + p_2 + p_3$ são constantes do movimento.

(b) Use a transformação canônica determinada pela função geratriz

$$S = \varphi_1 P_1 + \varphi_2 P_2 + \varphi_3 (P_3 - P_1 - P_2),$$

para obter as relações entre as novas variáveis canônicas $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, P_1, P_2, P_3)$ e as antigas $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, p_1, p_2, p_3)$.

(c) Obtenha a Hamiltoniana $H(\Phi_1, \Phi_2, P_1, P_2, P_3)$ que não depende explicitamente de Φ_3.

Questão 2 Considere o movimento de uma partícula com massa $m = 1$ e momento linear p sob a ação do potencial,

$$V(q) = 2q^2 - q^4.$$

(a) Faça um esboço do gráfico $V(q)$.

(b) Determine os pontos de equilíbrio (q^*, p^*) no espaço de fase.

(c) Determine a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio.

(d) Esboçe as trajetórias no espaço de fase.

(e) Determine a energia da separatriz.

(f) Escreva a equação da curva da separatriz.

Questão 3 A Hamiltoniana de um sistema é,

$$h(q_1, q_2, p_1, p_2, t) = p_1^2 + p_2^2 + \epsilon \cos(q_2 + ct),$$

sendo ϵ e c constantes conhecidas.

A função geratriz,

$$S = q_1 P_1 + P_2(q_2 + ct),$$

pode ser usada para obter um novo conjunto de variáveis canônicas (Q, P) e Hamiltoniana H, tal que,

$$\frac{\partial H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)}{\partial t} = 0.$$

Obtenha:

(a) as novas variáveis Q_1, Q_2, P_1 e P_2 em função das antigas q_1, q_2, p_1 e p_2.

(b) a nova Hamiltoniana $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$.

Questão 4 Considere a Hamiltoniana,

$$H_0 = J_1 + J_2 - J_1^2 - 3J_1J_2 + J_2^2,$$

sendo α_i as variáveis de ângulo e J_i as variáveis de ação $(i = 1, 2)$.

(a) Dado os valores iniciais J_i^0 e α_i^0, no instante $t = 0$, obtenha $J_i(t)$ e $\alpha_i(t)$.

Considere a Hamiltoniana perturbada,

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon J_1 J_2 \cos(m\alpha_1 + n\alpha_2), \qquad \epsilon \ll 1.$$

(b) Mostre que $F = nJ_1 - mJ_2$ é uma constante de movimento.

(c) O sistema perturbado é integrável?

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t) \ + \ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$