PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 2

23 de outubro de 2024

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 25/10/2024.
- A resolução pode ser enviada em formato PDF para luis.bernardi.souza@usp.br ou depositada no escaninho do Prof. Iberê L. Caldas na secretaria do Departamento de Física Aplicada.

(3 Pontos) Questão 1 Inicialmente, considere a Hamiltoniana integrável,

$$H_0 = \frac{I^2}{2},$$

a qual descrevemos em termos da variável de ação I. A seguir, considere a Hamiltoniana H comporta pela função H_0 e duas perturbações dependentes da variável angular θ e do tempo canônico τ:

$$H(\theta, I, \tau) = H_0(I) - a\cos\theta - b\cos(2\theta - \tau),$$

na qual as constantes $a \ll 1$ e $b \ll 1$ representam os parâmetros de controle.

(a) Mostre que as perturbações atuam de forma ressonante sobre trajetórias com ações em torno dos valores $I = 0$ e $I = 0.5$. (**1 ponto**)

(b) Calcule o espaçamento δI entre as ressonâncias no espaço de fase $I \times \theta$. (**0,5 ponto**)

(c) Calcule a largura no espaço de fase Δ_a da ilha localizada na região da ressonância com $I = 0$. Neste caso, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($b = 0$). (**0,5 ponto**)

(d) Calcule a largura no espaço de fase Δ_b de uma ilha localizada na região da ressonância com $I = 0.5$. Nesta situação, considere a Hamiltoniana local integrável com uma única ressonância ($a = 0$). (**0,5 ponto**)

(e) Escreva, em função dos valores dos parâmetros a e b, a condição de Chirikov para a observação, no espaço de fase, de caos global na região entre as duas ressonâncias discutidas anteriormente. (**0,5 ponto**)

(3 Pontos) Questão 2 Considere a seguinte Hamiltoniana::

$$H = \frac{J^3}{8} + \epsilon J^2 \cos(2\phi - 3t), \qquad \epsilon \ll 1,$$

na qual (ϕ, J) são as variáveis de ângulo e ação do sistema para $\epsilon = 0$.

(a) Estime o valor da condição inicial $J(t = 0) = \beta_r$ para o qual a perturbação sobre a trajetória, decorrente do termo da Hamiltoniana que depende do parâmetro ϵ, é ressonante. (**0,5 ponto**)

(b) Considere agora as trajetórias próximas à região de ressonância, ou seja, com condição inicial $J(t=0) \approx \beta_r$. Expandindo H em torno de $J = \beta_r$, obtenha a Hamiltoniana, (**1 ponto**)

$$h(\phi, \Delta J) = \omega_0 \Delta J + \frac{3\beta_r}{8} \Delta J^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos(2\phi - 3t).$$

Indique as transformações necessárias para obter h.

(c) Realize a transformação canônica com função geratriz $S = I(2\phi - 3t)$, entre os conjuntos de variáveis $(\phi, \Delta J)$ e (θ, I), e reescreva a Hamiltoniana h como, (**1 ponto**)

$$\bar{h}(\theta, I) = \frac{3\beta_r}{2} I^2 + \epsilon \beta_r^2 \cos\theta.$$

(d) Calcule a semi-largura Δ da ilha próxima à região da ressonância para $\bar{h}$. (**0,5 ponto**)

(4 Pontos) Questão 3 Considere, inicialmente, a seguinte Hamiltoniana integrável:

$$H_0 = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1 I_2 + I_2^2,$$

a qual está descrita em termos de suas variáveis de ângulo e ação, designadas respectivamente por θ_i e I_i, para $i = 1, 2$.

(a) Mostre que as frequências características das trajetórias no espaço de fase são (**0,5 ponto**)

$$\omega_1 = 1 - 2I_1 - 3I_2 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 1 - 3I_1 + 2I_2.$$

(b) No espaço de fase descrito pela Hamiltoniana H_0, considere uma trajetória Γ com condições iniciais $\theta_1(t=0) = \alpha_1$, $\theta_2(t=0) = \alpha_2$, $I_1(t=0) = \beta_1$ e $I_2(t=0) = \beta_2$. Calcule $\theta_i(t)$ e $I_i(t)$. (**0,5 ponto**)

(c) Agora, considere a Hamiltoniana H composta por H_0 e uma pequena perturbação:

$$H = H_0 + \alpha H_1 = H_0(I_1, I_2) + \alpha I_1 I_2 \cos(m\theta_1 - n\theta_2),$$

na qual m e n são dois números inteiros e $\alpha \ll 1$. Seja a função geratriz

$$G = F_1\theta_1 + F_2\theta_2 + \alpha g_{nm} \sin(m\theta_1 - n\theta_2), \quad g_{nm} = -\frac{F_1 F_2}{m\omega_1 - n\omega_2},$$

que define uma transformação canônica entre as variáveis (θ_i, I_i) e (ϕ_i, F_i). Empregando a transformação de variáveis estabelecida por G, podemos reescrever a Hamiltoniana H no seguinte formato:

$$H = h_0(F_1, F_2) + O(\alpha^2).$$

Mostre que as relações entre as novas e as antigas variáveis até a primeira ordem em α são (**0,5 ponto**)

$$\begin{aligned}
I_1 &= F_1 + \alpha m g_{nm} \cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
I_2 &= F_2 - \alpha n g_{nm} \cos(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
\theta_1 &= \phi_1 - \alpha \frac{g_{nm}}{F_1} \sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2) \\
\theta_2 &= \phi_2 - \alpha \frac{g_{nm}}{F_2} \sin(m\phi_1 - n\phi_2) + O(\alpha^2)
\end{aligned}$$

(d) Determine $h_0(F_1, F_2)$. (**1 ponto**)

(e) F_1 e F_2 são constantes de movimento, ao longo da trajetória Γ perturbada, até a primeira ordem em α. Justifique esta afirmação. (**1 ponto**)

(f) Obtenha as frequências características ν_1 e ν_2 da trajetória Γ perturbada no espaço de fase $F_i \times \phi_i$. (**0,5 ponto**)

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t) \ + \ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$