PGF 5005 - Mecânica Clássica

Prova 3

25 de novembro de 2024

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 26/11/2024.
- A resolução **deve ser enviada em formato PDF** para luis.bernardi.souza@usp.com.

(6 Pontos) Questão 1 Considere o seguinte mapa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + a - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

no qual a representa um parâmetro real positivo.

(a) 1 Ponto Mostre que o mapa conserva áreas.

(b) 1 Ponto Encontre os pontos fixos (x^*, y^*) do mapa (1).

(c) 1 Ponto Obtenha a matriz jacobiana A decorrente da linearização do mapa (1) em torno dos pontos fixos. Ou seja, encontre a matriz A tal que

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* + \delta x_n \\ y^* + \delta y_n \end{pmatrix}$$

(d) 1 Ponto Calcule os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A para cada ponto fixo.

(e) 1 Ponto Identifique os pontos fixos do mapa (1) como hiperbólicos ou elípticos em função do parâmetro a.

(f) 1 Ponto Determine as órbitas de período 2 do mapa (1), isto é, determine as trajetórias tais que $x_{n+2} = x_n$ e $y_{n+2} = y_n$.

(4 Pontos) Questão 2 Considere o mapa quadrático

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2(x_n^2 - K), \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \end{aligned} \tag{2}$$

(a) 2 Ponto Encontre os pontos fixos do mapa (2) e classifique-os como hiperbólicos ou elípticos.

(b) 2 Ponto Encontre o valor do parâmetro K, em que os pontos fixos bifurcam.

Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t) \ + \ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$