# PGF 5005 - Mecânica Clássica

## Prova 3

29 de novembro de 2023

---

- Entregar a resolução até as 12:00 horas (meio dia) do dia 01/12/2023.
- A resolução **deve ser enviada em formato PDF** para mmugnaine@gmail.com.

**Questão 1** Considere o mapa padrão no seguinte formato,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

no qual $x_n$ representa uma variável periódica, de maneira que podemos restringir seu valor ao intervalo $[0, 1)$.

**(a)** Mostre que o mapa padrão é simplético.

**(b)** Com a função geratriz,

$$F(x_n, x_{n+1}) = -\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2} + \frac{K\cos(2\pi x_n)}{4\pi^2}, \tag{2}$$

mostre que as equações (1) podem ser obtidas a partir de uma transformação canônica entre as variáveis $(x_n, y_n)$ e $(x_{n+1}, y_{n+1})$.

**(c)** Para um determinado valor de $K$, mostre que o mapa padrão, representado pelo operador $T_K$, pode ser reescrito como o produto de dois novos mapas, simbolizados pelos operadores $I_1$ e $I_2$, ou seja,

$$\begin{gathered} T_K = I_2 I_1, \\ \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = T_K \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} p + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) \\ -x \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ p - x \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3}$$

**(d)** Verifique que os pontos $A$ e $B$, para $A = (x = 0, p = 1)$ e $B = \left(x = \frac{1}{2}, p = 1\right)$, são pontos fixos do mapa padrão.

**(e)** Obtenha a matriz Jacobiana $F_K$ decorrente da linearização do mapa padrão em torno de um ponto fixo $(x_0, p_0)$:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \delta p_{n+1} \\ \delta x_{n+1} \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \delta p_n \\ \delta x_n \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} p_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 + \delta p_n \\ x_0 + \delta x_n \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4}$$

**(f)** Determine os autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ da matriz $F_K$ para os pontos $A$ e $B$.

**(g)** Identifique os pontos $A$ e $B$ como elípticos ($\lambda_1 = \lambda_2^*$) ou hiperbólicos $\left(\lambda_1 = \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$ como função do parâmetro $K \geq 0$.

# Formulário

$$E = T + V \qquad L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\{F, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad J = \frac{1}{2\pi}\oint p\ dq \qquad S = \int p(q, J) dq$$

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

$$F_1 = F_1(q, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}.$$

$$F_2 = F_2(q, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}.$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}.$$

$$F_4 = F_4(p, P, t) \qquad \Rightarrow \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

$$\bar{H}(Q, P, t) = \ H(q, p, t) \ + \ \frac{\partial F_j}{\partial t}, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$