



Prova 1

PGF 5005 – Mecânica Clássica
Matheus Lazarotto e Iberê Caldas



10 de setembro de 2025

Questão 1 (3.0 pts) Para um elétron de massa m e carga $-e$ movendo-se em um campo magnético uniforme, considere a Lagrangiana

$$L = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A},$$

sendo $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{B}{2}(-y, x)$ o potencial vetor, c a velocidade da luz e $\vec{r} = (x, y)$ a posição do elétron.

- a) (1.5 pt) Obtenha a Hamiltoniana do sistema em coordenadas polares (r, φ) .
- b) (1.5 pt) Encontre o raio r_c para órbitas circulares em função dos parâmetros do sistema (p_φ, c, e, B) . O raio r_c é comumente chamado raio de ciclotron ou raio de Larmor. Obtenha também a frequência de rotação ω_c , associada à rotação do ângulo φ .

Questão 2 (3.0 pts) Considere um sistema Hamiltoniano de um grau de liberdade descrito pelo par canônico (q, p) sob uma mudança para novas coordenadas (θ, I) dada por

$$\begin{aligned} q(\theta, I) &= f(I) \sin(\theta) \\ p(\theta, I) &= f(I) \cos(\theta), \end{aligned}$$

onde $f(I)$ é uma função a ser determinada.

- a) (1 pt) Determine a função $f(I)$ tal que a transformação seja canônica.
- b) (1 pt) Mostre que a geratriz $S(q, \theta) = \frac{1}{2}q^2 \cot(\theta)$ promove a transformação encontrada anteriormente.
- c) (1 pt) Mostre que o par (θ, I) são as variáveis de ângulo e ação da Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2).$$

Encontre $q(t)$ e $p(t)$ para condições iniciais (θ_0, I_0) , no instante $t = 0$.

Questão 3 (3.0 pts) Considere o movimento de uma partícula com massa $m = 1$ e momento p sob a ação do potencial

$$V(q) = 2q^2 - q^4$$

- a) (0.5 pt) Faça um esboço do gráfico de $V(q)$.
- b) (1.0 pt) Determine os pontos de equilíbrio (q^*, p^*) no espaço de fase e sua estabilidade linear.
- c) (1.0 pt) Esboce os tipos de trajetórias possíveis no espaço de fase. Lembre-se de indicar os pontos de equilíbrio e direção do movimento.
- d) (0.5 pt) Escreva a equação da curva separatriz.

Questão 4 (2.0 pts) Considere a Hamiltoniana

$$H_0(I_1, I_2) = I_1 + I_2 - I_1^2 - 3I_1I_2 + I_2^2$$

escrita em suas variáveis de ângulo e ação (θ_j, I_j) , $j = 1, 2$.

a) (1.0 pt) Dados os valores iniciais θ_j^0 e I_j^0 no instante $t = 0$, obtenha $I_j(t)$ e $\theta_j(t)$.

b) (0.5 pt) Considere agora uma perturbação sobre o sistema, escrito pela nova Hamiltoniana

$$H(\theta_1, \theta_2, I_1, I_2) = H_0 + \alpha I_1 I_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2).$$

Mostre que $F = I_1 + I_2$ é uma constante de movimento.

c) (0.5 pt) O sistema perturbado é integrável? Justifique.

Formulário

$$\vec{r} = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}$$

$$L = T - V$$

$$E = T + V$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

	q_i	p_i	Q_i	P_i
$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$		$\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$		$-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$		$\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	
$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$	$-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$			$-\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$	$-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$		$\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	

$$\vec{z} = \vec{\phi}(\vec{\omega})$$

$$D\vec{\phi}^T J D\vec{\phi} = J$$

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{Q_i, Q_j\} = 0$$

$$\{P_i, P_j\} = 0$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Boa Prova 