UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

Estruturas coerentes no transporte caótico induzido por ondas de deriva

Rafael Oliveira Suigh

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Iberê Luiz Caldas (Orientador - IFUSP)
Prof. José Carlos Sartorelli (IFUSP)
Prof[a]. Marisa Roberto (ITA)
Prof. José Danilo Szezech Jr. (UEPG)
Prof. Henrique de Melo Jorge Barbosa (IFUSP)

São Paulo
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Suigh, Rafael Oliveira

Estruturas coerentes no transporte caótico induzido por ondas de deriva. São Paulo, 2015.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1.Caos (Sistemas dinâmicos); 2. Sistemas Hamiltonianos; 3. Estruturas Langrangianas coerentes; 4. Caos Hamiltoniano; 5. Correntes de jato.

USP/IF/SBI-008/2016

Agradecimentos

Aos meus pais Antonio e Cristianne e meu irmão Rodrigo que sempre me apoiaram e incentivaram com os estudos.

À minha companheira Karine pela força e pelo incentivo nos momentos mais difíceis no final do doutorado.

Ao meu orientado Prof. Iberê pela confiança, incentivo e pela dedicação com que sempre me ajudou.

Aos amigos e colegas de trabalho do grupo de controle de caos.

Aos meus amigos do time de rugby Demônios de Maxwell.

Gostaria de agradecer também ao João Friaza por ter acendido em mim o desejo de entrar no mundo acadêmico e a Natalie que não me deixou desistir dele.

E finalmente à CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta tese foi estudado o transporte de partículas na borda do plasma confinado magneticamente em tokamaks a partir de um modelo para ondas de deriva proveniente de flutuações eletrostáticas geradas pela não uniformidade do plasma. Para investigar esse problema, consideramos o modelo com duas ondas de deriva, que possui uma complexa dinâmica não linear onde podemos encontrar tanto transporte anômalo quanto transporte difusivo. Para a encontras no plano de fases as Estruturas Lagrangianas Coerentes (ELCs) e os jatos, foram confeccionados mapas de Poincaré, diagramas de expoente de Lyapunov a tempo finito, diagramas de deslocamento quadrático, diagramas de autocorrelação da velocidade e o diagrama de retorno. Para avaliar o impacto dessas ELCs no transporte de partículas foram analisados a série temporal do desvio padrão médio, da dispersão relativa e dos saltos dentro do mapa de Poincaré e também foram confeccionados histogramas com a distribuição desses saltos. Foi encontrado que, com duas ondas de deriva e para uma determinada combinação de parâmetros, surgem correntes de jato, que persistem por longos períodos, imersas na região caótica. Verificamos que, assim como nas ilhas, a região interna às correntes de jato são inacessíveis às ELCs. Também foi encontrado que, quando existe uma corrente de jato, o transporte observado na região caótica não é simétrico com uma pequena deriva na direção contraria ao jato. Esse fenômeno observado ocorre em contrapartida ao caso típico de sistemas com mistura em que as ELCs tem acesso a todo o plano de fase e o transporte é difusivo.

Abstract

In this thesis we studied the particle transport in the edge of magnetically confined plasma in tokamaks using a model of drift waves due to electrostatic fluctuations generated by the non-uniformity of the plasma. To investigate this issue, we consider the model with two drift waves, which has a complex nonlinear dynamics where we can find both anomalous and diffusive transport. To find the Lagrangian Coherent Structures (LCSs) and the jets, we used Poincaré maps, Finite time Lyapunov exponent diagrams, quadratic displacement diagrams, autocorrelation velocity diagrams and return displacement diagram. To evaluate the impact of LCSs in the transport of particles, we analyzed the time series of both average standard deviation and relative dispertion and also histograms of the distribution of these jumps. It was found that, with two drift waves and for a given combination of parameters, a jet streams appear in the phase space and persist for long periods of time immersed in the chaotic region. We found that, as well as on the islands, the inner region of the jet streams are inaccessible to LCSs. It was also found that when there is a jet stream, the transport observed in the chaotic region is not symmetrical and have a small drift in the opposite direction to the jet. This phenomenon is observed in contrast to the typical case of systems with mixing in wich the LCSs have access to all the phase space and the trasnport is diffusive.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas encontrados para o confinamento de plasma em tokamaks é o transporte de partículas para a borda [1]. Esse transporte é causado principalmente pelo aparecimento de ondas de deriva obtidas através da combinação das flutuações eletrostáticas provenientes da não uniformidade do plasma com o campo magnético toroidal. Nesse trabalho investigaremos o transporte de partículas através da simulação numérica de um modelo hamiltoniano proposto por Horton [2] para tais ondas de deriva que surgem quando são considerados campos magnéticos uniformes e relacionaremos esse transporte com o surgimento de caos e estruturas coerentes no plano de fases.

As trajetórias caóticas desse modelo aparecem quando utilizamos duas ou mais ondas de deriva com velocidades de fase diferentes. Deste modo as equações de movimento não são integráveis, ou seja, não é possível achar uma função que seja solução das equações de movimento e descreva a posição das partículas em função do tempo. Sendo assim, surge um transporte devido ao comportamento caótico de algumas trajetórias [3].

Conduzindo essas trajetórias caóticas, existem estruturas dinâmicas conhecidas como Estruturas Lagrangianas Coerentes (*ELCs*)[4]. Em sistema não autônomos, as ELCs são análogas às variedades instáveis e estáveis de sistemas autônomos e tem a função de separar regiões de comportamentos distintos. Devido ao movimento das ELCs, as trajetórias caóticas se tornam sensíveis às condições iniciais. Essa sensibilidade exibe um padrão complexo e a importância do movimento das ELCs no transporte de partículas será investigado neste trabalho.

Para encontrar essas ELCs no plano de fases serão utilizados alguns métodos numéricos. O primeiro, bem conhecido na literatura, consiste em encontrar cristas nos campos de expoente de Lyapunov [5]. O segundo, utilizado anteriormente na dissertação de mestrado [6], consiste em encontrar cristas nos campos de deslocamento quadrático. O terceiro e o quarto, desenvolvidos nessa tese, consistem em avaliar os diagramas de autocorrelação da velocidade e de deslocamento de retorno. Esses quatro métodos se mostraram consistentes entre si e em comparação com o desenvolvido no grupo, que consiste em encontrar cristas nos campos de número de rotação (*winding number*) [7].

Os métodos acima são igualmente capazes de identificar a presença de Estruturas Lagrangianas Coerentes (ELCs) pois: as ELCs (a) tem a característica de separar regiões dinamicamente distintas, o que garante a eficiência dos campos de expoente de Lyapunov, já que condições próximas a separatrizes tendem a se separar com o passar do tempo; (b) induzem grande transporte na direção de maior esticamento, pois tendem a se espalhar rapidamente ao longo do espaço de fase, aumentando o deslocamento médio de partículas próximas e garante a eficiência do campo de deslocamento quadrático e; (c) quando se espalham pelo plano de fases, as ELCs giram mais rápido que as trajetórias das ilhas, garantindo a eficiência do campo de número de rotação.

Além das ilhas regulares e dos mares caóticos, veremos que surgem no espaço de fases trajetórias que se deslocam de maneira ordenada com a mesma velocidade que a segunda onda de deriva. Tal conjunto de trajetórias, chamadas de *corrente de jato*, aparece devido a uma sincronização entre as duas ondas de deriva e pode ser vista apenas para um pequeno conjunto de parâmetros. A combinação dos três primeiros métodos citados acima se mostra satisfatória para diferenciar ilhas, correntes de jato e mar caótico. Entretanto, o quarto método (deslocamento de retorno), se mostrou mais eficiente para identificar correntes de jato.

Devido às correntes de jato observa-se no plano de fase o surgimento da aceleração de Fermi [8]. Estudos recentes em bilhares bidimensionais ([9] e [10]) mostram que o comportamento da velocidade média das partículas em sistemas que possuem aceleração de Fermi podem ser descritos por leis de potência através do cálculo de *expoentes críticos*. Os expoentes medidos mostram que na presença dos jatos o transporte observado é superdifusivo. Por outro lado, quando não temos corrente de jato, o transporte é subdifusivo.

A presença e o movimento das ELCs no plano de fase geram dois efeitos distintos nas trajetórias caóticas: o espalhamento e a mistura de partículas. Esses dois efeitos são caracterizados pela análise estatística da *Dispersão Média* [5] e da *Dispersão Relativa* [11]. Quando a dispersão média é alta e a dispersão relativa é baixa, teremos um espalhamento de partículas sem mistura e, por outro lado, se a dispersão relativa for alta e a dispersão média for baixa teremos mistura sem espalhamento. Entretanto, de maneira geral, uma combinação de espalhamento e mistura é observada no problema de ondas de deriva.

Para saber como essas estruturas se comportam em sistemas mais próximos dos encontrados na natureza, aprimoramos o modelo inserindo um ruído gaussiano de maneira semelhante ao movimento Browniano simulando a *difusão molecular* [12] das partículas.

Veremos que com a difusão molecular as estruturas tendem a se dissolver. Com isso o perfil do transporte é modificado e o sistema passa a apresentar um comportamento difusivo mesmo quando existem correntes de jatos.

No capítulo 2 serão apresentados brevemente alguns conceitos utilizados para descrever o transporte de maneira que seja possível diferenciar o transporte difusivo (ou normal) do anômalo. Por fim, introduziremos um dos mecanismos responsáveis pelo surgimento do transporte anômalo, os voos de Lévy, e como identificá-lo a partir de leis de potência.

No capítulo 3 introduziremos as *Estruturas Lagrangianas Coerentes (ELCs)* como uma generalização das variedades instáveis e estáveis dos pontos hiperbólicos de sistemas autônomos. ELCs são de grande importância na dinâmica, veremos que elas são responsáveis pelo aparecimento de barreiras que criam células no espaço de fase e, dependendo de como se movem, pela mistura e pela dispersão de partículas pelo plano de fase.

No capítulo 4 será apresentado um resumo sobre o modelo das ondas de deriva utilizado para o estudo do transporte de partículas do plasma confinado em tokamaks. Além disso, serão mostrados alguns resultados para o sistema autônomo e o que ocorre no plano de fases quando surgem trajetórias caóticas devido à inclusão de uma dependência temporal na hamiltoniana.

No capítulo 5 veremos com detalhes como se dá o aparecimento de correntes de jato no mar caótico. Tais correntes de jato serão responsáveis pelo surgimento de transporte balístico em contrapartida ao confinamento presente nas ilhas. Sendo assim, veremos que as trajetórias caóticas sofrerão a influência das ilhas e das correntes de jato, podendo apresentar transporte subdifusivo ou superdifusivo, dependendo do tempo que permanecem grudadas à ilhas ou às correntes de jato.

No capítulo 6 estudaremos o que acontece no plano de fase quando é considerada a difusão molecular. Essa difusão molecular será incluída como um chute de tamanho aleatório seguindo uma distribuição gaussiana. De maneira geral veremos que tal ruído tende a ejetar partículas de dentro das correntes de jato e ilhas, além de diminuir o tempo que as trajetórias caóticas ficam aprisionadas tanto em jatos quanto em ilhas. Sendo assim, a difusão molecular suprime tanto o transporte superdifusivo gerado pelas correntes de jato quanto o transporte subdifusivo gerado pelas ilhas.

Por fim, no capítulo 7 será apresentado um resumo das principais conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Transporte em fluidos

2.1 Introdução

Nesse capítulo de caráter apenas expositivo, serão apresentados brevemente os conceitos utilizados para descrever o transporte, diferenciando o transporte difusivo (ou normal) do anômalo. Por fim, introduziremos um possível mecanismo responsável pelo surgimento do transporte anômalo, os voos de Lévy, e como identificá-lo a partir de leis de potência.

2.2 Transporte difusivo

Como feito por *Adolf Fick*, em 1855, e descrito em [13], vamos supor que a corrente de algum contaminante ($\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$) seja proporcional a diferença de concentração entre duas regiões, de acordo com:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = -\kappa\nabla\mathcal{P}(\mathbf{x},t). \tag{2.1}$$

Onde κ é o coeficiente de difusão e $\mathcal{P}$ é a concentração.

Sabendo, pela conservação de partículas, que

$$\frac{\partial\mathcal{P}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{x},t), \tag{2.2}$$

podemos escrever a equação de transporte na ausência de forças externas

$$\frac{\partial\mathcal{P}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \kappa\nabla^2\mathcal{P}(\mathbf{x},t). \tag{2.3}$$

Somando ao lado direito da equação 2.1 um termo proporcional a força externa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\mathcal{P}(\mathbf{x},t), \tag{2.4}$$

chegamos a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(-\mu \mathbf{f} \mathcal{P}(\mathbf{x},t) + \kappa \nabla \mathcal{P}(\mathbf{x},t)\right). \tag{2.5}$$

onde μ uma constante relacionada a mobilidade da partícula.

Essa equação é utilizada para descrever a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma determinada posição e tempo para sistemas sem correlação ou do tipo Markoviano, ou seja, em casos que um evento dependa apenas das condições do sistema num tempo imediatamente anterior [23]. Sendo assim, utilizando $x = |\mathbf{x}|$, a distribuição de probabilidades de um sistema de dimensão d é

$$\mathcal{P}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{d/2}} exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right). \tag{2.6}$$

e, portanto, o desvio quadrático médio é

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = \int x^2 \mathcal{P}(\mathbf{x},t) d^3x = 2d\kappa t. \tag{2.7}$$

Assim, para o transporte difusivo, o desvio quadrático médio é proporcional ao tempo, $\langle x^2 \rangle \propto t$.

2.3 Transporte Anômalo

Em muitos casos o movimento das partículas não é suficientemente descorrelacionado ou quando o passo de um passeio aleatório é arbitrariamente grande, a equação 2.5 não é suficiente. Como consequência disso a relação da equação 2.7 não é mantida e surge uma relação mais geral da forma

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle \propto t^{\nu}, \tag{2.8}$$

onde o coeficiente de transporte ν é um número real.

Assim, podemos qualificar o transporte como *sub-difusivo* quando $\nu < 1$, *difusivo* quando $\nu = 1$ e *super-difusivo* quando $\nu > 1$.

Uma proposta para a análise estatística desse tipo de sistemas é a introdução de uma *equação de Fokker-Planck fracionária* ([14], [13] e [15]) que generaliza a equação 2.5 para

$$\frac{\partial^{\gamma} \mathcal{P}(\mathbf{x},t)}{\partial t^{\gamma}} = \nabla^{\alpha} \cdot \left(-\mu_{\alpha} \mathbf{f} \mathcal{P}(\mathbf{x},t) + \kappa_{\alpha} \nabla^{\alpha} \mathcal{P}(\mathbf{x},t)\right). \tag{2.9}$$

onde μ_{α} é a mobilidade fracionária, κ_{α} é o coeficiente de difusão fracionária, $\nabla^{\alpha} =$

$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha}, ..., \frac{\partial^\alpha}{\partial x_n^\alpha}\right)$ é um operador de derivadas parciais fracionárias, α é um coeficiente real associado à fractalidade do espaço e γ à fractalidade do tempo.

As derivadas parciais fracionárias são generalizações das derivadas fracionárias que são definidas a partir do operador integral fracionário

$$D^{-u}g(t) = \frac{1}{\Gamma(u)}\int_0^t (t-\xi)^{u-1}g(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{2.10}$$

com $u > 0$, como

$$D^u g(t) = D^m \left[D^{u-m}g(t)\right], \tag{2.11}$$

onde $\Gamma(u)$ é a função gama, $m = [u] + 1$ e $[u]$ é a parte inteira de u.

Quando o termo com κ_α é dominante na equação 2.9 podemos obter o coeficiente de transporte a partir da relação

$$\nu = \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{2.12}$$

que retoma o coeficiente $\nu = 1$ quando o transporte for difusivo ($\alpha = 1$ e $\gamma = 1$).

As modificações decorrentes da equação de Fokker-Plank fracionária criam um comportamento que dá origem à *leis de escala* explicadas na seção 2.5.

2.4 Passeio aleatório e voos de Lévy

O *passeio aleatório* [16] é a forma mais comum de se descrever sistemas que apresentam transporte difusivo. Nesse tipo de passeio, assumimos que a cada instante uma partícula dê um passo de tamanho fixo numa direção aleatória. Como resultado desse passeio, em duas dimensões, teremos uma distribuição de probabilidade gaussiana para posições

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\mathcal{P}_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.13}$$

onde a dispersão média ou variância (σ^2) tem uma relação linear com o tempo,

$$\sigma^2 = 2\kappa t. \tag{2.14}$$

Por outro lado, se o tamanho desses passos tiver comprimento aleatório seguindo uma distribuição de calda larga, teremos outro tipo de passeio conhecido como *voos de Lévy*. Os voos de Lévy servem de modelo dinâmico para sistemas com regime de transporte super-difusivo. Assim, surgem distribuições de Lévy que generalizam e substituem a distribuição Gaussiana do passeio aleatório.

A questão principal do voo de Lévy é saber qual relação entre a distribuição de um passo ($\mathcal{P}_1(x)$) com a distribuição de N passos ($\mathcal{P}_N(x)$). O primeiro a responder essa questão foi Augustine Cauchy em 1853. A forma para essa distribuição foi encontrada em [22], transformando-se o problema para o espaço de Fourier k de modo que

$$\widetilde{\mathcal{P}}_N(k) = e^{-N|k|^\beta}. \tag{2.15}$$

Com $\beta = 1$, transformando de volta para o espaço x, temos

$$\mathcal{P}_N(x) = \frac{1}{\pi N}\frac{1}{1+(x/N)^2} = \frac{1}{N}\mathcal{P}_1(x/N). \tag{2.16}$$

que é conhecida como *distribuição de Cauchy* e mostra explicitamente a relação entre a distribuição de um passo com a de N passos. Com $\beta = 2$ retomamos a distribuição gaussiana.

A comparação entre o passeio aleatório e o voo de Lévy está mostrada na figura 2.1. Essa figura foi retirada de [14] e mostra como a partícula que segue o voo de Lévy se espalha muito mais pelo plano de fase do que a que segue o passeio aleatório.

Figura 2.1: Exemplo com aproximadamente 7000 passos de uma partícula seguindo o movimento Browniano (esquerda) e o voo de Lévy (direita).

É importante lembrar que foi demonstrado por Lévy que β na equação 2.15 deve ter um valor entre zero e dois, pois, por se tratar de uma probabilidade, $\mathcal{P}(x)$ deve ser não negativo para todo valor de x. Sendo assim, para valores elevados do valor absoluto de x

temos

$$\mathcal{P}(x) \approx |x|^{-1-\beta}, \tag{2.17}$$

o que implica que o segundo momento $E[x^2]$,

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathcal{P}(x) \mathrm{d}x, \tag{2.18}$$

é infinito para $0 < \beta < 2$, portanto não existe um tamanho característico para o voo de Lévy. Entretanto, é possível identificar nesse passeio um comportamento de escala.

2.5 Leis de escala

Uma lei ou comportamento de escala aparece em um grande número de fenômenos naturais e pode estar relacionada com algum tipo de fractal.

As distribuições que seguem leis de potência tem atraído atenção por suas propriedades matemáticas e por sua aparição em uma gama diversificada de fenômenos naturais: As populações das cidades e a ocorrência de terremotos são exemplos que seguem leis de potência para as distribuições. Essas quantidades não são bem caracterizadas pelos seus valores típicos ou pela média. Discussões extensas e outras propriedades das leis de potência podem ser encontrados em [17], [18] e [19].

Uma grandeza x_i apresenta comportamento de escala quando ela apresenta uma distribuição de probabilidade $\mathcal{P}(x_1, x_2, ..., x_n)$ de maneira que

$$\mathcal{P}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \tag{2.19}$$

onde λ é uma constante de normalização e α_i são os expoentes de escala.

Na prática, alguns fenômenos empíricos não obedecem as leis de potência para todos os valores de x_i, mas muitas vezes a lei de potência aplica-se apenas em um intervalo de valores a partir de algum x_i^{min} mínimo. Nesses casos dizemos que a cauda da distribuição segue uma lei de potência.

Um exemplo de um comportamento que segue uma lei de potência é a ocorrência de terremotos com amplitudes altas, a figura a seguir foi retirada de [20] e mostra uma distribuição cuja cauda segue uma lei de potência.

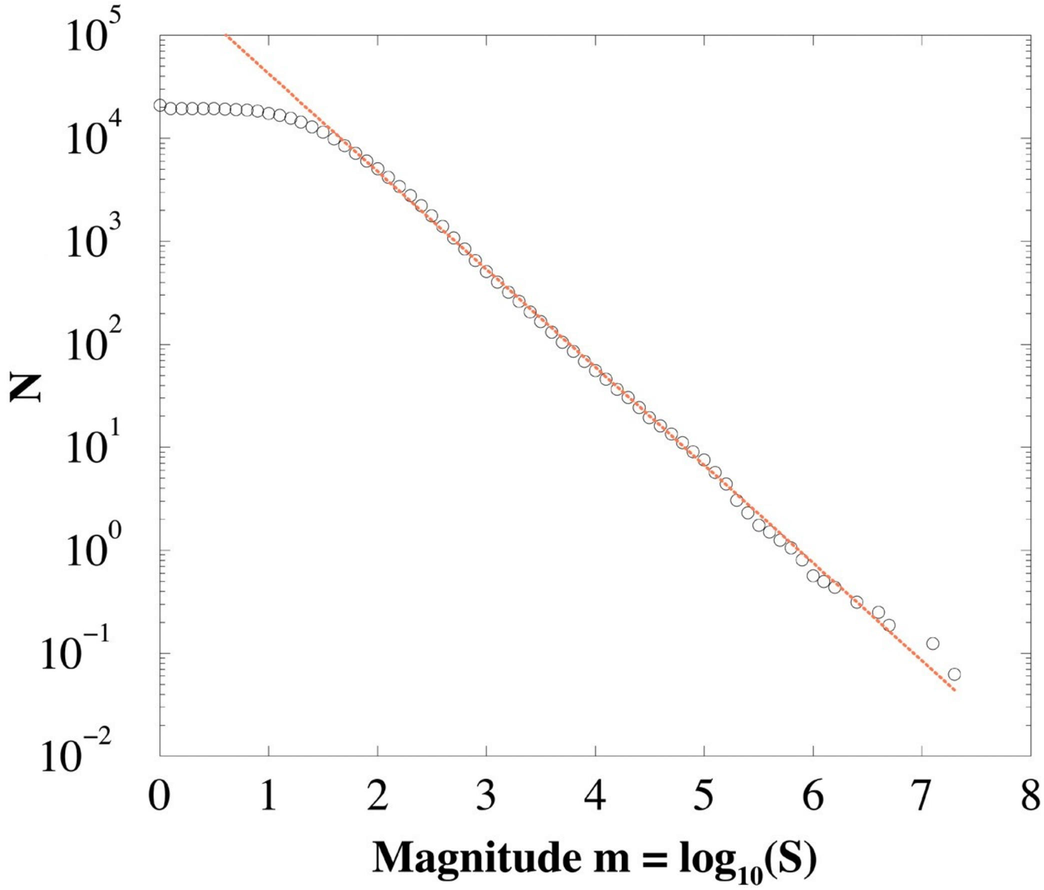

Figura 2.2: Distribuição da ocorrência de terremotos mostrando um comportamento em lei de potência com mais de 6 décadas. A função ajustada é $\log_{10} N \propto -bm$, onde $b = 1$ é o expoente de Gutenberg-Richter e m a magnitude do terremoto. A função é ajustada para a magnitude > 2 devido à dificuldades em detectar terremotos muito pequenos.

2.6 Conclusões

Nesse capítulo foi apresentado de maneira simplificada os principais conceitos que serão utilizados nessa tese referentes ao transporte em fluídos. Vimos aqui que, através de expoentes característicos extraídos do ajuste de leis de potência para o desvio quadrático médio, podemos separar o transporte em difusivo, subdifusivo e superdifusivo. Quando esse expoente é igual a um o transporte é difusivo e quando é maior ou menor que um é superdifusivo ou subdifusivo respectivamente.

Foi também apresentada uma visão geral sobre o passeio aleatório que será utilizado mais tarde no capítulo 6 para simular a difusão molecular. Vimos que por ter pulos de tamanho finito, esse passeio se espalha de maneira muito mais lenta através do espaço de fase do que os voos de Lévy.

Capítulo 3

ELCs no Espaço de Fase

3.1 Introdução

Em sistemas autônomos, sabemos que as variedades instáveis e estáveis dos pontos hiperbólicos são de grande importância na dinâmica [24]. Elas são responsáveis pelo aparecimento de barreiras que criam células no espaço de fase e por isso influenciam as trajetórias em suas proximidades. No entanto, quando inserimos o tempo nas equações, nem sempre é possível calcular um ponto fixo, pois, em geral, o ponto de equilíbrio passa a depender do tempo e, sendo assim, não podemos definir as variedades. Nesse capítulo apresentaremos uma estrutura dependente do tempo que toma o lugar das variedades em sistemas autônomos [5]. Essa estrutura é conhecida como *Estrutura Lagrangiana Coerente* (ELC, ou, em inglês, Lagrangian Coherent Structure – LCS) e aparece no plano de fase como uma barreira que se movimenta. Dependendo desse movimento podem ser criadas ilhas ou podem aparecer regiões de transporte elevado.

3.2 Definição de ELCs

Vamos considerar um sistema dinâmico contínuo que pode ser representado de maneira geral como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Em um caso particular, podemos dizer que a variável dependente $\mathbf{x}$ é o vetor posição de uma partícula em um fluido, a variável independente t é o tempo, $\mathbf{v}$ é o campo de velocidades ao qual esse fluido está sujeito e $\dot{\mathbf{x}}$ é a derivada de $\mathbf{x}$ em relação a t.

Conforme o tempo evolui, as soluções da equação 3.1 descrevem as possíveis trajetórias de uma partícula desse fluido. Com essas soluções podemos construir o mapa estroboscópico com período τ:

$$\phi_{t_0}^{t_0+\tau} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + \tau).$$

A taxa de crescimento da distância entre duas trajetórias inicialmente próximas, devido à advecção pelo fluido, é caracterizada pelo *Expoente de Lyapunov a tempo finito* (FTLE, Finite-time Lyapunov Exponent)[21]. Para calculá-lo vamos considerar duas trajetórias distintas, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, de modo que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}(t)$, onde $\delta\mathbf{x}(t_0)$ é a distância inicial entre essas trajetórias. Depois de transcorrido um tempo T essa distância é:

$$\delta\mathbf{x}(t_0 + T) = \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{y}) - \phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}(t_0) + \mathcal{O}(||\delta\mathbf{x}(t_0)||^2).$$

Desde que $\delta\mathbf{x}(t_0)$ seja infinitesimal podemos assumir que os termos de ordem maior que $(||\delta\mathbf{x}(t_0)||^2)$ são desprezíveis, assim o módulo da distância entre as duas trajetórias é dada por

$$\begin{aligned} ||\delta\mathbf{x}(t_0 + T)|| &= \sqrt{\left\langle \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}(t_0), \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}(t_0) \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \delta\mathbf{x}(t_0), \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}^* \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}(t_0) \right\rangle}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

utilizando que a matriz M^* é a representação da transposta conjugada da matriz qualquer M. Assim a versão de tempo finito do tensor de deformação de Cauchy-Green é

$$\Delta = \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}^* \frac{\mathrm{d}\phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}. \tag{3.3}$$

A distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ será maximizada quando o $\delta\mathbf{x}(t_0)$ escolhido estiver alinhado com o autovetor associado ao máximo autovalor de Δ. Assim, se $\lambda_{max}(\Delta)$ for o máximo autovalor de Δ, então:

$$\max_{\delta\mathbf{x}(t_0)} ||\delta\mathbf{x}(t_0 + T)|| = \sqrt{\langle \overline{\delta\mathbf{x}}(t_0), \lambda_{max}(\Delta)\overline{\delta\mathbf{x}}(t_0) \rangle} = \sqrt{\lambda_{max}(\Delta)}||\overline{\delta\mathbf{x}}(t_0)|| \tag{3.4}$$

de maneira que $\overline{\delta\mathbf{x}}(t_0)$ esteja alinhado ao autovetor associado a $\lambda_{max}(\Delta)$.

Assim, se definirmos o expoente de Lyapunov a tempo finito (FTLE) em um instante

t_0 com um tempo de integração T como

$$\sigma_{t_0}^{T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{\lambda_{max}(\Delta)}, \tag{3.5}$$

podemos escrever a equação 3.4 como

$$\max_{\delta\mathbf{x}(t_0)} ||\delta\mathbf{x}(t_0 + T)|| = e^{\sigma_{t_0}^{T}(\mathbf{x})|T|} ||\overline{\delta\mathbf{x}}(t_0)|| \tag{3.6}$$

Sendo assim, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente com o tempo e a grandeza que quantifica esse crescimento é o expoente de Lyapunov. Sendo assim, se as trajetórias se aproximarem o expoente será negativo e se se afastarem esse expoente será positivo.

Calculando-se o expoente de Lyapunov a tempo finito (FTLE) para cada uma das trajetórias obtidas a partir da integração da equação 3.1 com um conjunto de diferentes condições iniciais, obtemos o *campo FTLE*, ou apenas campo de Lyapunov. Assim, é possível, a partir do campo de Lyapunov, encontrar regiões em que a divergência entre trajetórias é grande ou pequena.

O campo de Lyapunov $\sigma_t^T(\mathbf{x})$ possui cristas, ou seja, regiões onde o expoente de Lyapunov é máximo localmente. Em um determinado instante, tais cristas definem as *Estruturas Lagrangianas Coerentes (ELC)* ou em inglês *Lagrangian Coherent Structures (LCS)*.

Uma crista do campo de Lyapunov $\sigma_t^T(\mathbf{x})$ é uma curva injetiva $\mathbf{c} : s \mapsto D$, onde $s \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

$$\textbf{SR1:} \qquad \mathbf{c}'(s) \parallel \nabla\sigma(c(s)) \tag{3.7}$$

$$\textbf{SR2:} \quad \Sigma(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \min_{||u||=1} \Sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0 \tag{3.8}$$

Onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal a curva $\mathbf{c}(s)$, $\mathbf{c}'(s) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}s}$ e Σ é

$$\Sigma = \frac{\mathrm{d}^2\sigma_t^T(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}^2}. \tag{3.9}$$

Dessa maneira, garantimos que, segundo a 3.7, as ELCs são curvas paralelas às cristas do campo de Lyapunov e que, segundo a 3.8, tem a mesma curvatura da direção com menor curvatura do campo do campo de Lyapunov. Ou seja, as ELCs são curvas que acompanham as cristas de Lyapunov.

Como, de maneira geral, o campo de Lyapunov depende do tempo, suas cristas também serão função do tempo. Portanto, as ELCs associadas ao campo $\sigma_t^T(\mathbf{x})$ serão curvas $\mathbf{c}_t(s)$

que dependem do tempo.

3.3 Fluxo através de uma ELC

A principal propriedade de uma ELC é que o fluxo através dela é muito pequeno e que para fins práticos pode ser considerado nulo, sendo essa propriedade invariante que torna coerente tal estrutura.

Nesta seção iremos apresentar brevemente a demonstração de um teorema que estima o fluxo através de uma ELC. Assim como feito em [25], para começar essa demonstração iremos escolher uma função $L(\mathbf{x}, t)$, tal que a ELC seja dada por $L(\mathbf{x}, t) = 0$.

Supondo que tenhamos um campo de Lyapunov que possua ELCs como definido anteriormente. Para cada instante t, $L(\mathbf{x}, t)$ é definido pelas condições:

$$\textbf{L1:} \qquad |L(\mathbf{x}, t)| = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_q|| \tag{3.10}$$

$$\textbf{L2:} \quad L(\mathbf{x}, t)\left[((\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \times \mathbf{c}'_t) \cdot \hat{k}\right] \geq 0 \tag{3.11}$$

Onde $\mathbf{x}_q$ é o ponto na ELC mais próximo ao ponto $\mathbf{x}$ e $\hat{k}$ é um vetor unitário apontando para fora do plano de fases.

Com essa definição, a função $L(\mathbf{x}, t)$ dá a distância entre um ponto arbitrário $\mathbf{x}$ e um ponto mais próximo da ELC (equação 3.10) e um sinal (equação 3.11). Se o ponto arbitrário $\mathbf{x}$ estiver a direita o sinal é positivo e se estiver a esquerda negativo.

Das equações 3.10 e 3.11, podemos escrever L como uma função de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_q$. Então, indicando explicitamente as dependências funcionais, temos que

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) = \pm||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_q(\mathbf{x}(t), t)||. \tag{3.12}$$

Derivado a variável L em relação ao tempo chegamos que

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_q} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_q}{\mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

onde o gradiente espacial é

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \nabla(L) = \frac{\pm 1}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_q||}\left\langle I - \frac{\partial \mathbf{x}_q}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_q \right\rangle. \tag{3.14}$$

Como $\mathbf{x}_q$ é o pondo na ELC mais próximo do ponto $\mathbf{x}$, o vetor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_q$ é normal a ELC, o que implica que

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_q}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_q \right\rangle = 0. \tag{3.15}$$

É importante ressaltar que a equação 3.15 só é valida desde que exista uma vizinhança aberta em torno de uma ELC tal que, para cada ponto $\mathbf{x}$, exista apenas um $\mathbf{x}_q$. Entretanto, como as ELCs são curvas suaves e de curvatura finita, essa vizinhança sempre existirá [25].

Com isso, podemos escrever o gradiente espacial da equação 3.14 como

$$\begin{aligned} \nabla(L) &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_q}{\pm||\mathbf{x} - \mathbf{x}_q||} \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_q}{L} \\ &= \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ denota o vetor unitário ortogonal a ELC no instante t.

Analogamente ao feito com $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$ podemos calcular $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_q}$ e como

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_q} = \frac{\mathbf{x}_q - \mathbf{x}}{L} = -\nabla(L) \tag{3.17}$$

Portanto a equação 3.13 pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \nabla(L) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_q}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.18}$$

onde vemos que a variação de L é proporcional a projeção na direção ortogonal a ELC da diferença entre as velocidades de um ponto carregado pelo fluido ($\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$) e um ponto que se move com a ELC ($\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_q}{\mathrm{d}t}$).

Utilizando a equação 3.18, podemos escrever o fluxo através de uma ELC como

$$\Phi(t) = \int_{ELC} \left. \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \right|_{L=0} \mathrm{d}s, \tag{3.19}$$

com s sendo alguma parametrização pelo comprimento de arco.

De acordo com [25] podemos escrever o integrando da equação 3.19 como

$$\left. \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \right|_{L=0} = \underbrace{\frac{\langle \hat{\mathbf{t}}, \nabla\sigma \rangle}{\langle \hat{\mathbf{n}}, \Sigma\hat{\mathbf{n}} \rangle}}_{\mathrm{I}} \underbrace{\left\langle \hat{\mathbf{t}}, \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial t} - J\hat{\mathbf{n}} \right\rangle}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{|T|}\right)}_{\mathrm{III}}, \tag{3.20}$$

onde todos os termos do lado direito são calculados em torno de $L = 0$, $\hat{\mathbf{t}}$ é um vetor unitário tangente a ELC, J é a jacobiana do campo de velocidades e Σ é definido na equação 3.9.

Na equação 3.20, o termo I é proporcional a $|\nabla\sigma|$, mede o quão definido é a crista de uma ELC e tende a zero para cristas bem definidas. Já o termo II mede a diferença entre a rotação da ELC com o campo de velocidades local. E, finalmente, o termo III tende a zero para tempos de integração (T) grandes, mostrando que as ELCs se comportam como variedades invariante quanto maior o T.

3.4 Aplicações

3.4.1 Observações experimentais das ELCs

As ELCs são a generalização das variedades de sistemas autônomos e funcionam como separatrizes dependentes do tempo, dividindo regiões dinamicamente distintas. Assim, conhecendo o movimento das ELCs no plano de fases, é possível identificar a existência de ilhas ou de regiões de transporte elevado. Elas tem sido usadas para descrever a turbulência hidrodinâmica tridimensional com simulações numéricas [26], experimentos de fluídos em laboratório [27] [28], dados observacionais de oceanos [29] [30] e da atmosfera [31], bem como em simulações numéricas bidimensionais com plasmas de fusão [32], reconexão magnética [33] e em simulações tridimensionais de MHD conservativo [34] e dissipativo [35].

Um exemplo de como as ELCs aparecem no plano de fases está mostrado na figura 3.1, retirada de [28], que mostra o movimento de um corante numa cadeia de vórtices oscilantes. Essa configuração experimental gera um movimento de partículas semelhante ao modelo de ondas de deriva utilizado no capítulo 4.

3.4.2 ELCs e o deslocamento quadrático

Já que as ELCs se movimentam e com isso carregam as partículas que estão em seu redor, é esperado que nas proximidades das ELCs as órbitas sofram um transporte maior. Portanto, regiões no espaço de fase com deslocamento quadrático elevado estarão relacionadas à presença de ELCs [38]. Sendo assim, utilizaremos como critério para encontrar as ELCs no plano de fase o diagrama de deslocamento quadrático.

Os diagramas de deslocamento serão obtidos a partir de um conjunto de condições iniciais distintas, espalhadas de maneira uniforme no espaço de fase. Sendo assim, o

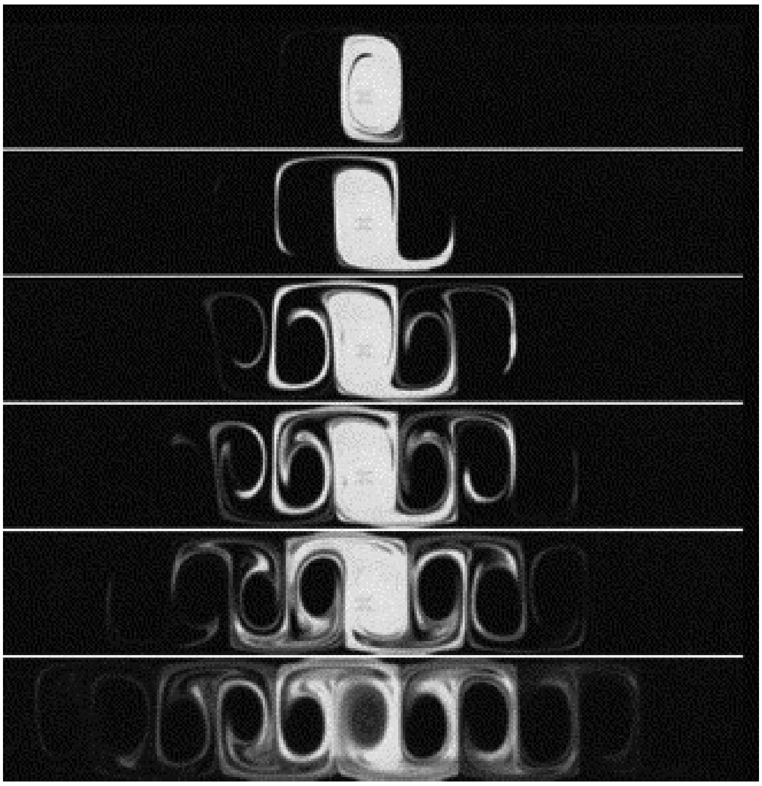

Figura 3.1: Sequência mostrando a distribuição de um corante na cadeia de vórtices oscilantes, o período de oscilação é de 19s e os tempos mostrados, a partir do início (do topo), são: 0, 1, 2, 3, 4, e 10 períodos de oscilação. Figura retirada de [28].

deslocamento quadrático será uma função das condições iniciais e do tempo, ou seja, $\Delta\mathbf{x}^2(x_0, y_0, t)$.

Um exemplo desses diagramas de deslocamento quadrático é mostrado na figura 3.2. A escala de cores representa o deslocamento quadrático para cada condição inicial.

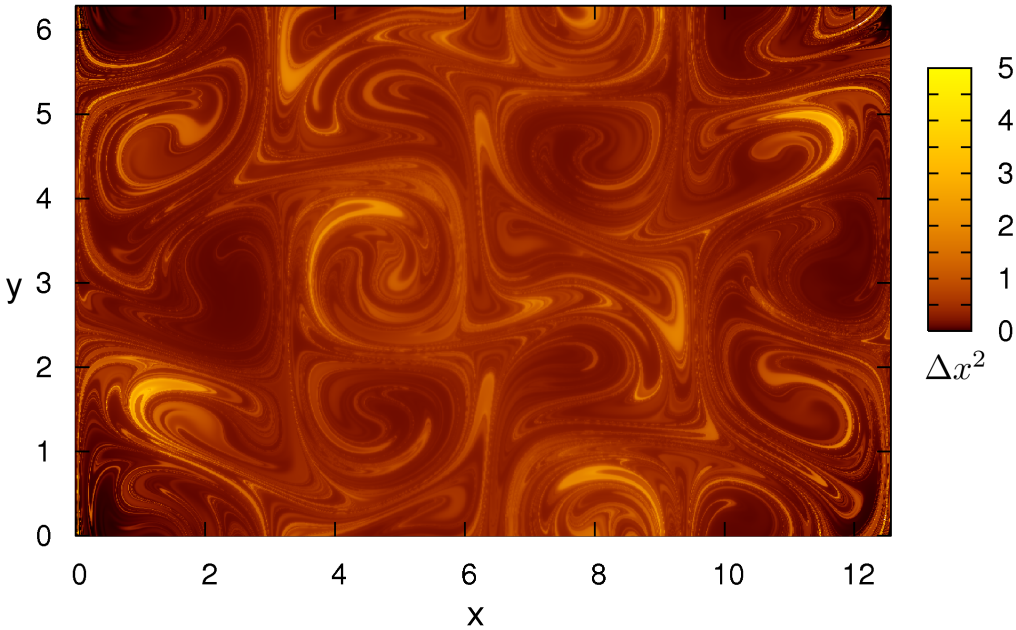

Figura 3.2: Exemplo do diagrama de deslocamento quadrático para um conjunto de condições iniciais. Note que existem regiões com deslocamento alto e regiões com deslocamento baixo, as ELCs são as estruturas que dividem essas duas regiões.

As ELCs são responsáveis por separar as regiões de alto e baixo deslocamento quadrático, sendo assim funcionam como separatrizes dependentes do tempo que se movimentam com o mesmo período (τ) do campo de velocidades. Assim, a figura 3.2 é apenas uma foto mostrando a separação criada pelas ELCs em um determinado instante. Para entender o que acontece no plano de fases, é preciso acompanhar essas estruturas durante um intervalo de tempo. Para o mesmo conjunto de parâmetros da figura 3.2, na figura 3.3 está mostrado como as ELCs se movem durante um período.

Para verificar como as ELCs guiam o movimento das trajetórias do plano de fase, foram integrados numericamente quatro conjuntos de condições iniciais durante um período. Na figura 3.4 pode-se ver que a distribuição dessas partículas no plano de fase segue um padrão semelhante ao padrão feito pelas ELCs da figura 3.3.

No lugar de estudar um grande conjunto de condições iniciais espalhadas por todo o plano de fase, podemos escolher apenas algumas condições iniciais próximas as *separatrizes de um tempo fixo* e avaliar como essas separatrizes se comportam depois de um determinado tempo de integração. Denomina-se separatriz de um tempo fixo como sendo

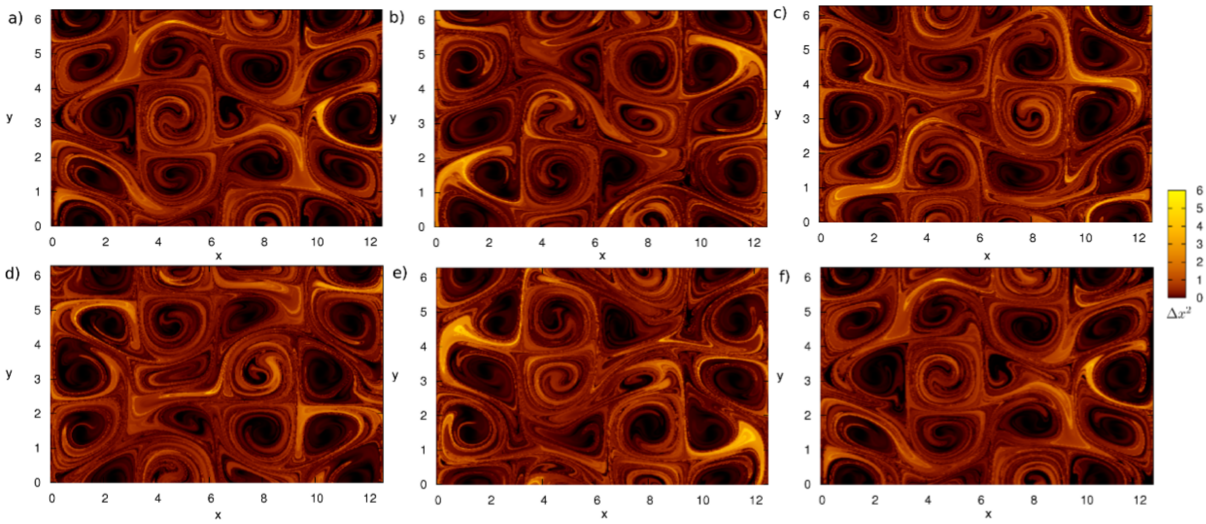

Figura 3.3: Geometria instantânea das ELCs. Cada quadro representa um instante: a) 0, b) 0.2τ, c) 0.4τ, d) 0.6τ, e) 0.8τ, f) τ.

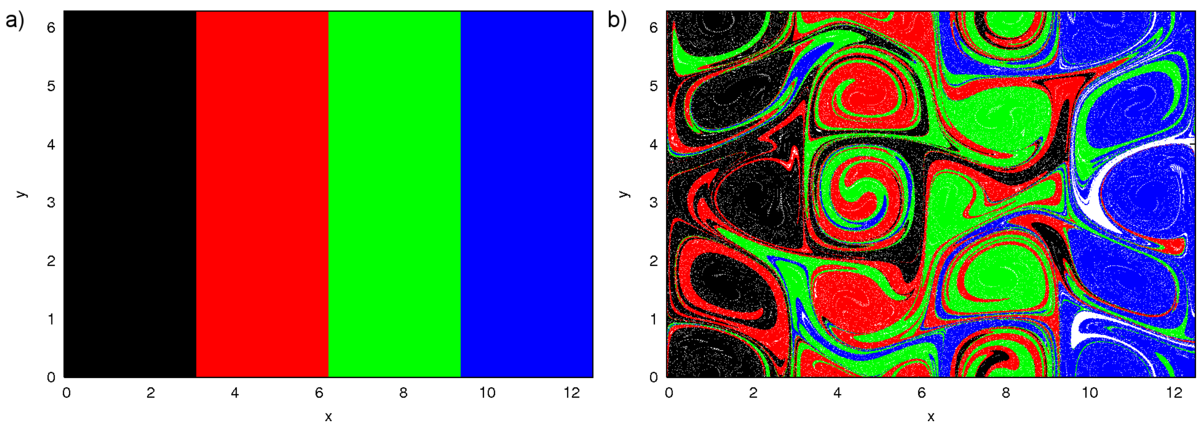

Figura 3.4: Concentração de partículas no plano de fases inicialmente (a) e depois de 1 período de integração (b). Note que o rastro deixado pelas partículas copia a forma com que as ELCs se espalham pelo espaço de fases.

a separatriz que existiria no plano de fase caso não houvesse dependência temporal. Na figura 3.5a está mostrada a separatriz de tempo fixo igual a zero, ou seja, como seria a separatriz quanto fixamos $t = 0 = cte$ nas equações de movimento.

O movimento das ELCs tende a guiar todas as trajetórias próximas, já que essas estruturas funcionam como barreiras de transporte. Além disso, elas são classificadas como instáveis quando repelem partículas próximas e estáveis quando atraem trajetórias. Na figura 3.5 está mostrada a ELC instável, obtida através da integração de um conjunto de condições iniciais para o futuro (tempos positivos), e a estável, obtida com a evolução do mesmo conjunto para o passado (tempos negativos).

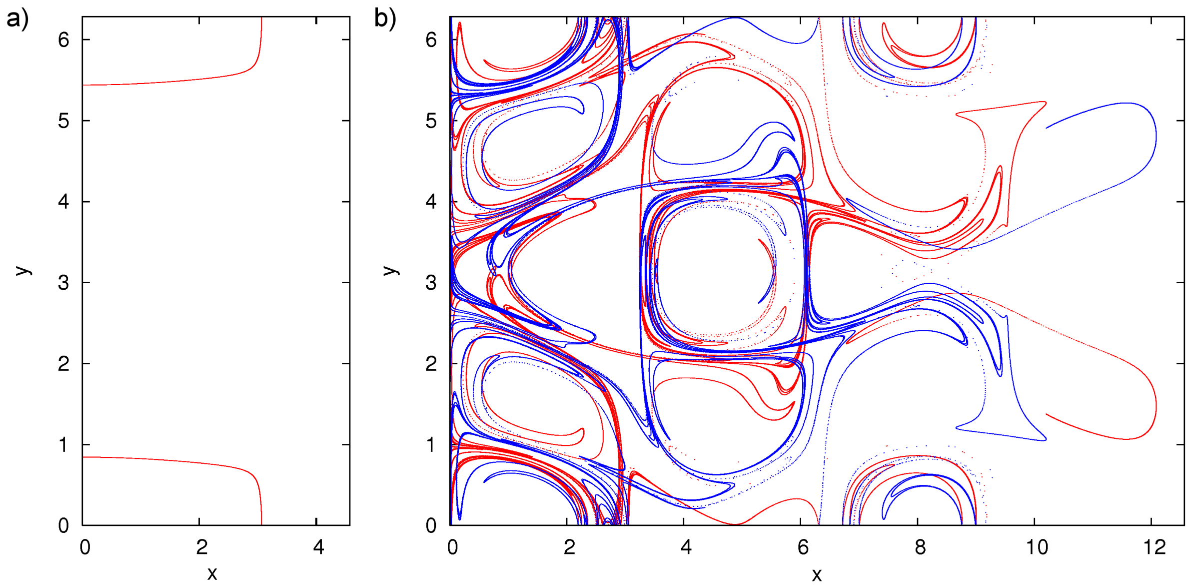

Figura 3.5: a) Condições iniciais posicionadas sobre a separatriz de tempo fixo igual a zero. b) Depois de um período de integração. A curva em vermelho representa a ELC instável que é obtida integrando-se o sistema para o futuro ($+\tau$) e a curva em azul representa a ELC estável que é obtida integrando-se o sistema para o passado ($-\tau$).

3.5 Conclusões

Nesse capítulo vimos como são definidos os expoentes de Lyanunov e como as ELCs são obtidas em função das cristas dos diagramas de expoente de Lyapunov de tempo finito. Foi apresentado também que para tempos de integração suficientemente grandes essas ELCs se comportam como barreiras e o fluxo através delas tente a zero.

Foi mostrado também que as ELCs atuam como barreiras e separam no plano de fase regiões com baixo deslocamento quadrático de regiões com alto deslocamento quadrático de partículas.

Capítulo 4

Ondas de deriva

4.1 Introdução

Nesse capítulo será apresentado um resumo sobre o modelo das ondas de deriva utilizado para o estudo do transporte radial de partículas do plasma confinado em tokamaks. Será mostrado que para apenas uma onda de deriva as trajetórias obtidas são regulares e confinadas em células e quando uma segunda onda com velocidade de fase diferente da primeira é considerada surgem trajetórias caóticas. Veremos também que existem dois casos importantes de combinações de ondas, o primeiro ocorre quando as duas ondas tem razão racional entre os números de onda e o segundo caso quando essa combinação é irracional.

4.2 Equação de movimento

As trajetórias das partículas de um plasma sujeito a um campo eletromagnético podem ser descritas de maneira simplificada, utilizando a força de Lorentz, a partir da equação

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{4.1}$$

onde m é a massa, q a carga, $\vec{v}$ a velocidade da partícula, $\vec{E}$ o campo elétrico e $\vec{B}$ o campo magnético.

As soluções dessa equação são da forma de hélices que circulam o *centro de guia.* A velocidade ($\vec{v_E}$) com que esse centro de guia se move é a velocidade de deriva elétrica que depende dos campos elétricos e magnéticos. Neste trabalho vamos considerar um campo magnético uniforme. Nessa condição, a velocidade de deriva elétrica, a ser considerada, é dada por:

$$\vec{v_E} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \tag{4.2}$$

É importante observar que na equação 4.2 não depende da carga da partícula, tanto elétrons quanto íons têm a mesma velocidade de deriva elétrica. Por isso, tal deriva é um dos principais fatores que limitam o confinamento do plasma.

4.3 Formalismo Hamiltoniano

Escrevendo o campo elétrico a partir do gradiente de um potencial

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{4.3}$$

e utilizando um campo magnético uniforme

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_z, \tag{4.4}$$

a equação 4.2 pode ser escrita como

$$\vec{v_E} = -\frac{1}{B_0}\vec{\nabla}\phi \times \hat{e}_z = \underbrace{-\frac{1}{B_0}\frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{e}_x}_{\vec{v_x}} + \underbrace{\frac{1}{B_0}\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{e}_y}_{\vec{v_y}}. \tag{4.5}$$

Assim, é possível identificar a hamiltoniana (H) como:

$$H = \frac{\phi}{B_0}. \tag{4.6}$$

Desse modo, teremos x como a coordenada e y como seu momento conjugado e as equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{4.7}$$

O modelo hamiltoniano de ondas de deriva usado será o proposto por Horton [36], em que as ondas se propagam na direção poloidal (y) com uma modulação na direção radial (x) que, para N ondas de deriva, é dado por

$$H(x,y,t) = H_0(x) + \sum_{i=1}^{N} A_i sin(k_{xi}x) sin(\varphi_i + k_{yi}y - \omega_i t), \tag{4.8}$$

onde $H_0(x) = -\frac{E_0}{B_0}x$ é a hamiltoniana de equilíbrio, dado em função dos campos elétricos e magnéticos de equilíbrio. Os termos k_{xi}, k_{yi} e ω são os números de onda na direção x e y e a frequência angular em y.

Nesse trabalho, serão utilizadas apenas duas ondas de deriva ($N = 2$). A primeira onda será a principal e a segunda uma perturbação, portanto de maneira geral $A_1 > A_2$. Com apenas duas ondas a hamiltoniana da equação 4.8 fica

$$H(x,y,t) = -\frac{E_0}{B_0}x + A_1 sin(k_{x1}x) sin(\varphi_1 + k_{y1}y - \omega_1 t) + A_2 sin(k_{x2}x) sin(\varphi_2 + k_{y2}y - \omega_2 t).$$

Mudando para um referencial com a velocidade da primeira onda ($u_1 = \frac{\omega_1}{k_{y1}}$) teremos

$$H(x,y,t) = Ux + A_1 sin(k_{x1}x) sin(\varphi_1 + k_{y1}y) + A_2 sin(k_{x2}x) sin(\varphi_2 + k_{y2}(y - ut)). \tag{4.9}$$

onde $U = -\frac{E_0}{B_0} + \frac{\omega_1}{k_{y1}}$, $u = \frac{\omega_1}{k_{y1}} - \frac{\omega_2}{k_{y2}}$ é a diferença da velocidade de fase das ondas e φ é a diferença entre suas fases.

Como estamos interessados em estudar o caso em que o transporte é máximo, a primeira onda será escolhida com velocidade igual a velocidade de deriva elétrica de equilíbrio ($u_1 = v_{E_0} = \frac{E_0}{B_0}$), ou seja, com $U = 0$. Nesse regime, de acordo com a referência [37], o transporte caótico obtido será máximo. Para outros casos em que o campo magnético não é uniforme [39] podemos encontrar barreiras de transporte devido que suprimem o transporte.

Portanto, para esse caso, as equações de movimento obtidas combinando as equação 4.9 e 4.10 teremos

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -A_1 k_{y1} sin(k_{x1}x) cos(\varphi_1 + k_{y1}y) - A_2 k_{y2} sin(k_{x2}(x - ut)) cos(\varphi_2 + k_{y2}y) \\ \dfrac{dy}{dt} = A_1 k_{x1} cos(k_{x1}x) sin(\varphi_1 + k_{y1}y) + A_2 k_{x2} cos(k_{x2}(x - ut)) sin(\varphi_2 + k_{y2}y) \end{cases} \tag{4.10}$$

O caso mais geral ocorre quando $u \neq 0$. Nesse caso, as duas ondas tem velocidades de fase distintas e o sistema de equação 4.10 não é integrável pois a hamiltoniana não é mais uma constante de movimento. Sendo assim, é necessário o uso de métodos numéricos de integração.

Por simplicidade, nesse trabalho iremos utilizar como unidade de comprimento o tamanho da ilha principal. Dessa forma $k_{x1} = k_{y1} = \pi$

4.4 Plano de fase

Utilizando apenas uma onda de deriva com $A_1 = 1$, $\varphi_1 = \pi/2$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$ e $A_2 = 0$, o mapa de Poincaré do plano de fases apresenta apenas trajetórias regulares de fluxo convectivo como mostrado na figura 4.1. Cada trajetória fica dentro de uma célula e não existem trajetórias entre células. A separação entre as células recebe o nome de separatriz. É importante perceber que nenhuma trajetória tem acesso a todo o espaço de fases, pois nenhuma cruza as separatrizes, nesse caso não há transporte e as partículas ficam confinadas em suas células de origem.

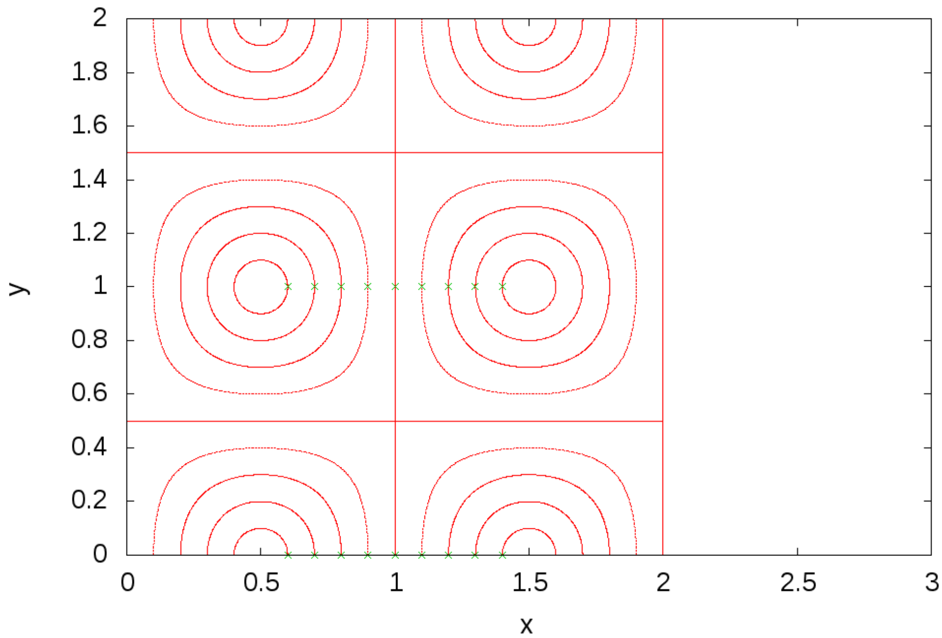

Figura 4.1: Mapa de Poincaré do plano de fase com orbitas regulares para sistema integrável, utilizando $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$. As trajetórias ficam dentro de células e as separatrizes são as variedades instáveis e estáveis dos pontos fixos hiperbólicos.

Quando uma segunda onda com amplitude pequena é introduzida com $A_2 = 0.01$, $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$, podemos ver na figura 4.2 que as trajetórias mais externas da célula tornam-se caóticas e as mais internas continuam regulares. O conjunto de trajetórias regulares será chamado de ilhas e estão imersas num conjunto de orbitas caóticas que será chamado de mar caótico. Nesse caso, as separatrizes entre as células dão lugar às trajetórias caóticas que passam a conectar diferentes células.

Pode-se ver na figura 4.2 que para o caso racional a segunda onda se propagando na direção y quebrou apenas a barreira de transporte horizontal, mas a barreira vertical ainda existe. Por outro lado vemos figura 4.3, para o caso irracional, que tanto a barreira

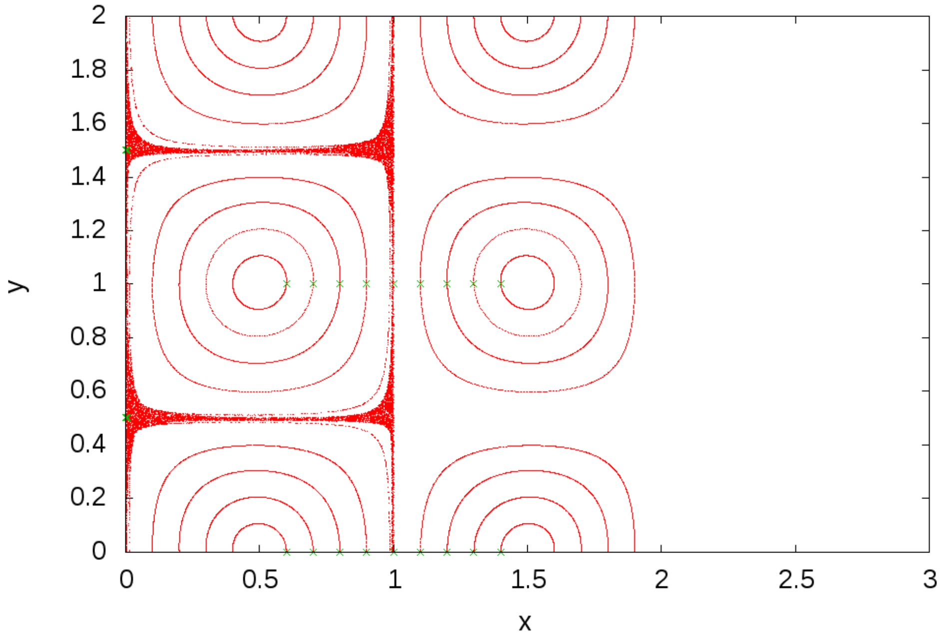

Figura 4.2: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.01$ e $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos que as separatrizes horizontais entre as células é quebrada e surge transporte entre células apenas na direção y.

vertical quanto a horizontal são quebradas, dessa maneira teremos tanto transporte na direção x quanto na direção y. Portanto, para se quebrar a barreira de transporte vertical é necessário inserir uma onda cuja razão k_{x2}/k_{x1} seja um número irracional.

Aumentando a amplitude da segunda onda $A2 = 0.1$ para o caso racional e irracional são mostradas as figuras 4.6 e 4.7 respectivamente. Vemos nessas figuras que a área caótica aumentou, mas ainda existem ilhas bem definidas. Entretanto, para o caso racional a barreira vertical ainda existe.

As figuras 4.8 e 4.9 mostram os planos de fase para amplitude da segunda onda $A2 = 0.3$ para o caso racional e irracional respectivamente. Vemos nessas figuras que mesmo quando as ilhas são completamente destruídas, o plano de fase com a razão k_{x2}/k_{x1} racional (figura 4.8) ainda apresenta barreiras verticais de transporte.

Assim, é possível perceber que o transporte desse sistema ocorre quando a segunda onda quebra a separatriz entre as células do sistema integrável. Esse fenômeno é conhecido como *quebra de separatrizes*. A quebra das separatrizes dá origem ao mar caótico que é guiado por estruturas coerentes, ELCs, que serão o principal objeto de estudo nessa tese.

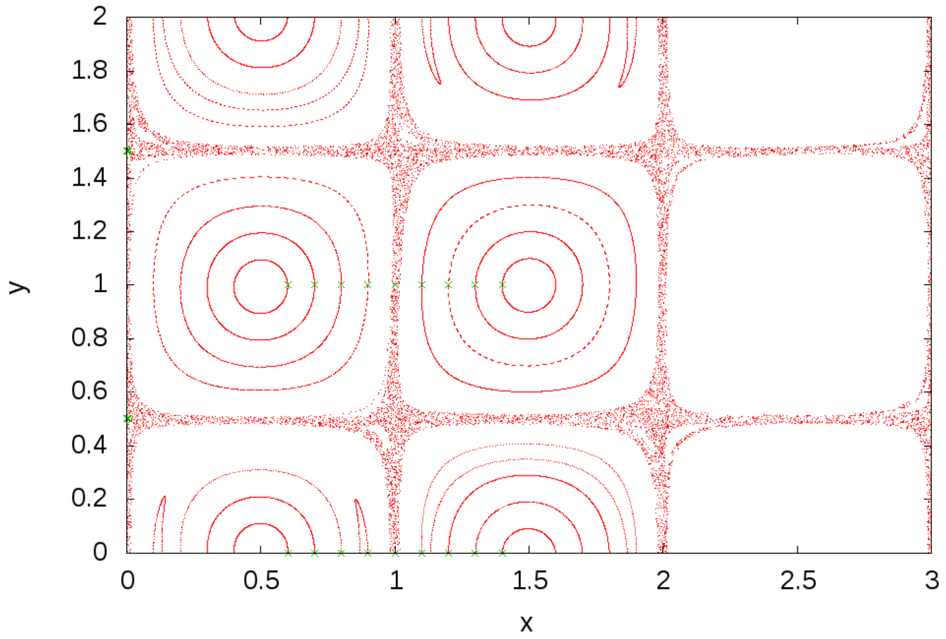

Figura 4.3: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.01$, $k_{x2} = \sqrt{2}\pi$ e $k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos que as separatrizes verticais e horizontais entre as células é quebrada e surge transporte entre células tanto na direção x quanto na direção y.

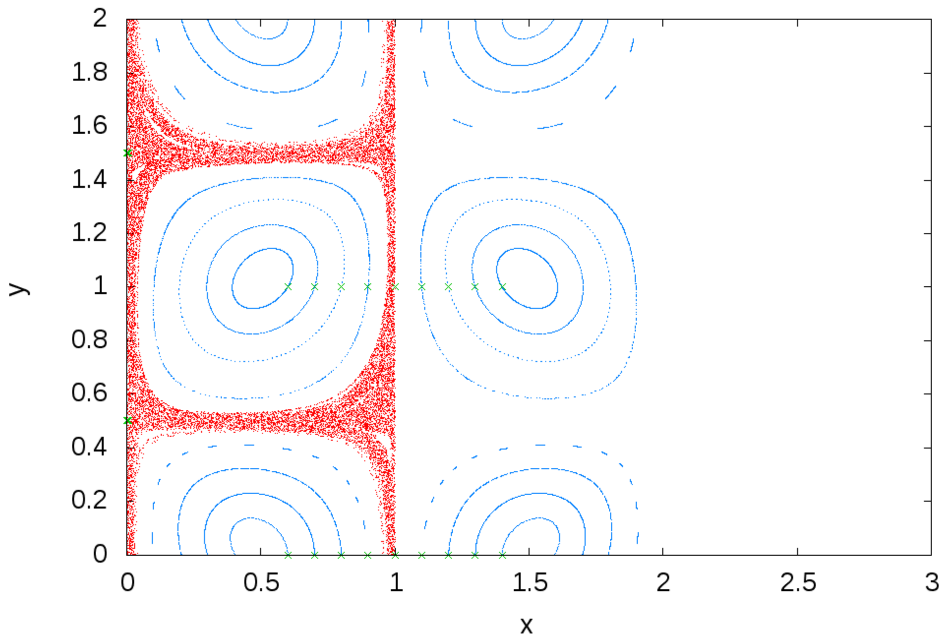

Figura 4.4: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.05$ e $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos faixas de caos local e que, mesmo sem ilhas, ainda existem barreiras verticais separando essas faixas de caos local.

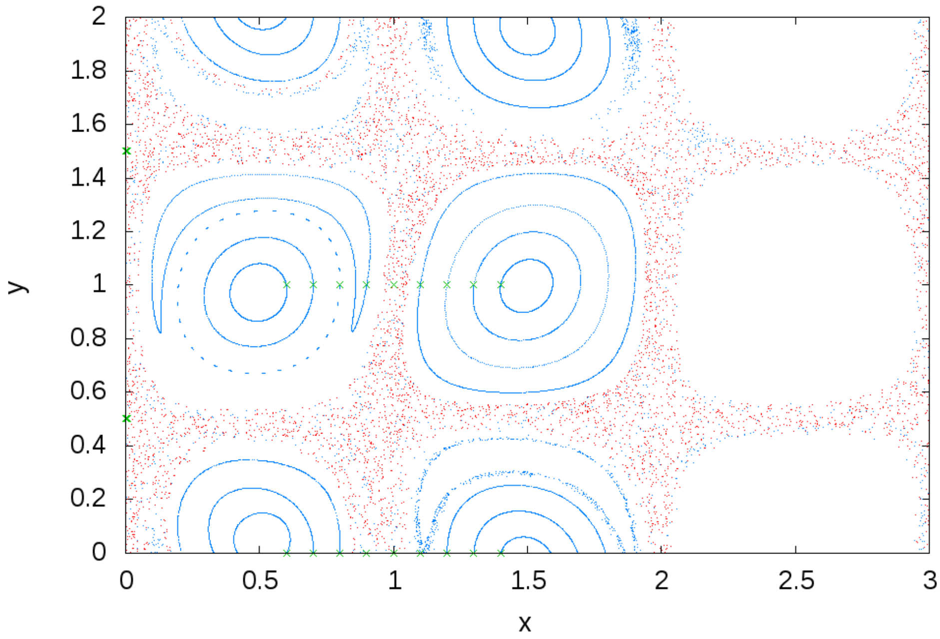

Figura 4.5: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.05$, $k_{x2} = \sqrt{2}\pi$ e $k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos um caos global. Não existem mais ilhas e nem barreiras e o transporte se dá tanto na direção x como na direção y.

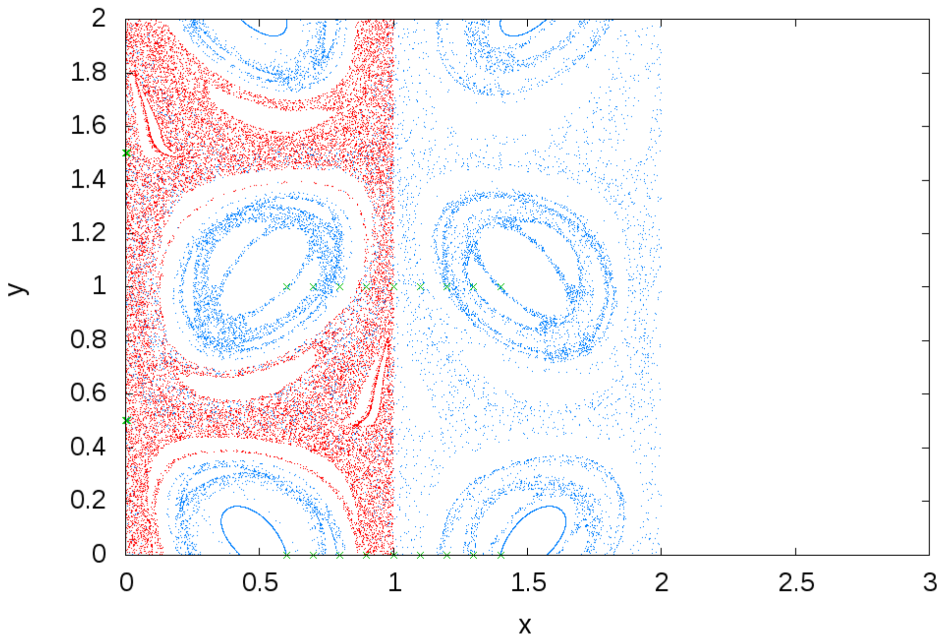

Figura 4.6: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.10$ e $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos faixas de caos local e que, mesmo sem ilhas, ainda existem barreiras verticais separando essas faixas de caos local.

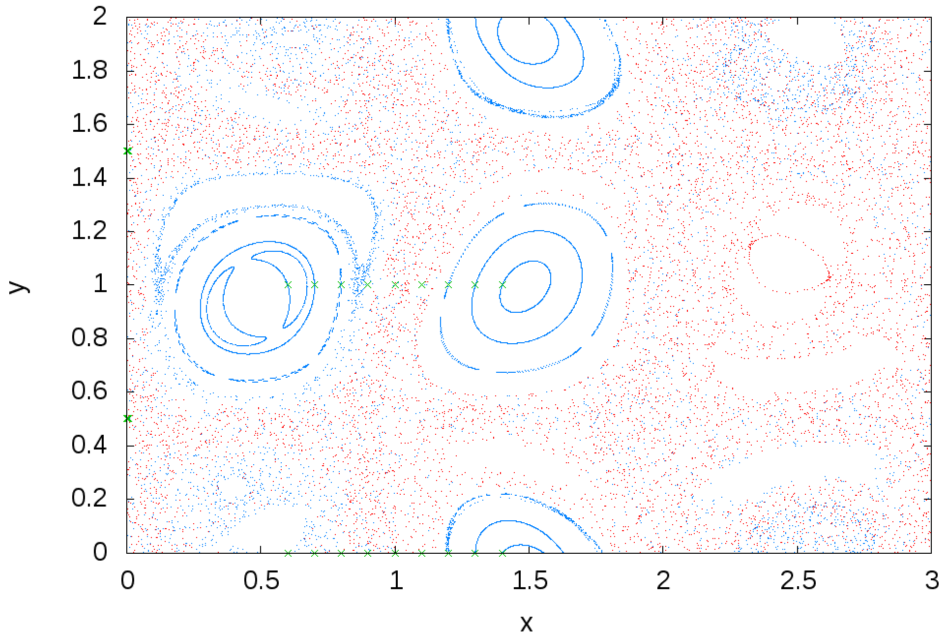

Figura 4.7: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.10$, $k_{x2} = \sqrt{2}\pi$ e $k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos um caos global. Não existem mais ilhas e nem barreiras e o transporte se dá tanto na direção x como na direção y.

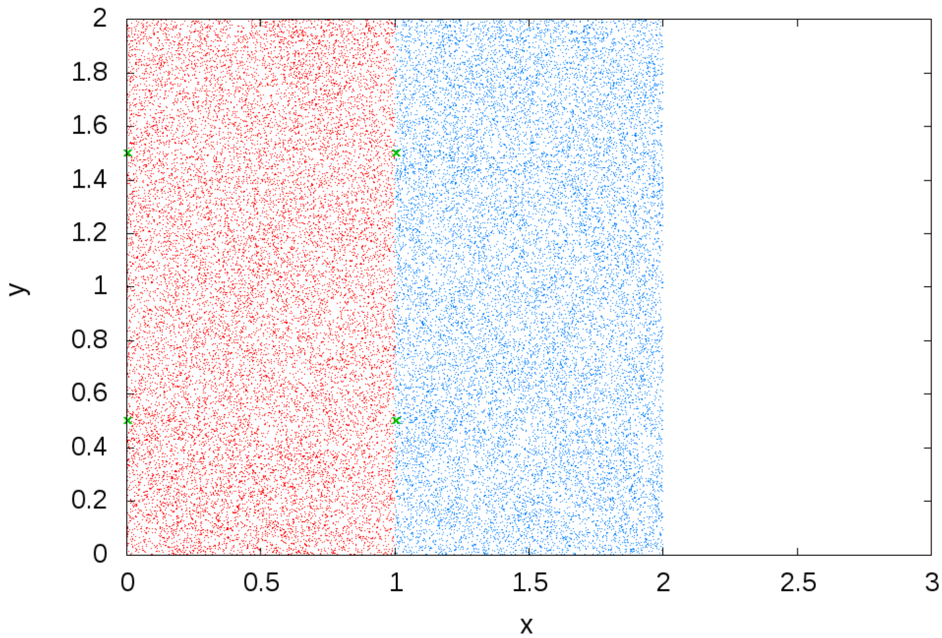

Figura 4.8: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.30$ e $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos faixas de caos local e que, mesmo sem ilhas, ainda existem barreiras verticais separando essas faixas de caos local.

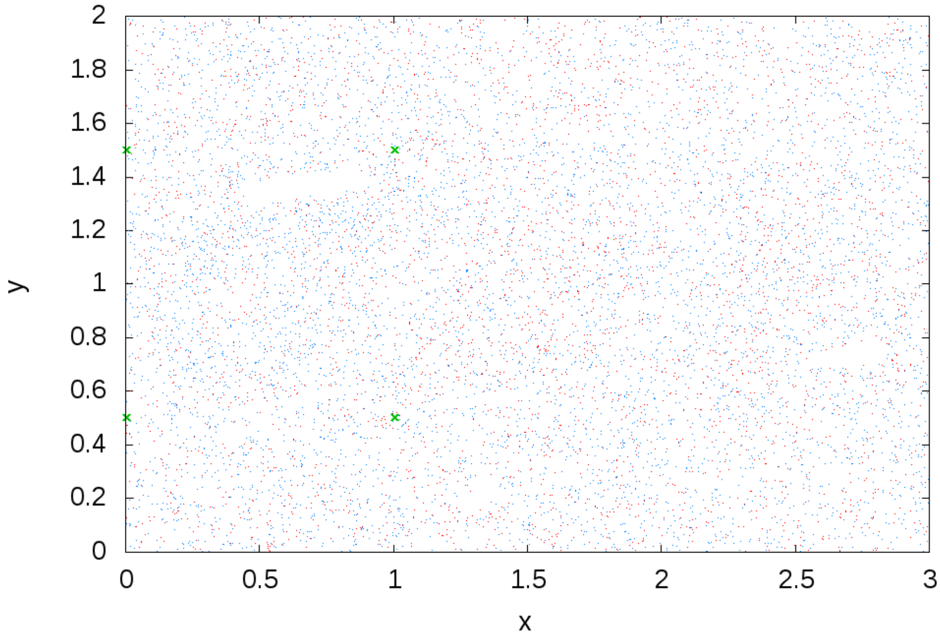

Figura 4.9: Mapa de Poincaré do plano de fase com ilhas imersas no mar caótico utilizando $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$, $A_2 = 0.30$, $k_{x2} = \sqrt{2}\pi$ e $k_{y2} = 2\pi$. Nessa figura vemos um caos global. Não existem mais ilhas e nem barreiras e o transporte se dá tanto na direção x como na direção y.

4.5 Caracterização do transporte

4.5.1 Distribuição dos saltos

Em um passeio aleatório, é esperado que a distribuição dos saltos de uma partícula seja semelhante a uma gaussiana. Sabendo disso, a primeira questão que estamos interessados em responder é se os saltos observados nas trajetórias caóticas geradas pela quebra das separatrizes segue uma distribuição gaussiana semelhante ao passeio aleatório.

Para caracterizar o transporte continuaremos utilizando uma onda principal com $A_1 = 1$, $k_{x1} = k_{y1} = \pi$ e uma segunda secundária em dois diferentes casos: O primeiro caso, quando as duas ondas tem razão racional entre números de onda na direção x, serão utilizados $k_{x2} = k_{y2} = 2\pi$ e A_2 será variável; O segundo caso, quando as duas ondas tem razão irracional entre números de onda na direção x, serão utilizados $k_{x2} = \sqrt{2}\pi$, $k_{y2} = 2\pi$ e A_2 será variável.

Quando a segunda onda tem amplitude pequena, $A_2 = 0.01$, o transporte entre células se dá apenas nas proximidades das antigas separatrizes. Dessa forma, é esperado que os pulos que tem o tamanho da célula aparaçam tanto na direção x quanto na direção y. Nas figuras 4.10 e 4.12 é possível ver que esse fenômeno ocorre para a direção x e nas figuras 4.11 e 4.13 é possível ver que esse fenômeno também ocorre para a direção y.

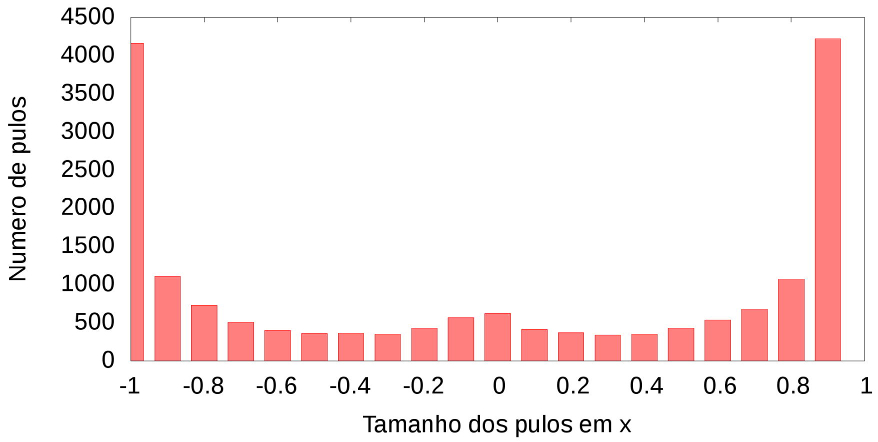

Figura 4.10: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.01$.

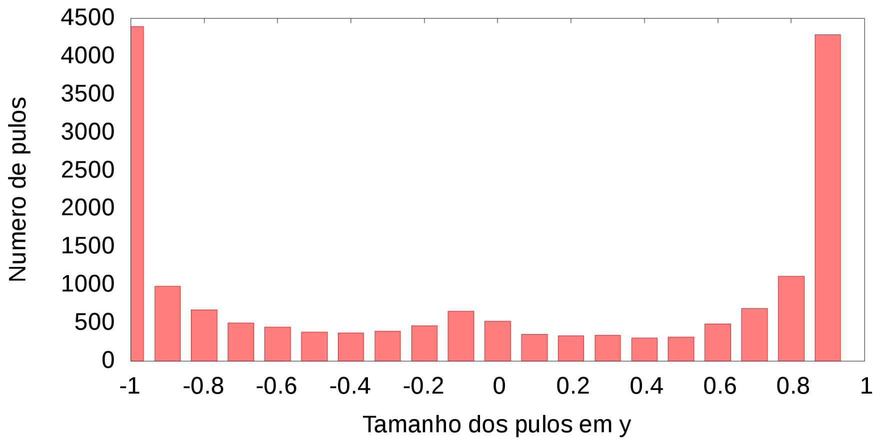

Figura 4.11: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.01$.

Para a amplitude de $A_2 = 0.01$, os pulos na direção x e na direção y tem qualitativamente a mesma distribuição tanto para o caso racional (4.10 e 4.11) quanto para o caso irracional (4.12 e 4.13). Os saltos se concentram nas extremidades das células ($+1$ e -1) e saltos de tamanho pequeno são raros. Entretanto, o caso racional para essa amplitude de $A_2 = 0.01$ apresenta uma probabilidade de saltos pequenos ligeiramente maior do que o caso irracional, aumentando um pouco a amplitude A_2 veremos que esse cenário irá inverter-se e o caso irracional terá probabilidade maior de saltos pequenos.

Uma possível explicação para esse fato de que quando a razão k_{x2}/k_{x1} é racional, a concentração de pulos em torno do zero é ligeiramente maior do que no caso irracional pode ser obtida observando que para o caso racional, na figura 4.2, a largura da região caótica é um pouco menor que para o caso irracional da figura 4.3. Sendo assim, como

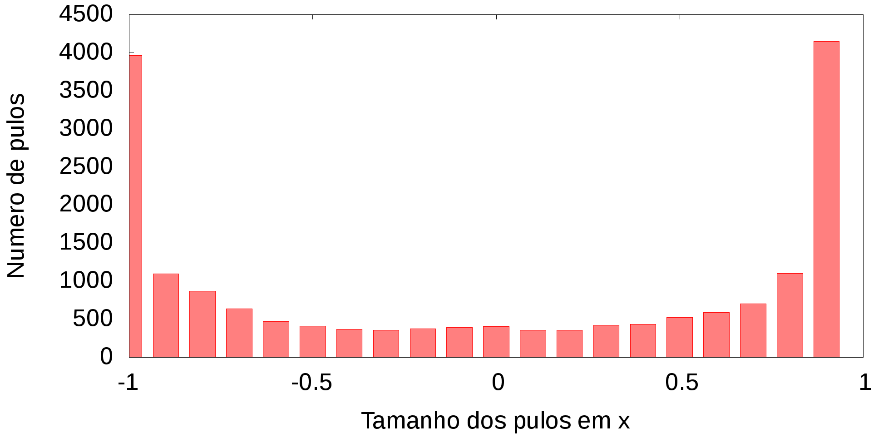

Figura 4.12: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.01$.

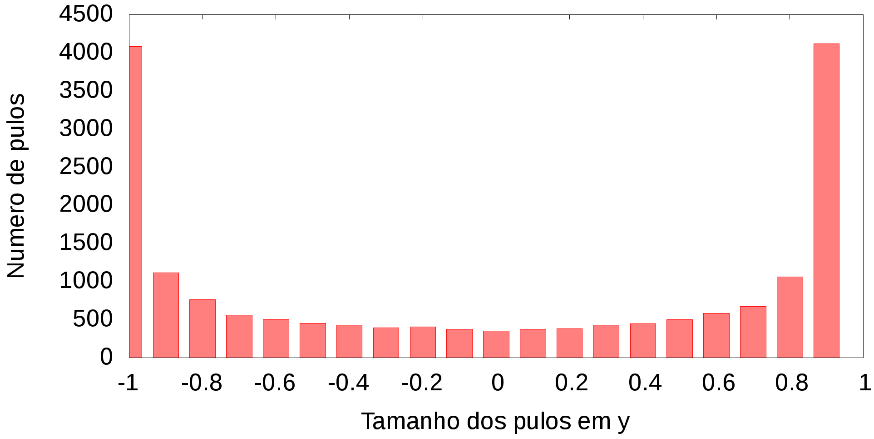

Figura 4.13: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.01$.

no caso racional a trajetória caótica tem um espaço de largura menor do que no caso irracional para se deslocar quando viaja de um ponto hiperbólico ao outro, o deslocamento transversal observado também será menor.

Conforme a amplitude da segunda onda é aumentada para $A_2 = 0.05$, as trajetórias caóticas começam a visitar mais regiões no espaço de fase e a distribuição de saltos fica mais complexa. Nas figuras 4.14 e 4.15 ainda existe uma grande concentração de saltos nas extremidades, mas já é possível ver que os saltos na direção y já começam a mostrar uma assimetria. O limite superior continua sendo 1, mas o limite inferior para o tamanho desses saltos é ligeiramente menor do que -1.

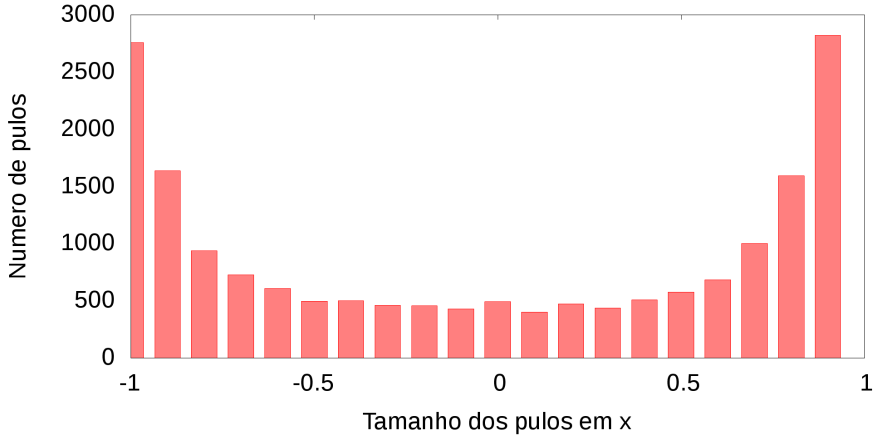

Figura 4.14: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.05$.

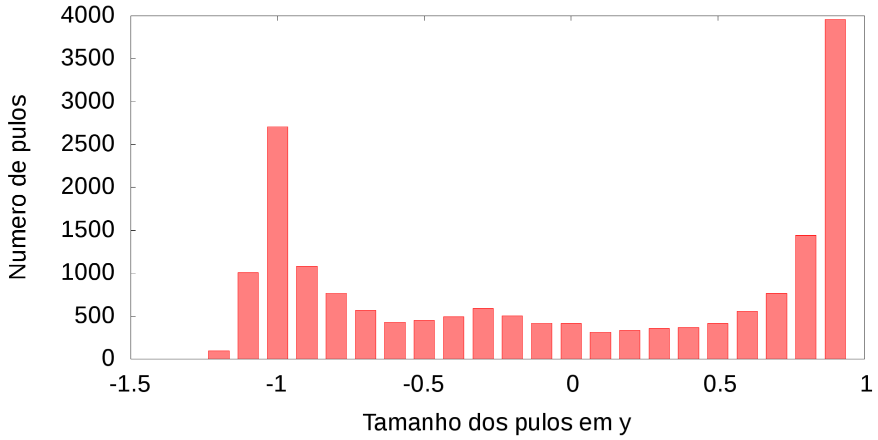

Figura 4.15: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.05$.

Já para o caso irracional com a amplitude $A_2 = 0.05$, nas figuras 4.16 e 4.17 é possível notar que existe agora uma grande concentração de saltos pequenos, mas que a distribuição continua simétrica tanto na direção de propagação da onda (y) quanto na direção perpendicular a propagação (x).

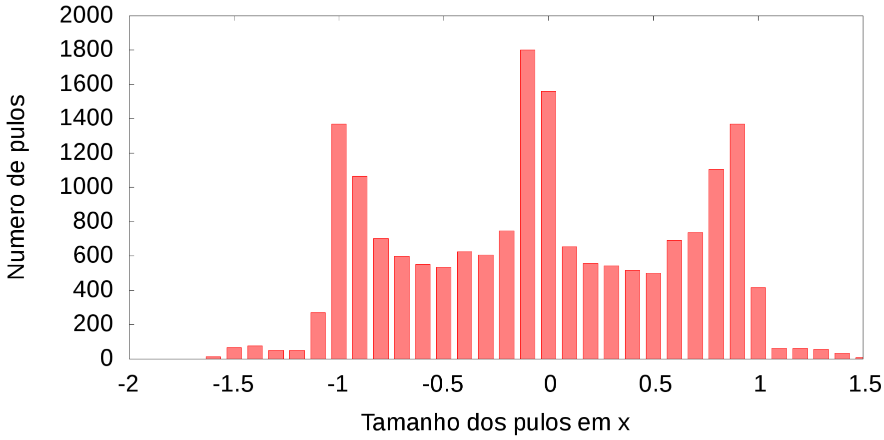

Figura 4.16: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.05$.

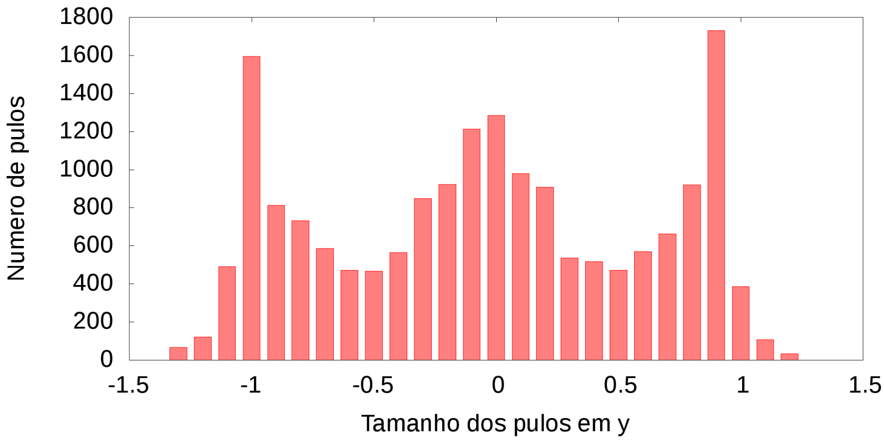

Figura 4.17: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.05$.

Aumentando a amplitude da segunda onda para $A_2 = 0.10$ temos as figuras de 4.18 até 4.21. Nessas figuras, exceto a 4.19, vemos que a distribuição continua simétrica e o pico que aparece em torno de zero ultrapassa os picos $(+1)$ e (-1) em todas as figuras. Essa assimetria da figura 4.19 se dá devido à aparição da corrente de jato. Adiante veremos as mudanças no transporte devido a essa corrente de jato e no capítulo 5 veremos um possível mecanismo responsável pela aparição dessas correntes no plano de fase.

Analisando as figuras 4.18 e 4.19, podemos dizer que a presença de um jato na direção y não modifica a simetria do transporte na direção x em comparação com o caso irracional, mas diminui a probabilidade de encontrarmos pulos pequenos. Podemos ver na figura 4.18

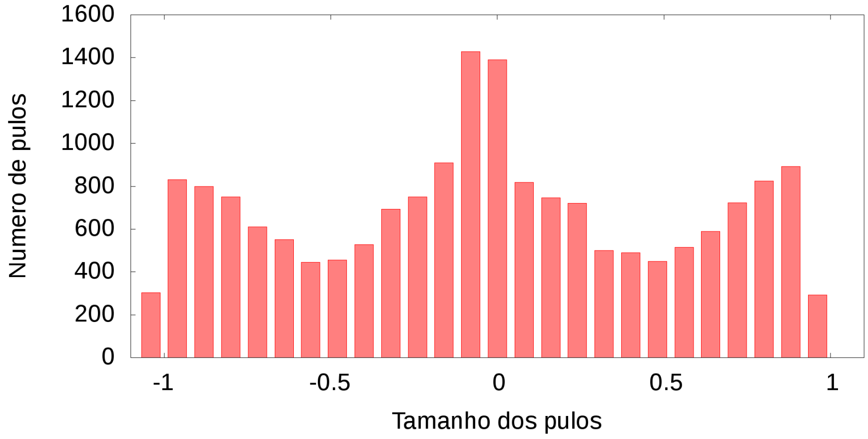

Figura 4.18: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.10$.

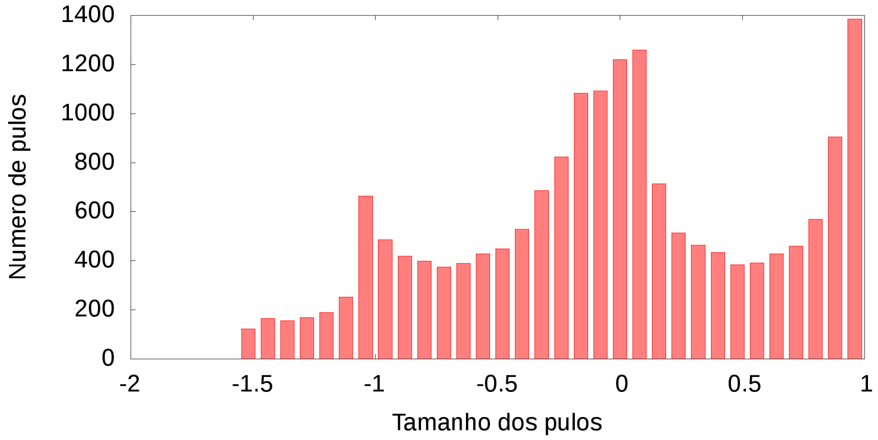

Figura 4.19: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.10$.

e 4.20 que a razão entre a altura dos picos em torno de $+1$ ou -1 em torno de zero é muito menor para o caso racional do que para o caso irracional, o que significa que para o caso irracional os saltos pequenos ocorrem com mais frequência do que os saltos grandes.

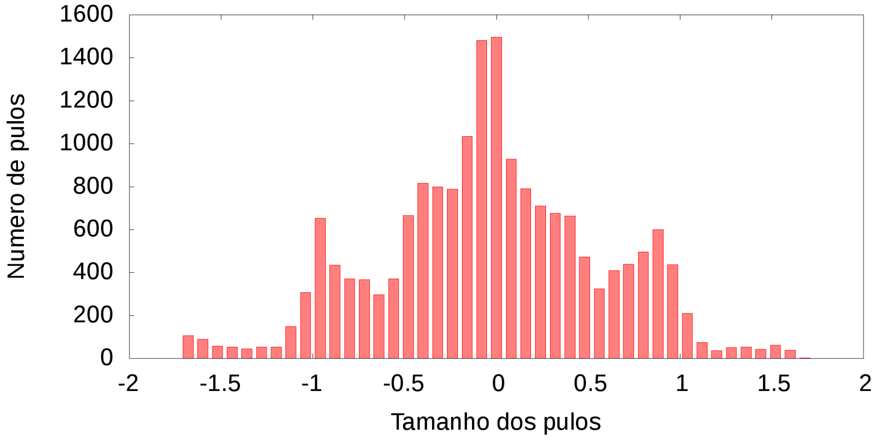

Figura 4.20: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.10$.

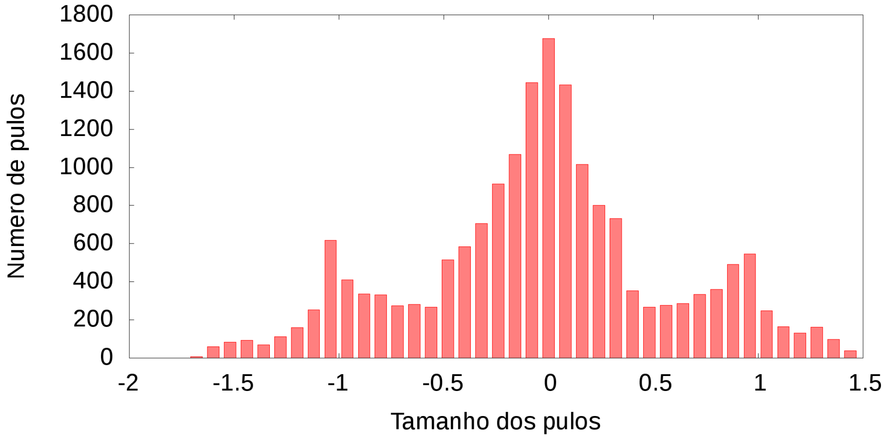

Figura 4.21: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.10$.

Com a amplitude da segunda onda aumentada para $A_2 = 0.30$ o caos domina praticamente todo o plano de fase e a distribuição dos saltos estão mostradas nas figuras de 4.22 até 4.25. Para essa amplitude, vemos que na direção x tanto o caso racional (4.22) quanto o caso irracional (4.24) tem distribuições que se aproximam de distribuições gaussianas, entretanto com uma cauda ligeiramente mais larga para o caso irracional e um pico ligeiramente mais agudo para o caso racional.

Já na direção y pode-se observar que o caso irracional, figura 4.25, possui uma distribuição assimétrica com um platô entre -2 e -0.5, uma grande concentração de pulos

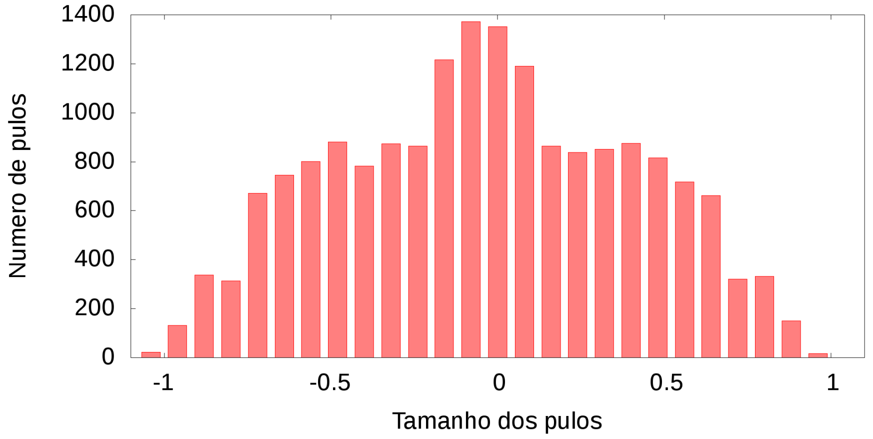

Figura 4.22: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.30$.

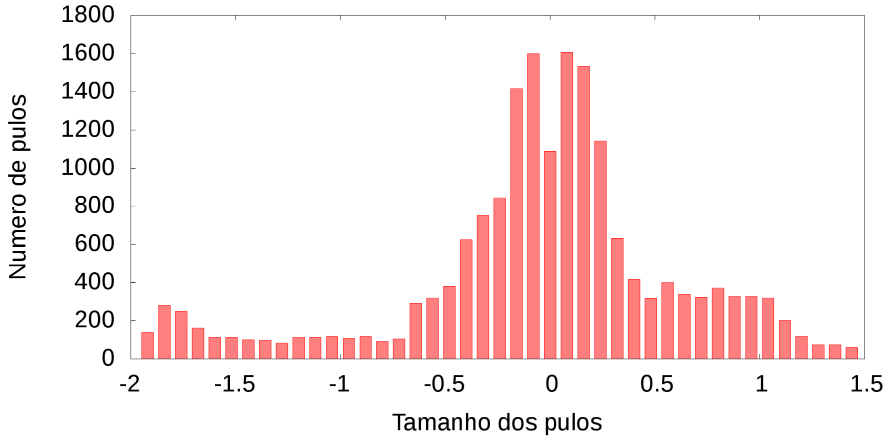

Figura 4.23: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.30$.

entre -0.5 e 0.5 e um pequeno pico próximo de 1.5. Enquanto isso, o caso racional figura (4.23) tem um platô entre 0.5 e 1.2, um pico próximo de -1.8 e também uma grande concentração de pulos pequenos, entre -0.5 e 0.5, mas é interessante perceber que a contagem de pulos muito pequenos (entre -0.1 e 0.1) apresenta uma diminuição em relação ao caso irracional.

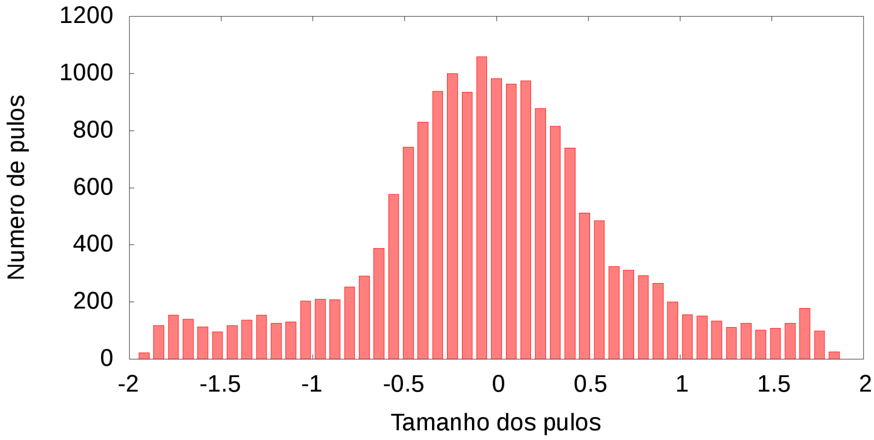

Figura 4.24: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.30$.

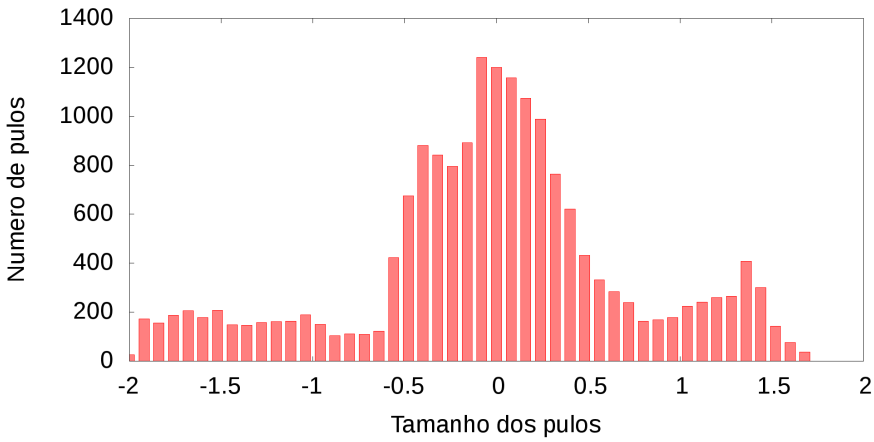

Figura 4.25: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.30$.

Até a amplitude $A_2 = 0.30$ podemos ver que, grosso modo, os picos se deslocam de $+1$ ou -1 para zero na direção x e na direção y as distribuições para o caso racional se tornam assimétricas conforme aumentamos a amplitude A_2 e para o caso irracional elas começam a ser assimétricas apenas para $A_2 = 0.30$.

Aumentando ainda mais a amplitude da segunda onda a distribuição dos pulos na direção x continua simétrica e centrada em zero e a distribuição dos pulos na direção y

começa a exibir mais picos para o caso racional, por outro lado, para o caso irracional começam a surgir dois grandes picos em torno de -1.8 e 0.2. Para $A_2 = 0.70$ temos as figuras de 4.26 até 4.29 que mostram isso.

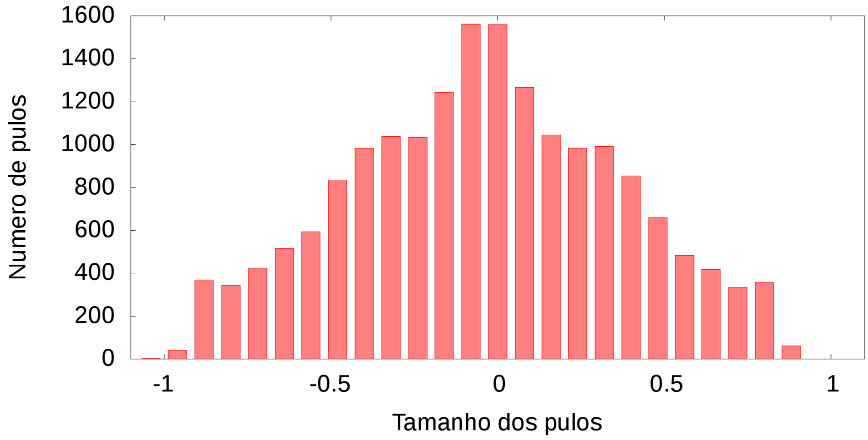

Figura 4.26: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.70$.

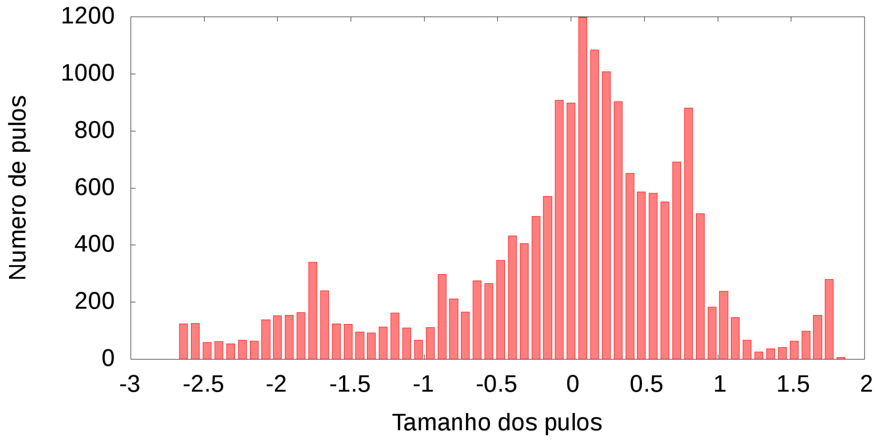

Figura 4.27: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = 2$ e $A_2 = 0.70$.

É interessante notar que a distribuição dos pulos em y para o caso irracional começa com dois picos em $+1$ e -1 e conforme a amplitude da segunda onda, A_2, aumenta esses picos se juntam em torno de zero e mais tarde se separam novamente, terminando com picos em torno de -1.8 e 0.2 para $A_2 = 0.70$. É possível notar também que, diferente do caso racional, o caso irracional apresenta uma distribuição de saltos que se assemelha a combinação de duas gaussianas em torno dos dois picos -1.8 e 0.2.

Para verificar o efeito de aumentar a amplitude da segunda onda no transporte geral, serão mostrados nas próximas seções a Dispersão média ($\sigma^2(t)$) e a dispersão relativa ($R(t)$) em função do tempo.

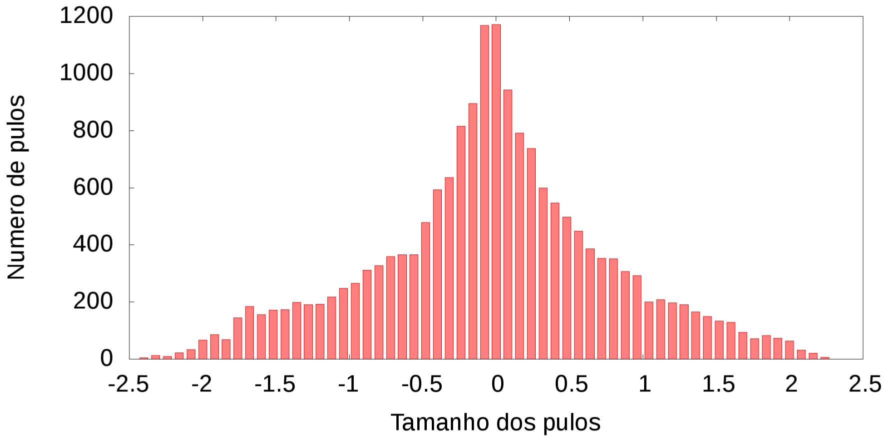

Figura 4.28: Histograma dos pulos na direção x utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.70$.

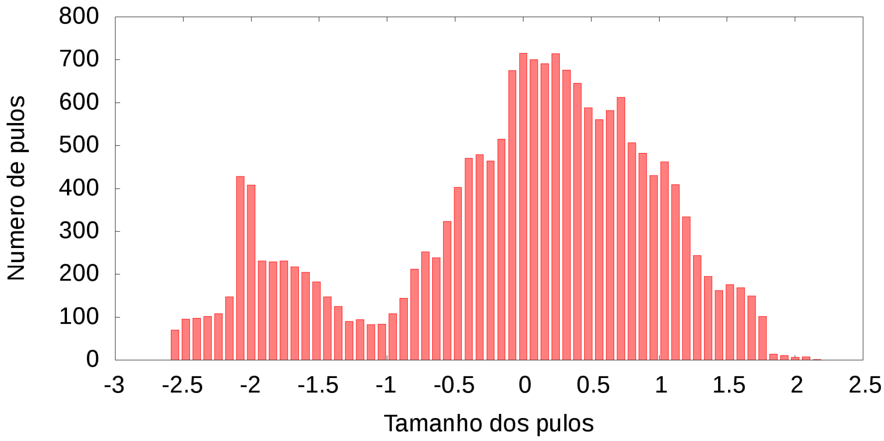

Figura 4.29: Histograma dos pulos na direção y utilizando-se a razão $k_{x2}/k_{x1} = \sqrt{2}$ e $A_2 = 0.70$.

4.5.2 Dispersão Média

Uma das maneiras para se quantificar o transporte foi calcularmos a *Dispersão média* (σ^2) [5]. Essa dispersão média é definida para um conjunto de condições iniciais como

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} \underbrace{(x_i(t) - x_i(0))^2}_{\Delta x(t)^2}. \tag{4.11}$$

onde N é o número de condições iniciais, $x_i(t)$ é a posição no tempo t, $x_i(0)$ é a posição inicial e $(\Delta x(t)^2)$ é o *deslocamento quadrático* de cada uma das trajetórias no instante de tempo t.

De maneira geral, a equação 4.11 pode ser escrita como

$$\sigma^2(t) = Dt^{\alpha}. \tag{4.12}$$

Como mostrado anteriormente, no capítulo 2, quando $\alpha = 1$ temos o transporte difusivo ou normal, quando $\alpha < 1$ o transporte é subdifusivo e quando $\alpha > 1$ o transporte é superdifusivo.

No caso particular em que o transporte é difusivo, $\sigma(t)^2 \propto t$, então podemos definir o coeficiente difusão (D) como

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2(t)}{t}. \tag{4.13}$$

Para verificar se o transporte é difusivo, foram feitas algumas simulações numéricas para um conjunto de dez mil trajetórias com condições iniciais situadas dentro de um retângulo de 0.001 por 0.001 na origem. Tais simulações estão mostradas nas figuras 4.30 e 4.31 para quatro valores de A_2.

No caso racional, onde existem barreiras na direção y, o transporte apresenta comportamento próximo do difusivo ($\alpha = CA = 0.976$) para todos os casos exceto quando existem correntes de jatos ($A_2 \approx 0.10$). Na figura 4.30 podemos ver que o transporte é subdifusivo ($\alpha < 1$) para $A_2 = 0.05$ e $A_2 = 0.20$, difusivo ($\alpha \approx 1$) para $A_2 = 0.30$ e superdifusivo ($\alpha > 1$) para $A_2 = 0.10$.

O valor menor que um do coeficiente angular mostrado na figura 4.30 indica um transporte subdifusivo que surge devido a algum mecanismo de aprisionamento de trajetórias. Esse mecanismo de aprisionamento pode ser o grudamento em ilhas remanescentes e pode ser observado como picos mais acentuados nas distribuições de saltos.

Já para o caso irracional onde não existem correntes de jato, pode-se notar que o transporte é também fracamente subdifusivo para todos os valores de A_2. Na figura 4.31 todas as curvas tem aproximadamente a inclinação $CA \approx 0.926$ para $t > 100$ e essa

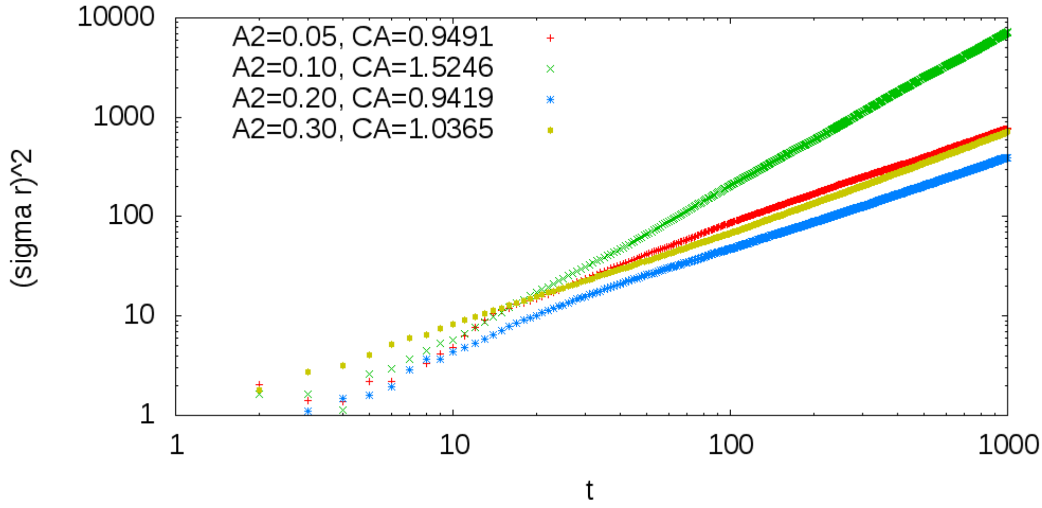

Figura 4.30: Série temporal da Dispersão Média ($\sigma(t)^2$) variando-se A_2 para o caso racional. Note que quando existe uma corrente de jato ($A_2 = 0.10$) no plano de fase o transporte não é difusivo pois o coeficiente angular é diferente de 1.

inclinação não muda significativamente com a variação de A_2. Sendo assim o valor de $\alpha = CA$ é praticamente constante e menor que 1. Assim como no caso racional, esse valor menor que um de α também é esperado para o caso irracional, já que, por apresentar picos mais acentuados nas distribuições de saltos (figuras 4.28 e 4.29, por exemplo), a presença do mesmo mecanismo de grudamento em ilhas remanescentes do caso racional pode aparecer no plano de fases.

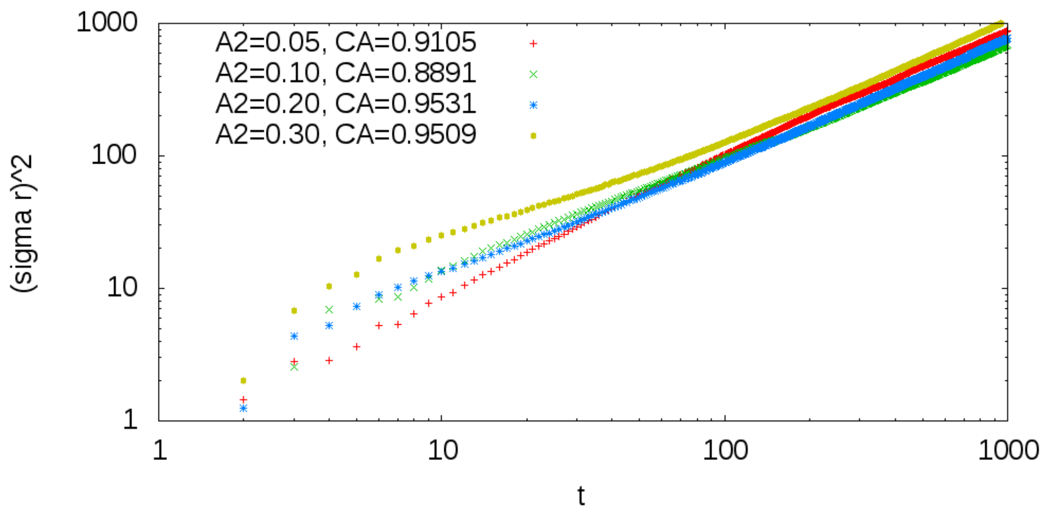

Figura 4.31: Série temporal da Dispersão Média ($\sigma(t)^2$) variando-se A_2 para o caso irracional. Note que todas as curvas possuem praticamente a mesma inclinação para $t > 100$. A incerteza dessa inclinação é dada pelo desvio padrão dos cinco ajustes.

Dessa forma, podemos ver que o surgimento de correntes de jato pode ser um mecanismo importante para entender o transporte anômalo que surge nesse modelo de duas ondas de deriva.

4.5.3 Dispersão Relativa

Uma outra grandeza utilizada para quantificar o transporte caótico é a *Dispersão Relativa* ($R(t)$) [11], calculada como:

$$R^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \left(x_i^a(t) - x_i^b(t) \right)^2 . \tag{4.14}$$

Onde x_i^a e x_i^b são duas trajetórias com condições iniciais distantes entre si em 10^{-3} e N é o número de condições iniciais.

Supondo que $R(t)$ siga uma lei de potência, podemos escrever que

$$R^2(t) = Bt^{\beta}. \tag{4.15}$$

Dessa maneira, semelhante ao feito para a dispersão média ($\sigma(t)$), o coeficiente angular (CA) do ajuste linear de $R(t)^2$ em função de t em escala logarítmica será identificado como β.

Os resultados das simulações para quatro valores de A_2 estão apresentados nas figura 4.32 e 4.32.

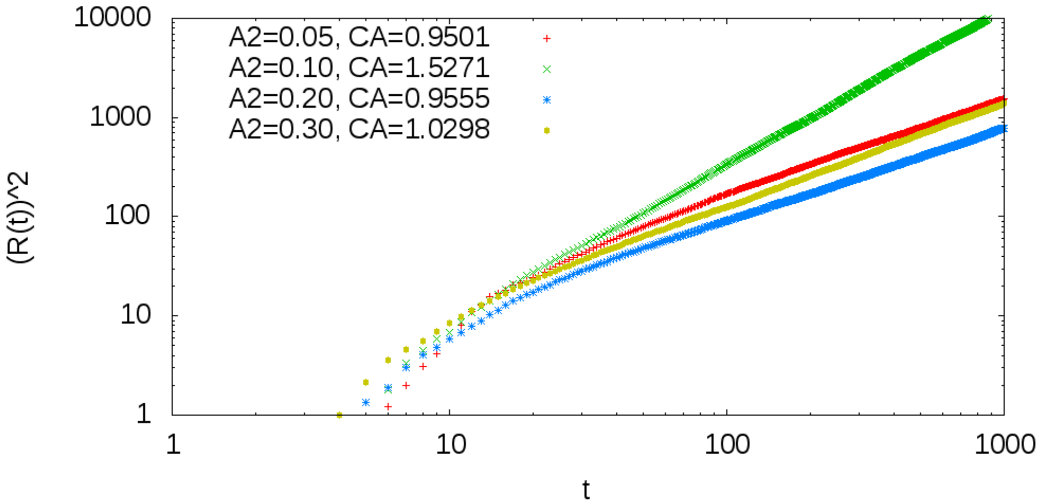

Figura 4.32: Série temporal da Dispersão Relativa ($R(t)^2$) para o caso racional variando-se A_2. Note que todas as curvas possuem praticamente a mesma inclinação para $t > 10$.

Para o caso racional (figura 4.32) o coeficiente angular (CA) do ajuste para $t > 10$

quando não existem jatos tem o valor médio em torno de 0.979. Esse valor próximo de 1 indica que as trajetórias perderam correlação. Podemos notar o comportamento distinto quando existe o jato em $A_2 = 0.10$, onde observa-se um coeficiente angular cerca de 50% maior do que os quando não exitem jatos.

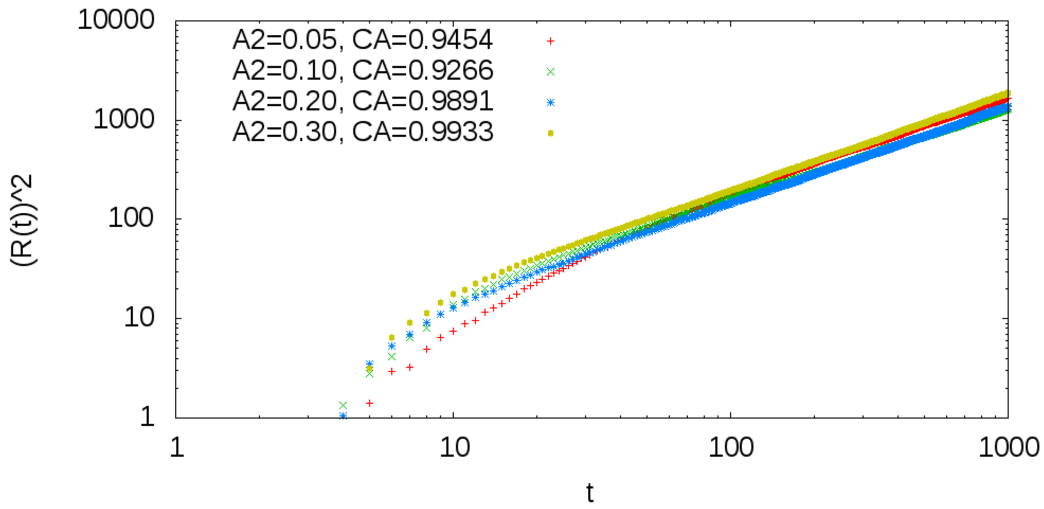

Figura 4.33: Série temporal da Dispersão Relativa ($R(t)^2$) para o caso irracional variando-se A_2. Note que todas as curvas possuem praticamente a mesma inclinação para $t > 10$.

Já para o caso irracional (figura 4.33) o coeficiente angular do ajuste (CA) não depende significativamente da amplitude da segunda onda (A_2) e tem um valor médio em torno de 0.964. Sendo assim, vemos que as trajetórias do caso irracional perdem correlação para $t > 10$ independentemente da amplitude da segunda onda.

4.6 Conclusões

Nesse capítulo foi possível verificar que para que exista transporte de partículas devem existir trajetórias caóticas no plano de fase. Quando apenas uma onda é considerada, as trajetórias são regulares, todas as partículas ficam confinadas em suas células iniciais e o transporte é nulo. Sendo assim, para que haja transporte de partículas entre células é necessário considerar pelo menos duas ondas de deriva com velocidades de fase diferente.

Outro ponto importante abordado nesse capítulo foi como combinar essas duas ondas. Quando as ondas tem a razão racional entre os números de onda, o plano de fase se torna espacialmente periódico e surgem barreiras que confinam as partículas, dessa maneira pode-se observar apenas caos local. Quando essa razão é irracional, tais barreiras não existem e o caos se torna global, espalhando-se por todo o plano de fase.

Analisando a distribuição dos saltos para os dois casos, pudemos verificar que para baixas amplitudes da segunda onda os saltos são de -1 ou $+1$ tanto no caso racional quanto no caso irracional. Isso ocorre pois, para baixas amplitudes da segunda onda a região caótica se restringe às proximidades das separatrizes do sistema com apenas uma onda, assim as partículas pulam de uma célula para outra seguindo trajetórias caóticas que se assemelham às linhas verticais e horizontais que definem as separatrizes do sistema com apenas uma onda.

Conforme a amplitude da segunda onda é aumentada, foi verificado que para os dois casos a distribuição dos saltos que apresentava picos nas extremidades começa a se concentrar em torno de zero para $A_2 = 0.3$ tanto na direção x quanto na direção y. Entretanto, observamos que o caso racional apresenta uma assimetria nessa distribuição mesmo para valores de $A_2 < 0.3$, enquanto o caso irracional apresenta assimetria somente para valores de $A_2 > 0.3$.

Tal assimetria no caso racional surge devido à presença de correntes de jato que caminham na mesma direção de propagação da segunda onda. Essas correntes surgem apenas quando a amplitude da segunda onda vale $A_2 \approx 0.1$, mas seus efeitos remanescentes podem ser observados para valores de $A_2 \neq 0.1$. Essas correntes de jato serão examinadas com mais detalhes no capítulo 5.

Quando a dispersão média em função do tempo é analisada, podemos ver que no caso irracional o transporte se comporta de maneira muito próxima ao transporte difusivo, sendo fracamente subdifusivo com $\alpha \approx 0.926$ e essa inclinação não muda significativamente com a variação de A_2. Essa pequena diferença em relação ao transporte difusivo se dá devido ao aprisionamento de partículas em ilhas remanescentes. Esse mesmo mecanismo também é observado no caso racional, onde observamos novamente um transporte fracamente subdifusivo com $\alpha \approx 0.976$.

Já analisando a dispersão relativa encontramos um comportamento semelhante ao da dispersão média. Na maioria dos casos o comportamento é semelhante a um passeio aleatório com $\beta \approx 0.964$ para o caso irracional e com $\beta \approx 0.926$ para o caso racional quando não existem no plano de fase correntes de jato. Já quando existem correntes de jato (caso racional com $A_2 = 0.10$) a dispersão relativa apresenta um coeficiente $\beta \approx 1.523$ indicando que o jato é responsável por separar as partículas de maneira mais rápida que um passeio aleatório.

Dessa maneira, vimos nesse capítulo que as correntes de jato são estruturas que surgem e modificam consideravelmente o transporte de partículas e isso fica visível quando analisamos a distribuição dos saltos e a série temporal da dispersões média e relativa. Portanto, para entender melhor como o transporte de partículas ocorre nesse modelo, é essencial entender melhor como surgem tais correntes de jato.

Capítulo 5

Correntes de jato

5.1 Introdução

Como visto anteriormente, o plano de fase para o modelo estudado apresenta caos apenas quando pelo menos duas ondas com velocidades de fase diferentes são consideradas. Assim, de maneira geral, o plano de fases fica dividido em regiões com trajetórias caóticas, conhecidas como mares caóticos, e regiões com trajetórias regulares, conhecidas como ilhas regulares. De maneira geral, o transporte de partículas ocorre apenas pelo mar caótico, porém, foi observado que para um determinado conjunto de parâmetros surge no plano de fases uma nova região regular onde existe transporte entre células, tal região será chamada *corrente de jato*. Veremos nesse capítulo que a presença dessas correntes no plano de fase modifica drasticamente o transporte caótico de partículas.

5.2 Formalismo Hamiltoniano

O modelo hamiltoniano de ondas de deriva usado será o proposto por Horton, com uma diferença que nesse capítulo utilizaremos ondas de deriva se propagando na direção (x) com uma modulação na direção (y). Nesse caso, a hamiltoniana é dada por:

$$H(x,y,t) = H_0(x) + \sum_{i=1}^{N} A_i sin(k_{xi}(x - u_i t)) sin(k_{yi} y), \tag{5.1}$$

onde $H_0(x) = -\frac{E_0}{B_0}x$ é a hamiltoniana de equilíbrio, dado em função dos campos elétricos e magnéticos de equilíbrio. Os termos k_{xi}, k_{yi} e u_i são os números de onda na direção x e y e a velocidade de fase na direção x.

Nesse capítulo serão utilizadas duas ondas de deriva ($N = 2$) e a primeira onda será escolhida com velocidade igual a velocidade de deriva elétrica de equilíbrio ($u_1 = v_{E_0} = \frac{E_0}{B_0}$). Assim, é possível reescrever a hamiltoniana da equação 5.1 no referencial da primeira onda obtendo-se:

$$H(x, y, t) = A_1 sin(k_{x1}(x))sin(k_{y1}y) + A_2 sin(k_{x2}(x - ut))sin(k_{y2}y). \tag{5.2}$$

O caso mais geral ocorre quando a diferença de velocidade de fase $u = u_1 - u_2 \neq 0$. Nesse caso, a hamiltoniana da equação 5.2 não é uma constante de movimento e, portanto, não é integrável. Sendo assim, é necessário o uso de métodos numéricos de integração para obter as trajetórias.

5.3 Plano de fase

Utilizando apenas uma onda de deriva ($A_2 = 0$) na equação 5.2, o mapa de Poincaré do plano de fases apresenta apenas trajetórias regulares em forma de redemoinho como na figura 5.1. Cada trajetória fica dentro de uma célula e não existem trajetórias entre células. Na figura 5.1 estão mostradas duas células. [6]

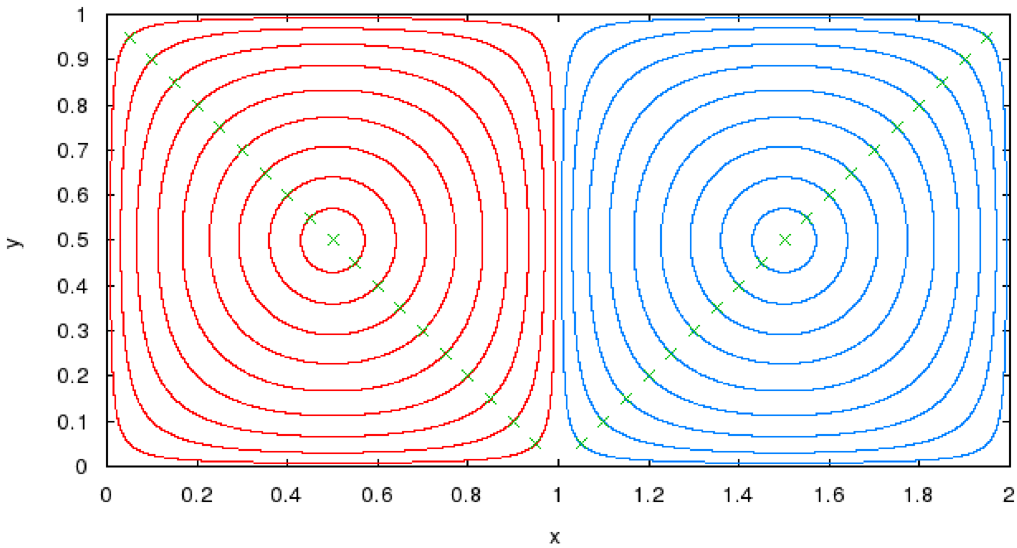

Figura 5.1: Mapa de Poincaré com orbitas regulares para sistema integrável ($A_2 = 0$). As condições iniciais estão representadas como cruzes verdes e geram duas células com trajetórias quase periódicas que não se misturam.

Quando uma segunda onda é utilizada ($A_2 = 0.1$), podemos ver no mapa de Poincaré da figura 5.2 que as trajetórias mais externas da célula tornam-se caóticas e algumas mais internas continuam regulares. O conjunto de trajetórias regulares encontradas no mapa é conhecido como ilhas e estão imersas num conjunto de orbitas caóticas conhecido como mar caótico.

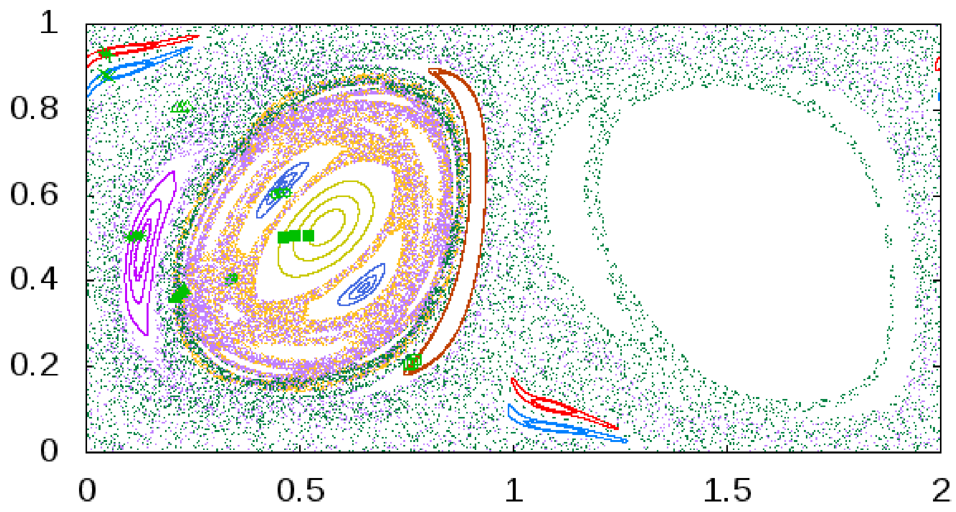

Figura 5.2: Mapa de Poincaré mostrando orbitas regulares e caóticas para o sistema não integrável ($A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$) obtidas a partir das condições iniciais mostradas em verde. Nesse caso, além de um padrão complexo de ilhas isoladas, pode-se observar duas regiões de caos local, uma região de caos global, algumas pequenas ilhas conectadas e duas correntes de jato.

Assim, o transporte de partículas nesse modelo surge quando, com a presença de uma segunda onda de deriva, a divisão entre as células do sistema integrável desaparece. Esse fenômeno é conhecido como *quebra de separatrizes*.[4]

A quebra das separatrizes dá origem ao caos global, responsável pelo transporte entre células, mas também cria regiões de caos local e ilhas conectadas. Um importante tipo de ilhas conectadas está localizado no canto superior esquerdo da figura 5.2, trajetórias com condição inicial dentro dessas ilhas são mapeadas nas ilhas do canto inferior central depois de um período. Tais ilhas, cujas trajetórias tem origem em uma célula e são mapeadas em células distintas, receberão o nome de *correntes de jato* (*jet streams*).Nas próximas seções iremos discutir um pouco mais sobre suas características e sua importância no transporte total.

Comparando os planos de fase para diferentes parâmetros é possível verificar a dife-

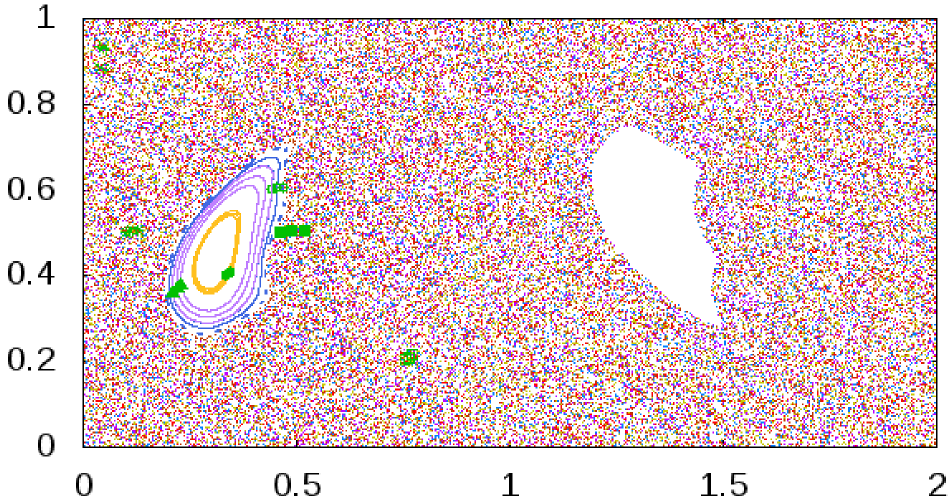

Figura 5.3: Mapa de Poincaré mostrando orbitas regulares e caóticas para o sistema não integrável ($A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$) obtidas a partir das condições iniciais mostradas em verde. Nesse caso, as pequenas ilhas isoladas e a região de caos local desaparecem em meio ao caos global. Para essa combinação de parâmetro não existem correntes de jato e o transporte se dá apenas na região caótica.

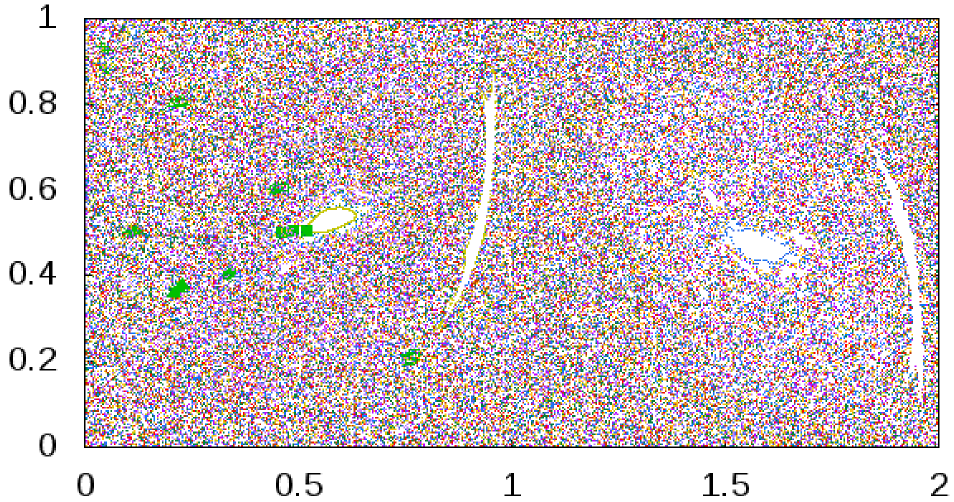

Figura 5.4: Mapa de Poincaré mostrando orbitas regulares e caóticas para o sistema não integrável ($A_2 = 0.2$ e $u = 1.0$) obtidas a partir das condições iniciais mostradas em verde. Nesse caso, as pequenas ilhas isoladas e a região de caos local desaparecem em meio ao caos global. Para essa combinação de parâmetro não existem correntes de jato e o transporte se dá apenas na região caótica.

rença entre um plano de fase que possui apenas ilhas e trajetórias caóticas ($A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$) na figura 5.3 ou $A_2 = 0.2$ e $u = 1.0$ na figura 5.4) com um que, além de ilhas e trajetórias caóticas, apresenta correntes de jato ($A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$ na figura 5.2). As correntes de jato da figura 5.2 criam um plano de fases não homogêneo, identificado através de áreas com alta ou baixa concentração de trajetórias. Nas figuras 5.3 e 5.4 não existem tais jatos e o transporte é homogêneo em todo plano de fase exterior às ilhas, não se podendo encontrar áreas com alta ou baixa concentração de trajetórias no mar caótico.

É importante lembrar que todas as figuras mostradas nessa seção estão moduladas para o valor 2 na direção x. Dessa forma, tanto as trajetórias que vão para a direita atravessam o valor $x = 2$ quanto as trajetórias que vão para a esquerda e atravessam o valor $x = 0$ são jogadas de volta na no intervalo entre zero e dois e apenas para serem mostradas nos mapas de Poincaré das figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Para todos os cálculos, nenhuma modulação é utilizada.

5.4 Corrente de jato e ilhas

Para diferenciar as correntes de jato das ilhas, é necessário observar o diagrama da figura 5.5. Nesse tipo de diagrama é mostrado na escala de cores o deslocamento em x de um conjunto de trajetórias com condições iniciais em x e y após um intervalo de integração T. As ilhas são identificadas como áreas escuras (preto) e as correntes de jato como áreas claras (amarelo). A figura 5.5 foi obtida com $T = 2$.

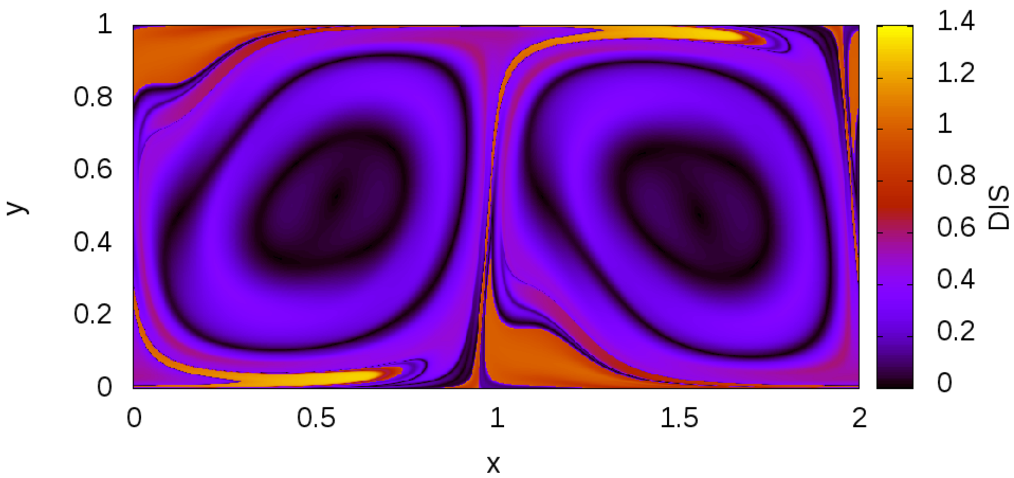

Figura 5.5: Diagrama de deslocamento com correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento quadrático de cada condição inicial.

Aumentando o tempo de integração para $T = 10$, podemos ver na figura 5.6 que algumas trajetórias que na figura 5.5 aparentavam pertencer à corrente de jato pertencem, na verdade, ao mar caótico. Isso ocorre pois, as trajetórias caóticas próximas à corrente de jato estavam apenas sobre o efeito do grude (*stickiness*). Quanto maior o tempo de integração, mais trajetórias caóticas desgrudarão do jato.

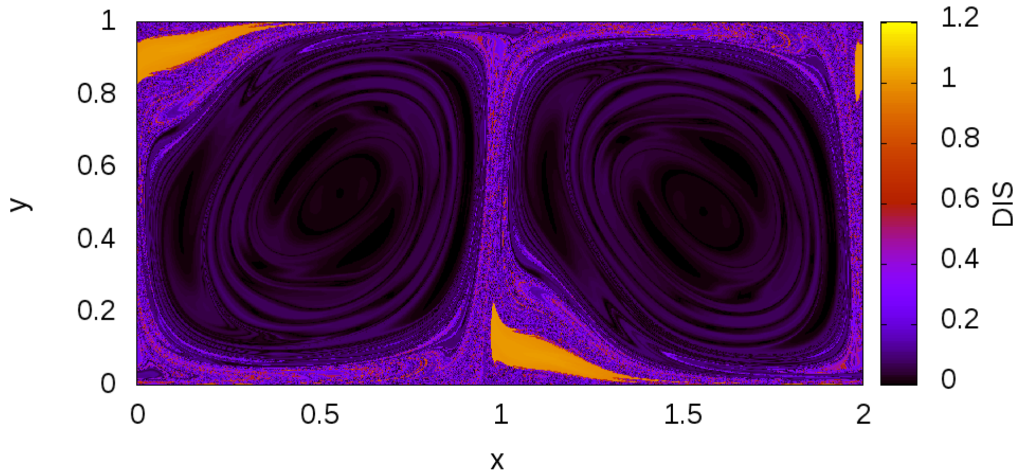

Figura 5.6: Diagrama de deslocamento com corrente de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento quadrático de cada condição inicial.

Quando não existem correntes de jato, a concentração de trajetórias de transporte elevado não persistem por muito tempo no diagrama de deslocamento. Um exemplo pode ser visto nas figuras 5.7 e 5.8. Nelas vemos que para tempos curtos (figura 5.7) existe uma concentração de trajetórias com alto transporte que se dissipa para tempos maiores (figura 5.8).

Caso nenhuma pertubação seja inserida nas trajetória, uma partícula que inicialmente está dentro de uma corrente de jato ou de uma ilha continua nela por tempo indeterminado. Entretanto, partículas que estão no mar caótico tendem a colar por algum tempo em um desses dois regimes (*stickiness*). Estudar como as trajetórias caóticas trocam a região a qual estão grudadas é essencial para entender o transporte nesse sistema.

Na figura 5.9 estão mostrados os mapas de Poincaré para as trajetórias de 3 conjuntos de condições iniciais. Nessa figura é possível ver que o mar caótico preenche grande parte do plano de fases, mas não consegue penetrar nas ilhas e nas correntes de jato.

Mesmo que as ilhas e as correntes de jato sejam inacessíveis para as trajetórias caóticas, sua presença é fundamental para o transporte de partículas. Na figura 5.10 é possível ver que as trajetórias do mar caótico podem tanto ficar grudadas em alguma ilha (velocidade

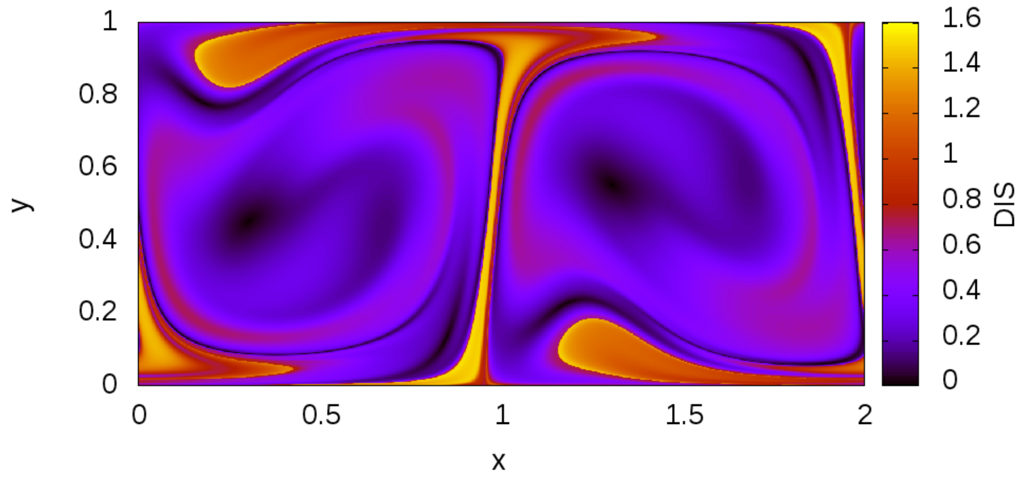

Figura 5.7: Diagrama de deslocamento sem correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento quadrático de cada condição inicial.

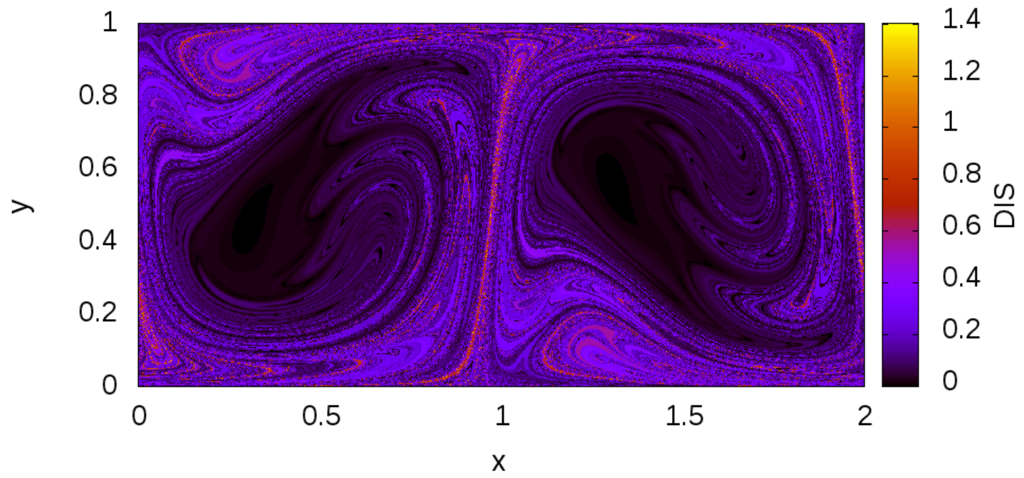

Figura 5.8: Diagrama de deslocamento sem correntes de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento quadrático de cada condição inicial.

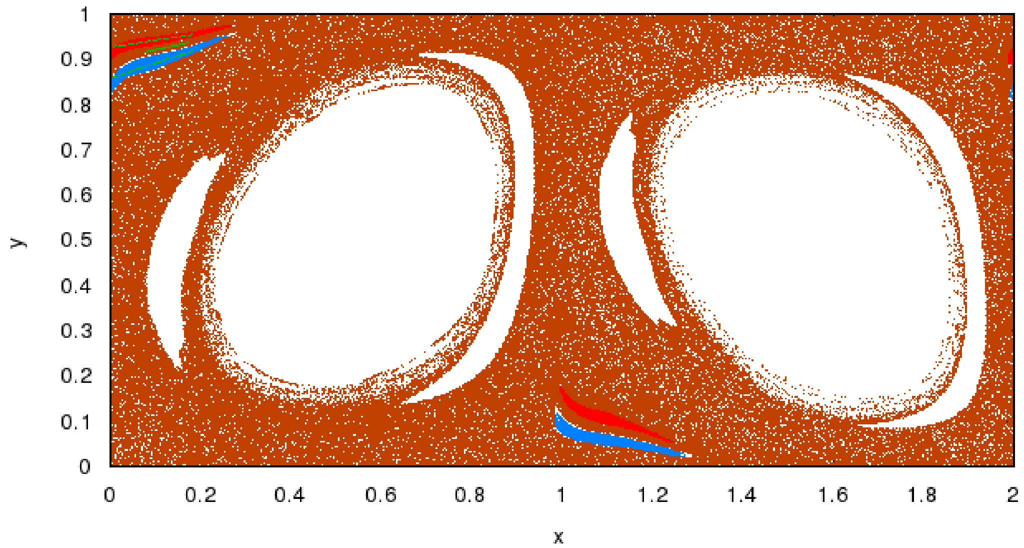

Figura 5.9: Mapa de Poincaré com $T = 5000$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$ para 3 conjuntos de condições iniciais: Azul e vermelho para correntes de jato e marrom para o mar caótico.

nula) quanto em alguma corrente de jato (velocidade constante).

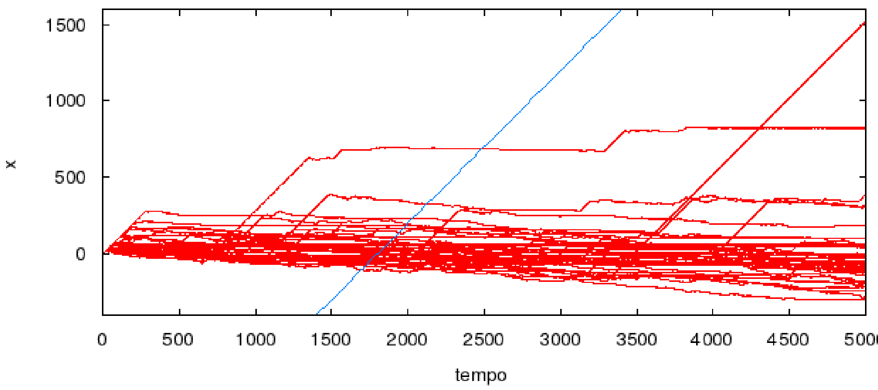

Figura 5.10: Posição em x em função do tempo para as trajetórias dentro do mar caótico da figura 5.9 com , $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$. Para referência, a curva em azul $x(t) \propto t$ representa uma partículas com velocidade constante.

Para $A_2 = 0.1$, como visto na figura 5.9, as trajetórias caóticas ocupam um grande espaço no plano de fases, mas não conseguem penetrar as ilhas ou as correntes de jato. Entretanto, como visto na figura 5.10, tais trajetórias podem ficar coladas em ilhas ou correntes de jato por algum tempo.

5.5 Expoente de Lyapunov

Para identificar as ELCs e verificar que tais estruturas são responsáveis por separar regiões com diferentes tipos de transporte, construiremos diagramas de Lyapunov. Em tais diagramas, os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o valor do expoente de Lyapunov a tempo finito. As cristas desse diagrama, máximos locais de expoente de Lyapunov definidos no capítulo 3, nos darão a localização instantânea das ELCs.

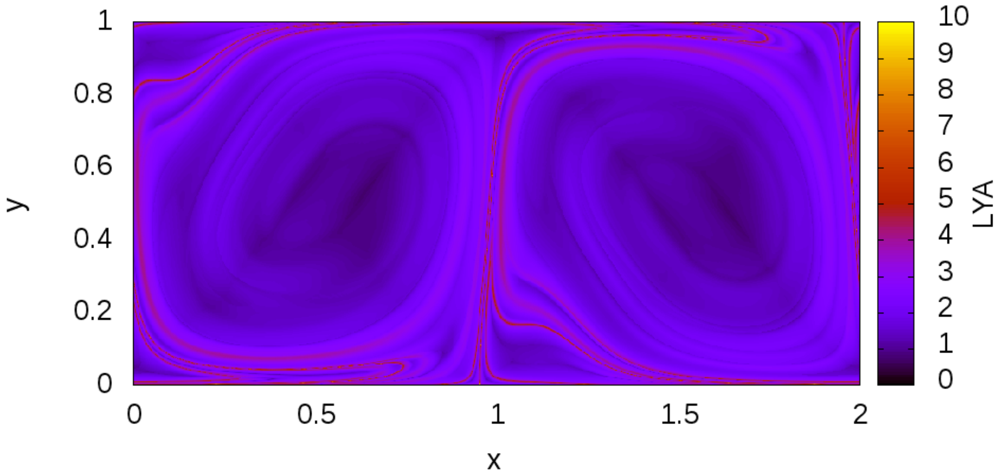

Figura 5.11: Diagrama de Lyapunov com correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o valor do expoente de Lyapunov a tempo finito para cada condição inicial.

Dessa maneira, é possível ver nas figuras 5.11 e 5.13 que as ELCs são estruturas que contornam as regiões de transporte elevado mostradas nas figuras 5.5 e 5.7. E que, além disso, é possível ver também nas figuras 5.12 e 5.14 que quanto maior o tempo de integração, maior é o espaçõ ocupado pelas ELCs.

Comparando agora o caso com jato ($A_2 = 0.10$ e $u = 1.0$ na figura 5.12) com o caso sem jato ($A_2 = 0.10$ e $u = 1.5$ na figura 5.14) é possível ver que as ELCs não acessam as correntes de jato. Sendo assim, não é possível que as trajetórias caóticas entrem nos jatos.

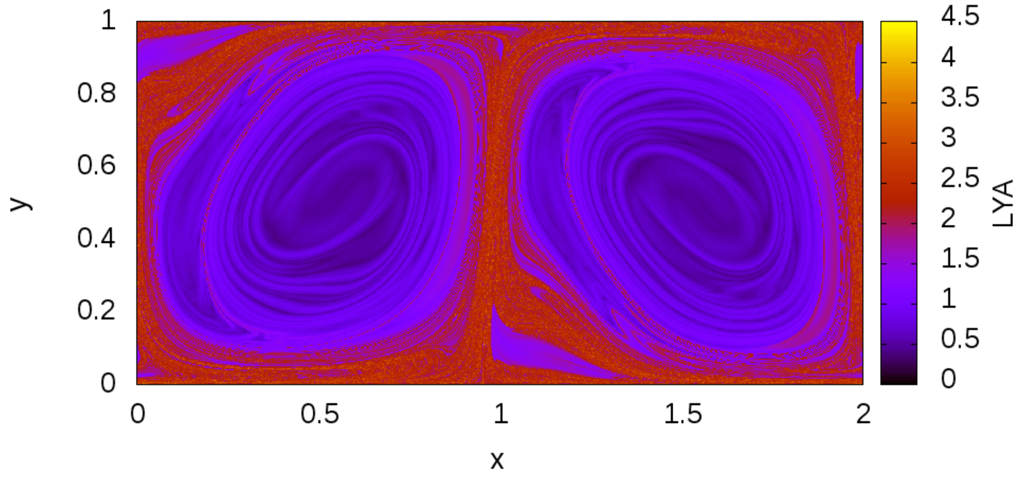

Figura 5.12: Diagrama de Lyapunov com correntes de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o valor do expoente de Lyapunov a tempo finito para cada condição inicial.

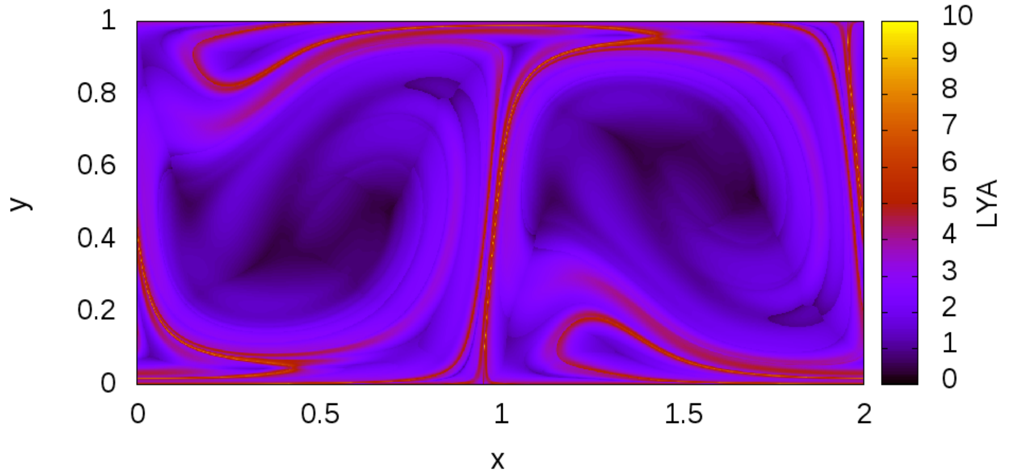

Figura 5.13: Diagrama de Lyapunov sem correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o valor do expoente de Lyapunov a tempo finito para cada condição inicial.

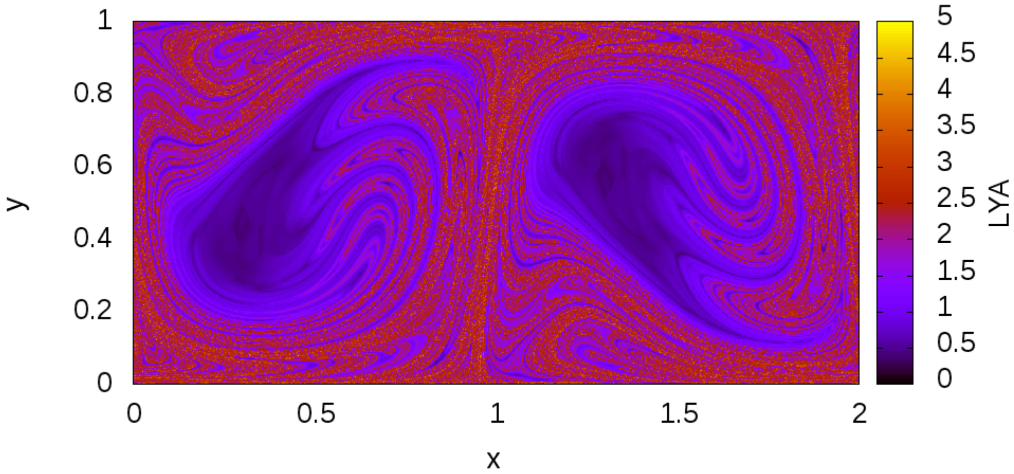

Figura 5.14: Diagrama de Lyapunov sem correntes de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.1$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o valor do expoente de Lyapunov a tempo finito para cada condição inicial.

5.6 Autocorrelação da Velocidade

A autocorrelação da velocidade (VAF) é definida como:

$$\mathrm{VAF}(k) = \frac{N \sum_{i=1}^{N-k} (v_i - \overline{v})(v_{i+k} - \overline{v})}{(N-k) \sum_{i=1}^{N} (v_i - \overline{v})^2}, \tag{5.3}$$

onde $\overline{v}$ é a média temporal das velocidades, k é um número inteiro que representa o atraso (*Lag*) e N é o número total de pontos da série temporal que representa o tempo total de simulação.

Na figura 5.15 está mostrada a autocorrelação da velocidade na direção x (VAF_x) em função do diferença de tempo em que as velocidades são calculadas (atraso). Nessa figura é possível ver que a oscilação dessa autocorrelação cai para valores menores que a linha limite (em verde) para tempos pequenos, entretanto, depois de algum tempo começa a oscilar com valores maiores que a linha limite. Esse fato é um indício de que tal trajetória pode não ter comportamento aleatório.

Já para um conjunto de parâmetros onde não há correntes de jato ($A_2 = 0.2$ e $u = 1.0$), é mostrado na figura 5.16 que a oscilação da autocorrelação da velocidade cai para valores inferiores ao limite e permanece abaixo desse limite durante todo o tempo de simulação, indicando que tal trajetória tem comportamento aleatório.

Construiremos agora um diagrama, semelhante ao diagrama de deslocamento anterior. Nesse diagrama, para cada condição inicial, calcularemos o valor médio do módulo da

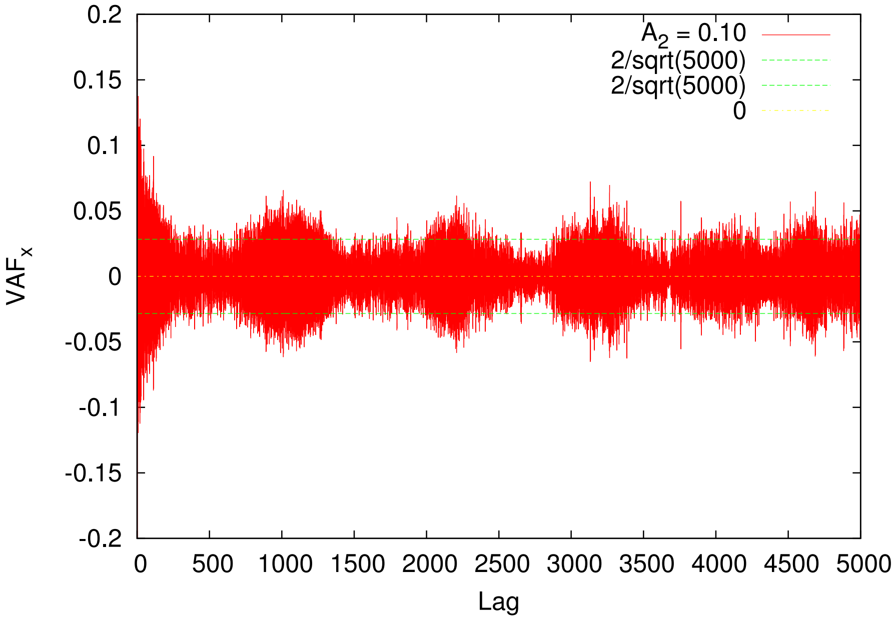

Figura 5.15: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (*Lag*) para $A_2 = 0.10$.

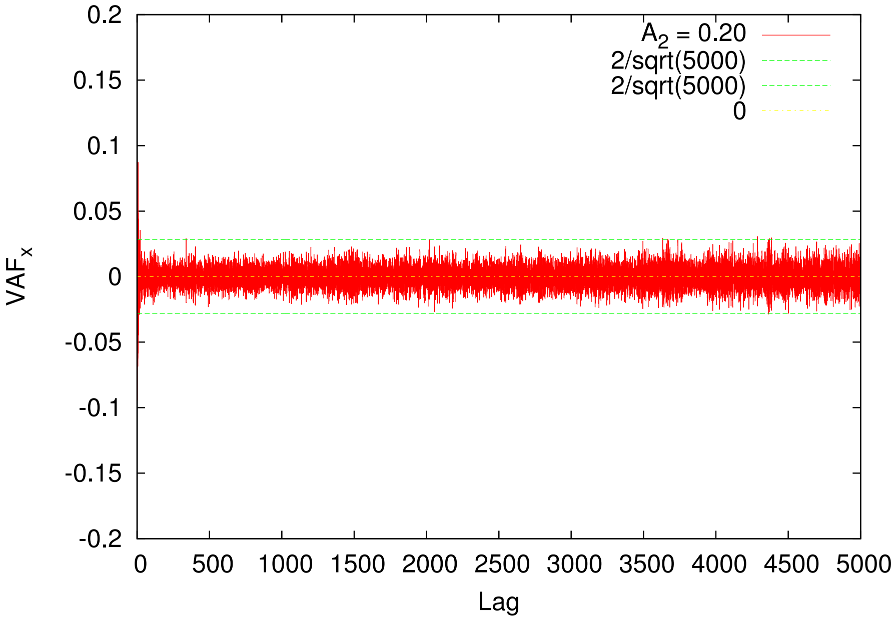

Figura 5.16: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (*Lag*) para $A_2 = 0.20$.

autocorrelação da equação 5.3 para cada condição inicial.

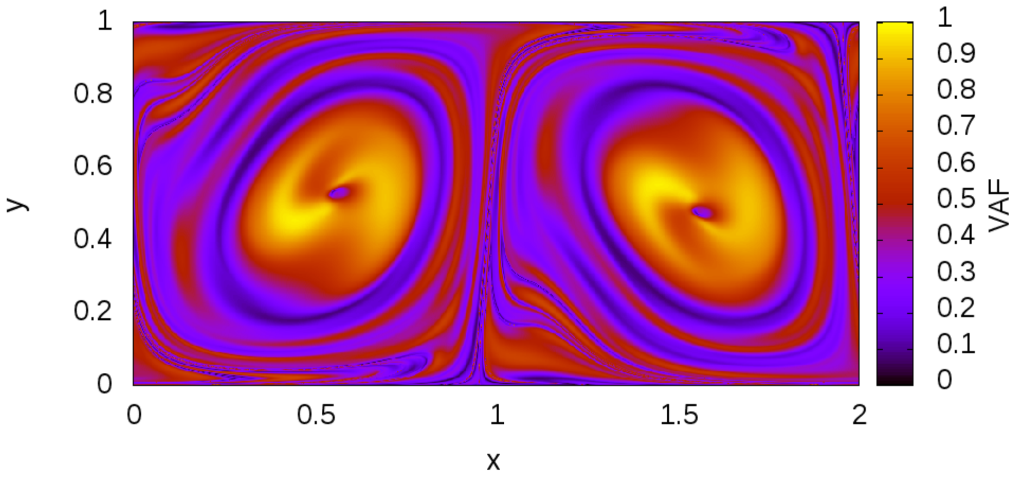

Figura 5.17: Diagrama de autocorrelação com correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.2$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a autocorrelação média da velocidade para cada condição inicial.

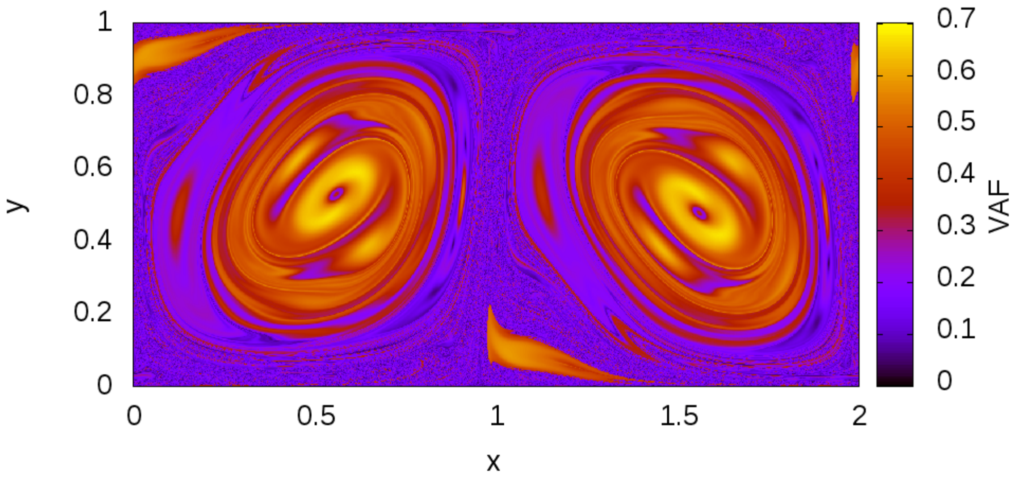

Figura 5.18: Diagrama de autocorrelação com correntes de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.2$ e $u = 1.0$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a autocorrelação média da velocidade para cada condição inicial.

Nas figuras 5.17 e 5.18 podemos ver que, tanto na região onde existem ilhas, quanto na região onde existem correntes de jato, a autocorrelação da velocidade tende a ter valores elevados. Já na região caótica a autocorrelação tende a ser baixa. Entretanto, na região caótica a autocorrelação não é uniformemente baixa, podemos encontrar pequenas regiões complexas com alta autocorrelação. Tais regiões estão relacionadas à presença de Estruturas Lagrangianas Coerentes. [25]

Quando utilizamos $u = 1.5$, não existem correntes de jato e vemos isso nas figuras 5.19 e 5.20. A autocorrelação da velocidade é alta apenas dentro das ilhas e fora das ilhas é baixa com estrutura complexa.

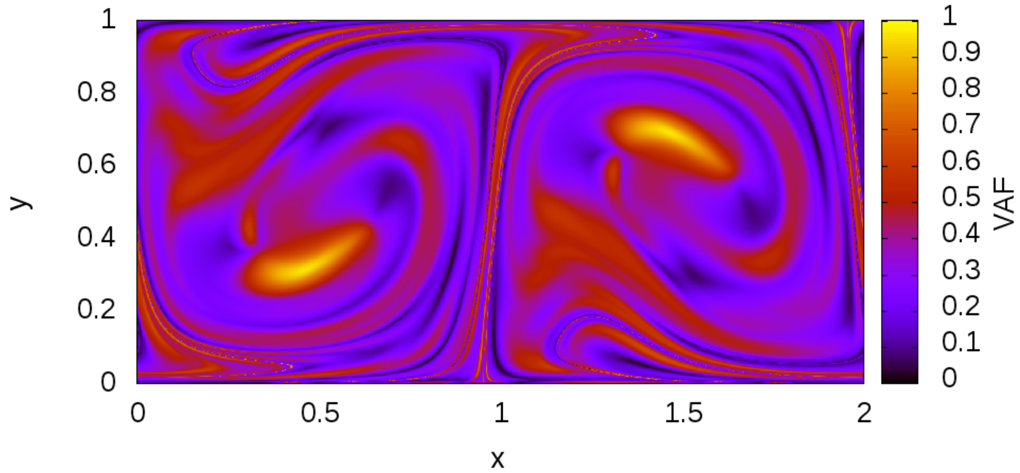

Figura 5.19: Diagrama de autocorrelação sem correntes de jato para $T = 2$, $A_2 = 0.2$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a autocorrelação média da velocidade para cada condição inicial.

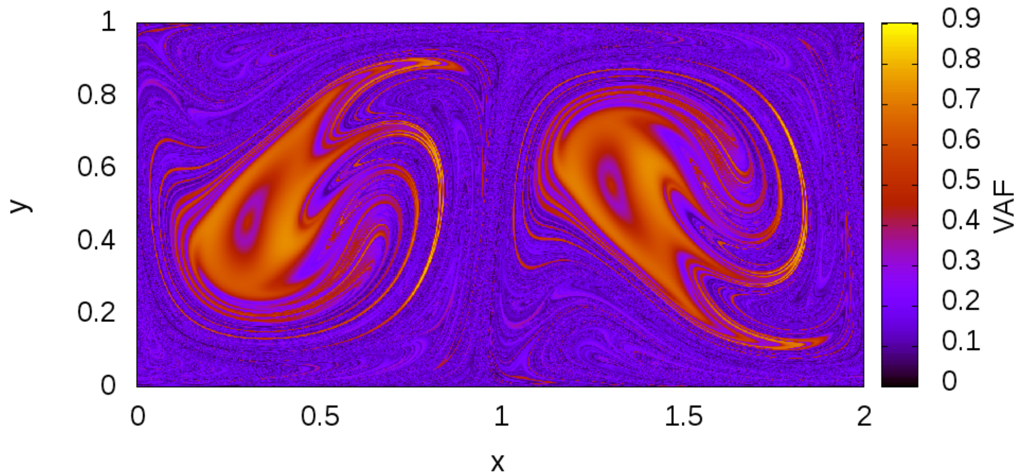

Figura 5.20: Diagrama de autocorrelação sem correntes de jato para $T = 10$, $A_2 = 0.2$ e $u = 1.5$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a autocorrelação média da velocidade para cada condição inicial.

Os diagramas para tempo curto, figuras 5.17 e 5.19, carregam uma importante informação sobre o grudamento (stickiness). Nelas, podemos ver que existem algumas trajetórias que por um curto tempo tem autocorrelação alta, ou seja, por um tempo curto tais trajetórias vão apresentar um movimento previsível. Tal movimento pode estar relacionado com o grudamento em uma ilha ou em uma corrente de jato.

5.7 Deslocamento quadrático médio

Como visto anteriormente, o deslocamento quadrático médio de uma trajetória que acompanha a corrente de jato é de uma célula por período. Sabendo disso, podemos tentar identificar os jatos utilizando esse deslocamento, mas veremos nessa seção que analisar apenas o deslocamento quadrático não é suficiente para identificar os jatos, uma vez que uma grande quantidade de trajetórias pode caminhar uma célula por período sem necessariamente estar dentro de um jato.

5.7.1 Diagrama de deslocamento quadrático

Computando o deslocamento quadrático para uma grade de 10^6 condições iniciais uniformemente distribuídas num quadrado de tamanho um obtemos o diagrama de deslocamento mostrados nas figura de 5.21 até 5.27. Nesses diagramas a escala de cores sempre começa em 0.5, pois estamos interessados apenas nas trajetórias que saem das células.

Na figura 5.21, vemos que conforme aumentamos a amplitude da segunda onda (A_2), a região com deslocamento maior que um aumenta gradativamente. Podemos ver que a região inferior desses quatro parâmetros tem um deslocamento ligeiramente mais elevado do que a região superior e que, conforme é aumentado a segunda onda, o plano de fase passa a ter uma geometria mais complexa. Porém, não é possível identificar nenhuma anomalia ou característica marcante que distingua a região das correntes de jato das regiões caóticas.

Fazendo uma ampliação, na figura 5.21 em torno da região onde a corrente de jato é esperada, temos o diagrama da figura 5.22. Vemos aqui que muitas trajetórias tem o deslocamento quadrático maior que um, ou seja, muitas trajetória tem a mesma velocidade do jato, mas não podemos encontrar nenhuma diferença entre o caso em que existe o jato ($A_2 = 0.10$) e os outros.

Aumentando o tempo de integração para $T = 2$ temos os diagramas da figura 5.23 e 5.24. Nesses diagramas vemos que conforme a amplitude da segunda onda (A_2) é aumentada, a região de deslocamento elevado se espalha pelo plano de fase para $A_2 > 0.10$ enquanto que para $A_2 = 0.10$ essa região se concentra apenas no jato.

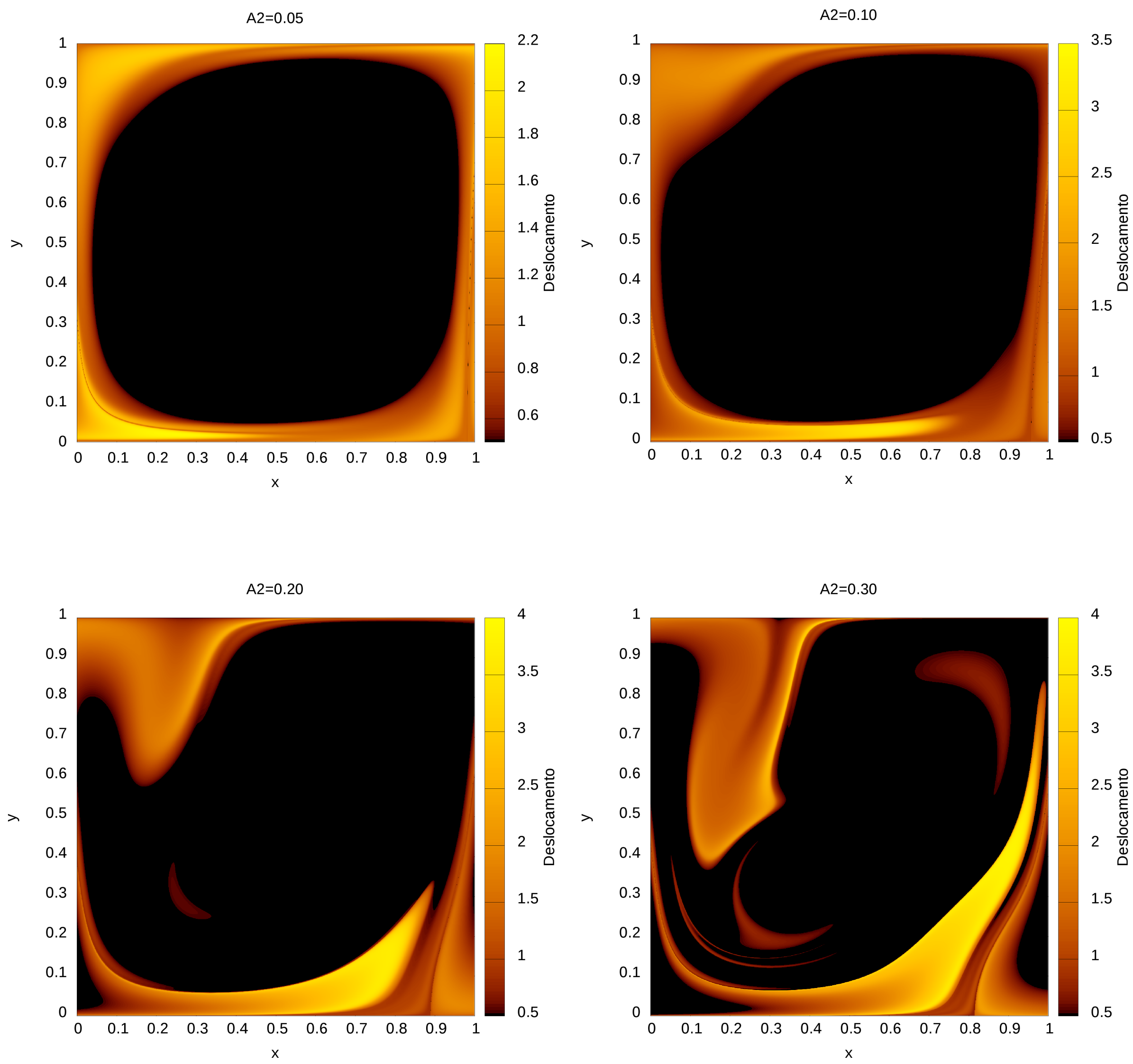

Figura 5.21: Diagrama de deslocamento para $T = 1$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

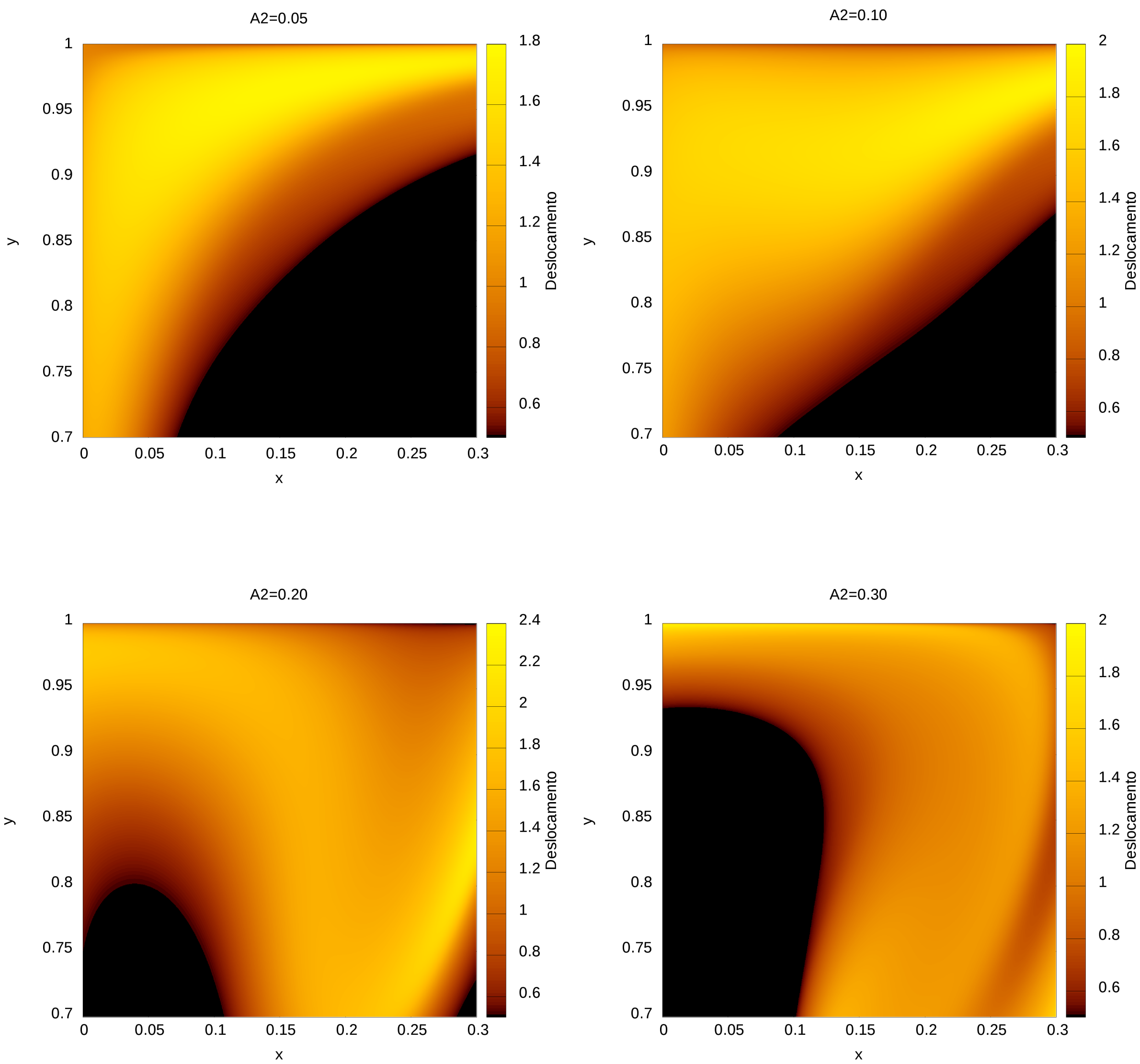

Figura 5.22: Ampliação do diagrama de deslocamento para $T = 1$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

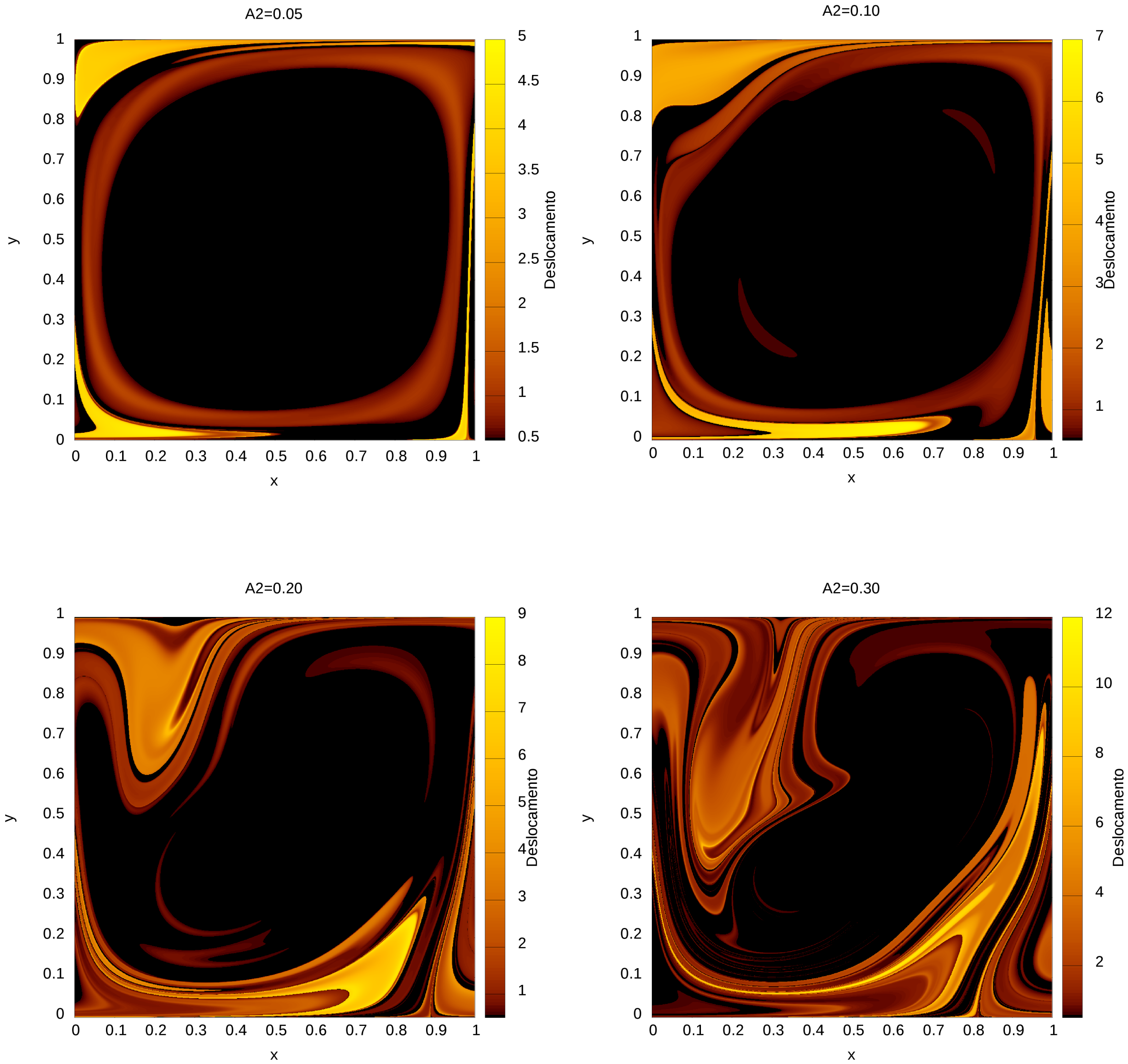

Figura 5.23: Diagrama de deslocamento para $T = 2$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

Na ampliação mostrada na figura 5.24 é possível ver que para $A_2 = 0.30$ não existe mais corrente de jato, mas para $A_2 = 0.05$, $A_2 = 0.10$ e $A_2 = 0.20$ não é possível afirmar se a corrente de jato está ou não presente.

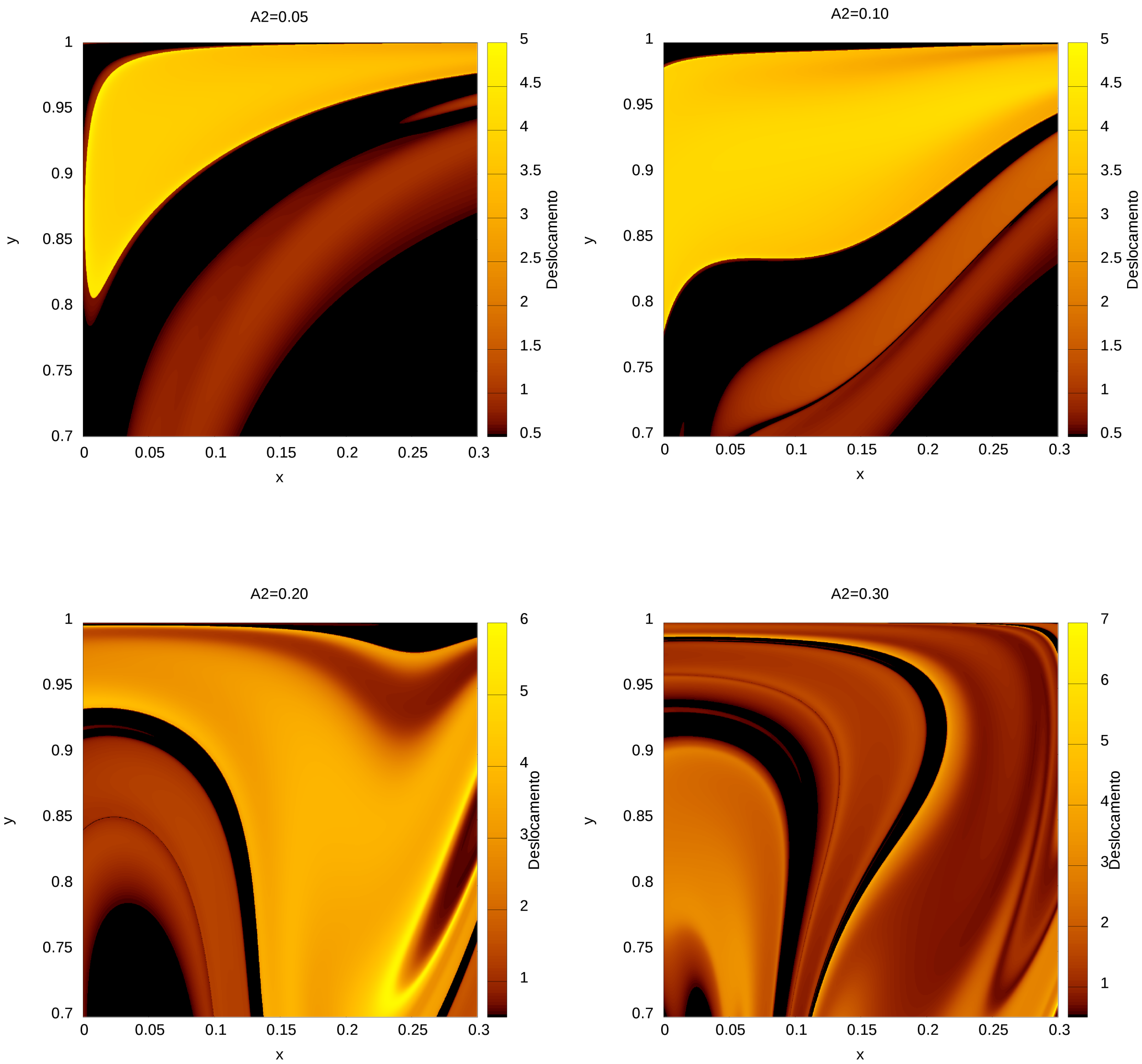

Figura 5.24: Ampliação do diagrama de deslocamento para $T = 2$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

Novamente, aumentando o tempo de integração para $T = 4$ temos os diagramas das figuras 5.25 e 5.26. Nesses diagramas também não é possível diferenciar a região caótica presente em $A_2 = 0.20$ do jato presente em $A_2 = 0.10$, nem se a região em amarelo em $A_2 = 0.05$ é um jato. É possível apenas verificar que conforme o tempo de integração é aumentado, mais complexa ficam as estruturas.

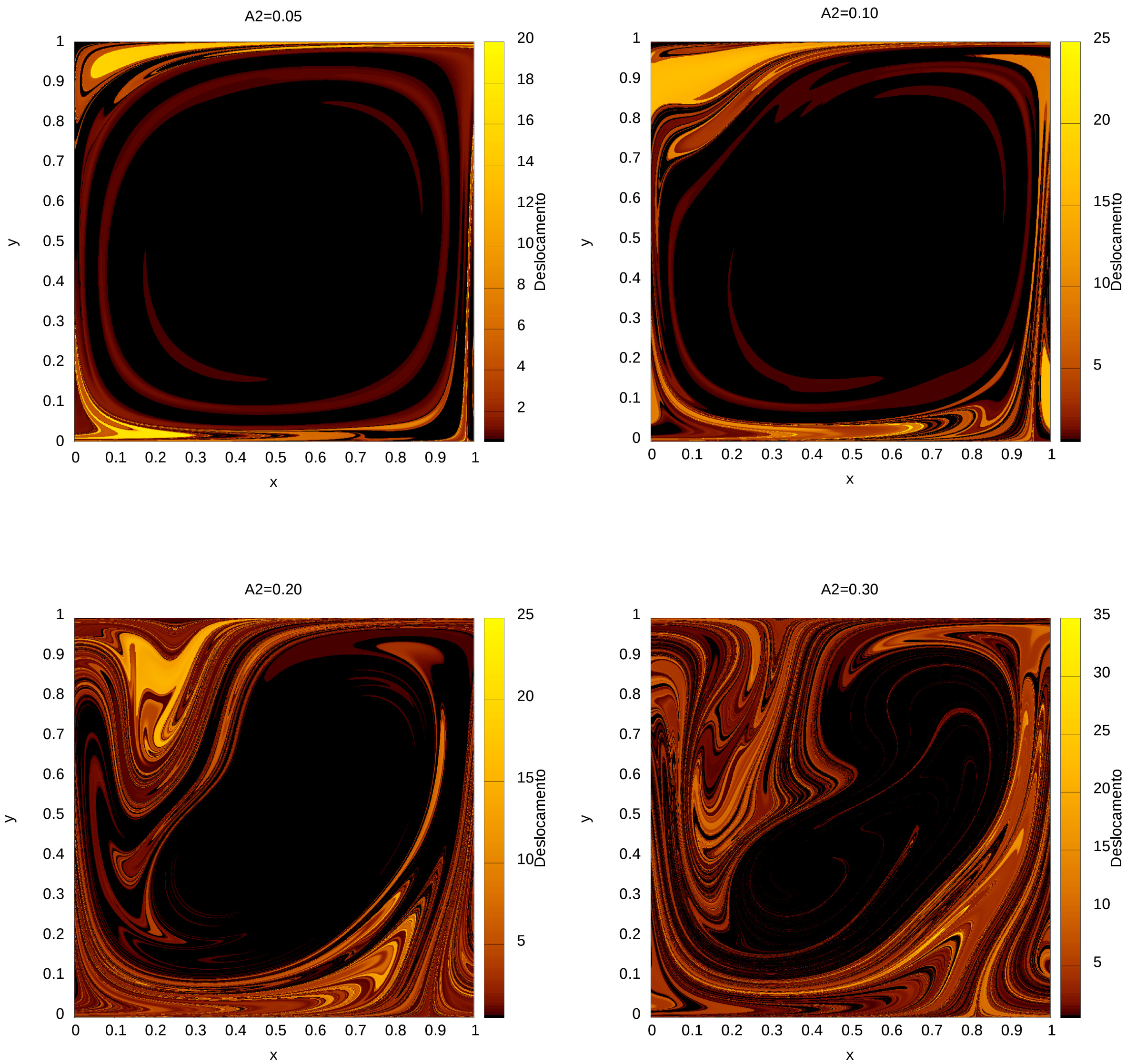

Figura 5.25: Diagrama de deslocamento para $T = 4$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

Na ampliação mostrada na figura 5.26 é possível ver que a região amarela é ligeiramente maior para $A_2 = 0.10$, mas não é muito diferente do que pode ser observado em $A_2 = 0.20$.

Para diferenciar a região caótica da região com corrente de jatos utilizando o deslocamento quadrático precisamos aumentar muito o tempo de integração. Uma simulação com 10^4 condições iniciais foi feita e está mostrada nos diagramas da figura 5.27. Aqui finalmente conseguimos dizer que não existem jatos para $A_2 = 0.05$, $A_2 = 0.20$ e $A_2 = 0.30$,

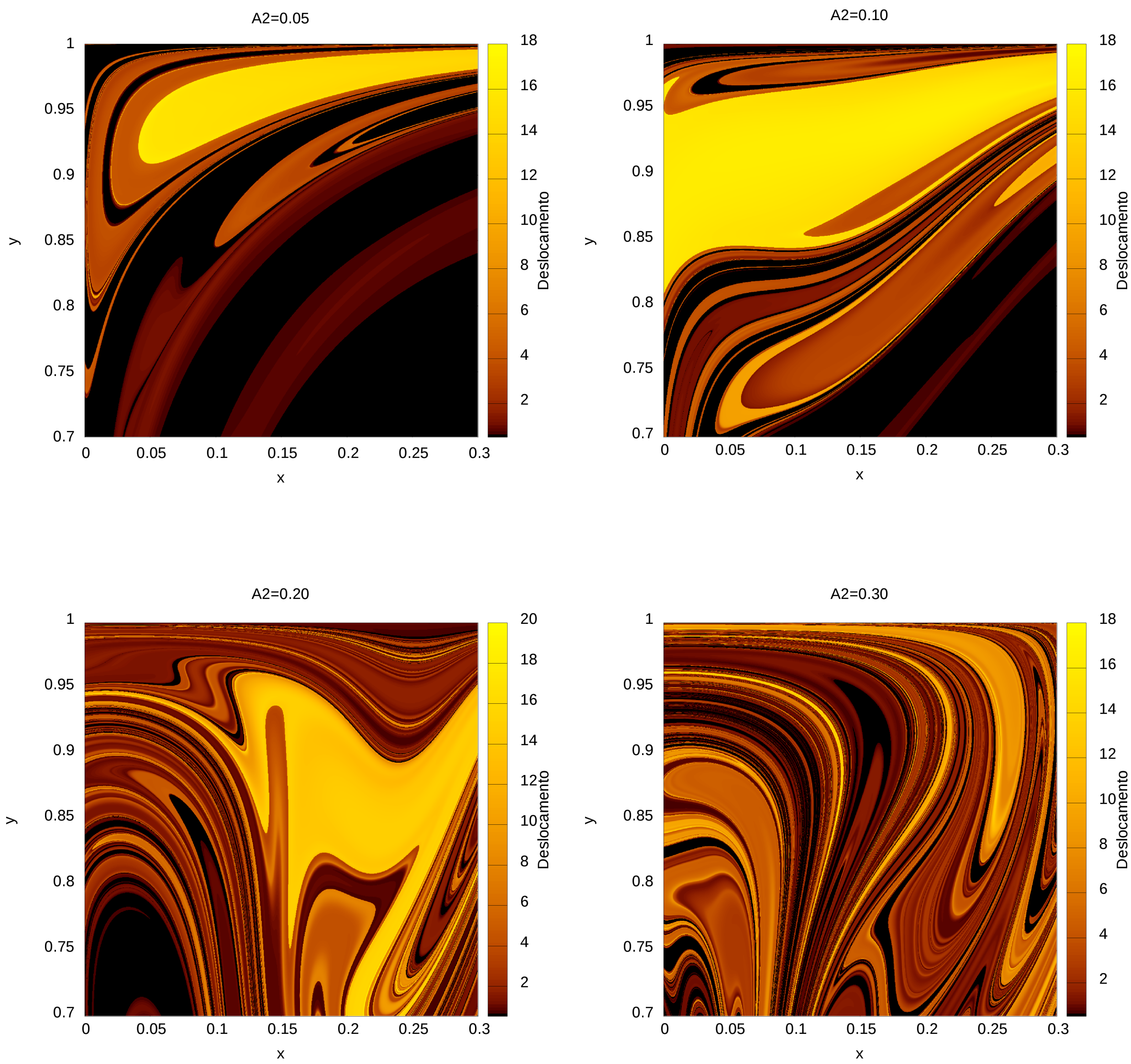

Figura 5.26: Ampliação do diagrama de deslocamento para $T = 4$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

entretanto ainda não é possível dizer se a região com deslocamento elevado em $A_2 = 0.10$ possui um ou dois jatos próximos.

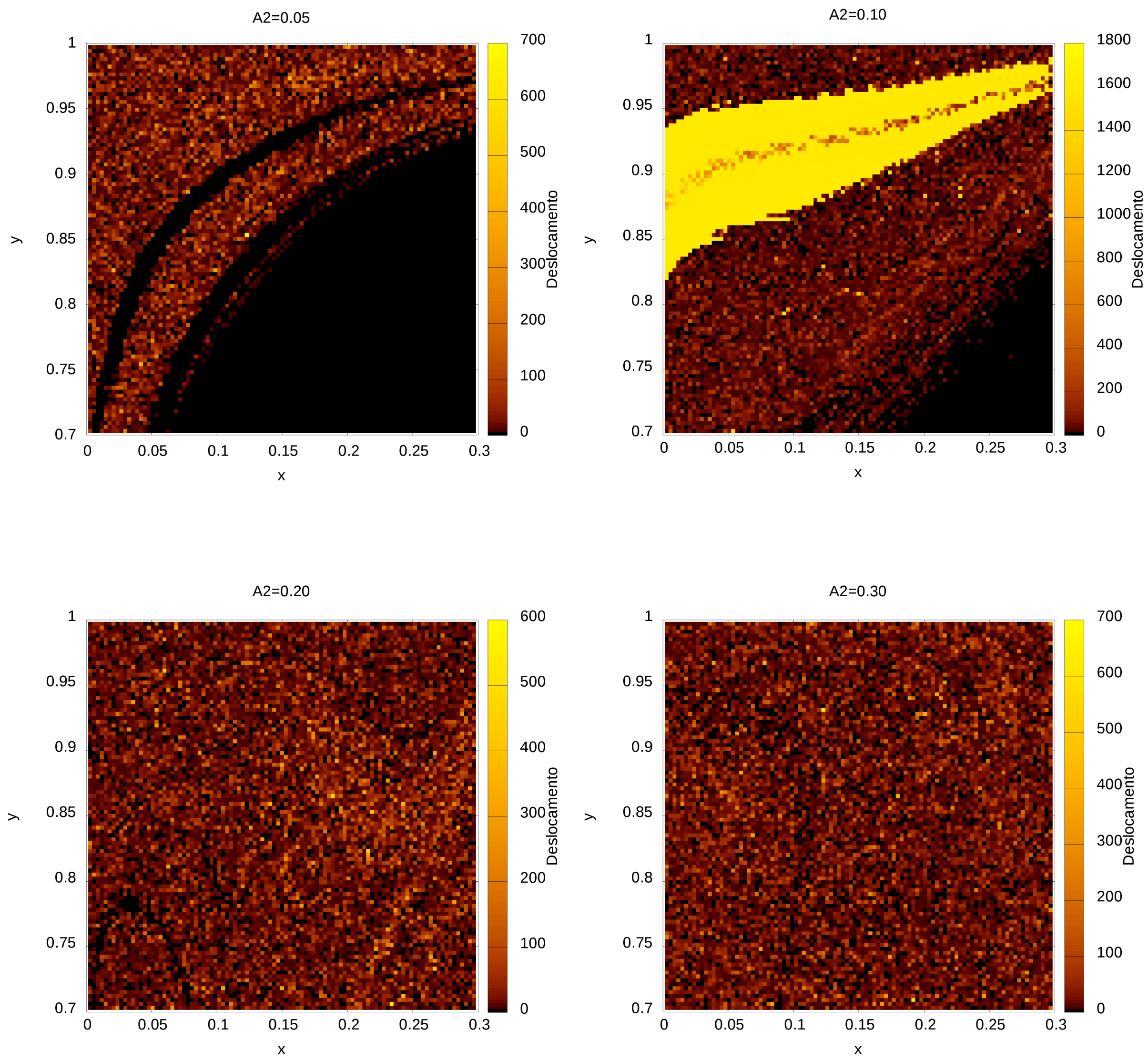

Figura 5.27: Diagrama de deslocamento para $T = 40$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa o deslocamento de cada condições inicial depois de um tempo de integração T.

De maneira geral, o diagrama de deslocamento consegue identificar regiões onde o deslocamento vai ser maior ou menor durante um determinado tempo, mas não é eficiente pra prever se o deslocamento de tal trajetória vai se manter dessa maneira por muito tempo. Sendo assim, mesmo que sendo efetivo para se observar o grudamento de trajetórias caóticas, o diagrama de deslocamento não é eficiente para identificar jatos.

5.8 Deslocamento de retorno

Para conseguir identificar jatos no plano de fase, precisamos levar em consideração que as trajetórias de partículas dentro dos jatos permanecem no jato, ou seja, são trajetórias que sempre tem deslocamento com tamanho de uma célula por período. Sendo assim, temos que procurar no plano de fase não apenas trajetória com o deslocamento de uma célula por período, mas trajetórias que sucessivamente tem o deslocamento de uma célula por período. Para isso definiremos o *deslocamento de retorno* (DR) como

$$DR(T) = \sqrt{(\mathbf{r}^{+}(T) - \mathbf{r}^{-}(T))^2} - 2T, \tag{5.4}$$

onde $\mathbf{r}^{+}(T)$ é a posição depois de um tempo T de integração para o futuro, $\mathbf{r}^{-}(T)$ é a posição depois de um tempo T de integração para o passado e o termo $2T$ é a correção na posição já que a velocidade do jato é de uma célula por período.

Para entender o mecanismo por trás dessa definição de deslocamento de retorno vamos construir as *bacias de retorno*.

5.8.1 Bacia de retorno

Os jatos se formam quando um conjunto de trajetórias se desloca de maneira organizada uma célula por período. Em outras palavras, podemos dizer que o jato existe quando a posição passada (um período antes) e a posição futura (um período depois) coincidem. Uma bacia de retorno será o mapeamento de um conjunto de condições inicias para o futuro e para o passado.

Para entender essa ideia veremos a figura 5.28.

Os jatos pulam uma célula por período. Quando olhamos para o mapa de período um, ele ocupa a região superior esquerda das células impares e a região inferior esquerda das pares. Sendo assim, podemos ver que depois de dois períodos um jato mapeado em uma célula impar volta para uma célula impar na mesma posição e um jato mapeado em uma célula par volta para a célula par na mesma posição como podemos ver na figura 5.29.

Ampliando um pouco a figura 5.29 em torno do jato, podemos ver em detalhes na figura 5.30 que quando existe uma corrente de jato, existe uma grande intersecção sólida entre a regiões azul, vermelha e verde, que representam respectivamente as posições presente, futuro e passado de um conjunto de trajetórias.

Sendo assim, se o mapeamento de uma trajetória para o futuro e para o passado tem deslocamento de retorno DR próximo de zero segundo a equação 5.4 podemos afirmar que tal trajetória pode estar dentro de um jato. Se o DR de uma trajetória permanece

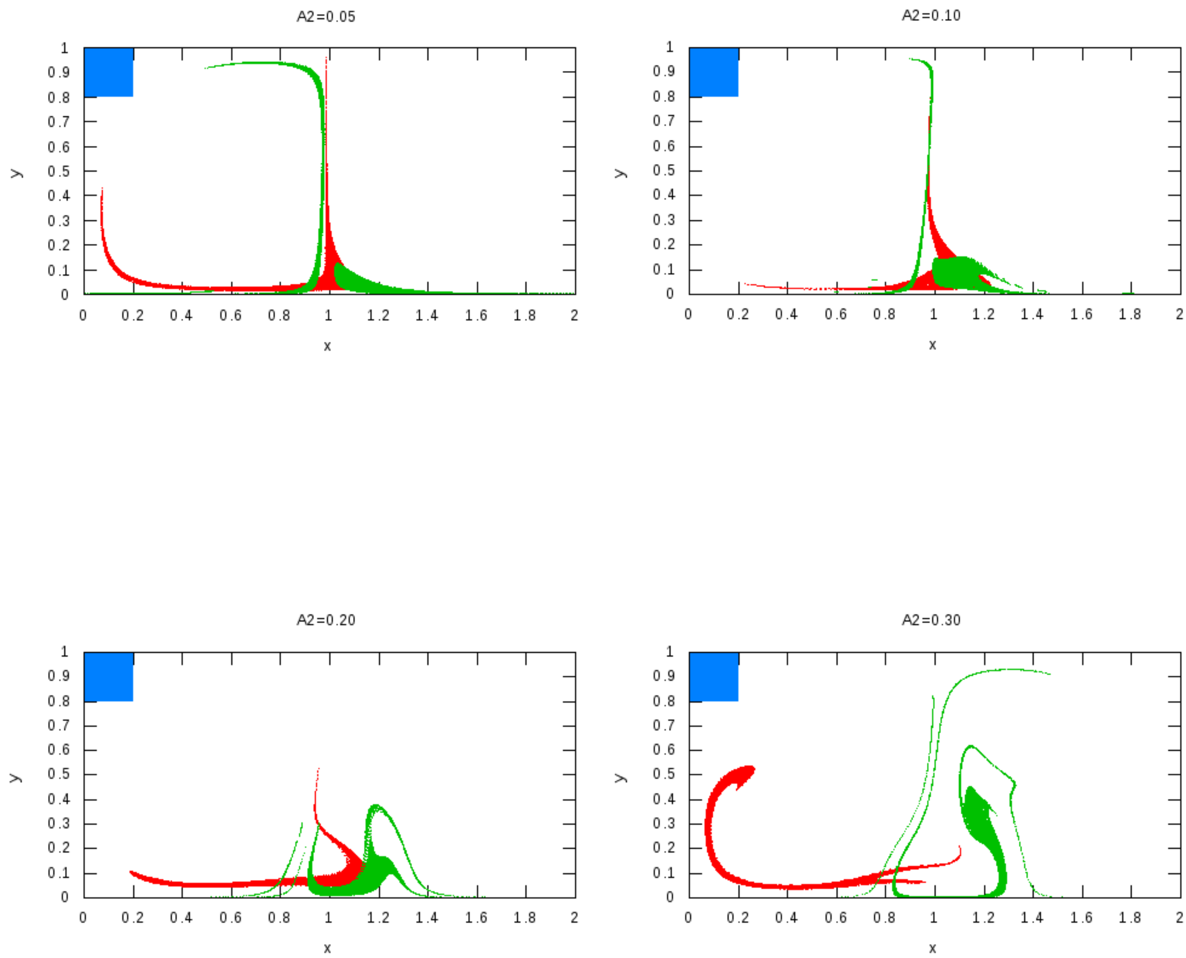

Figura 5.28: Um conjunto de condições iniciais foi colocado em azul nas proximidades do jato. Os pontos vermelhos foram obtidos integrando-se as equações de movimento por um período para o futuro e indicam para onde essas trajetórias foram. Os pontos verdes foram obtidos integrando-se as equações de movimento por um período para o passado e indicam de onde esses pontos vieram.

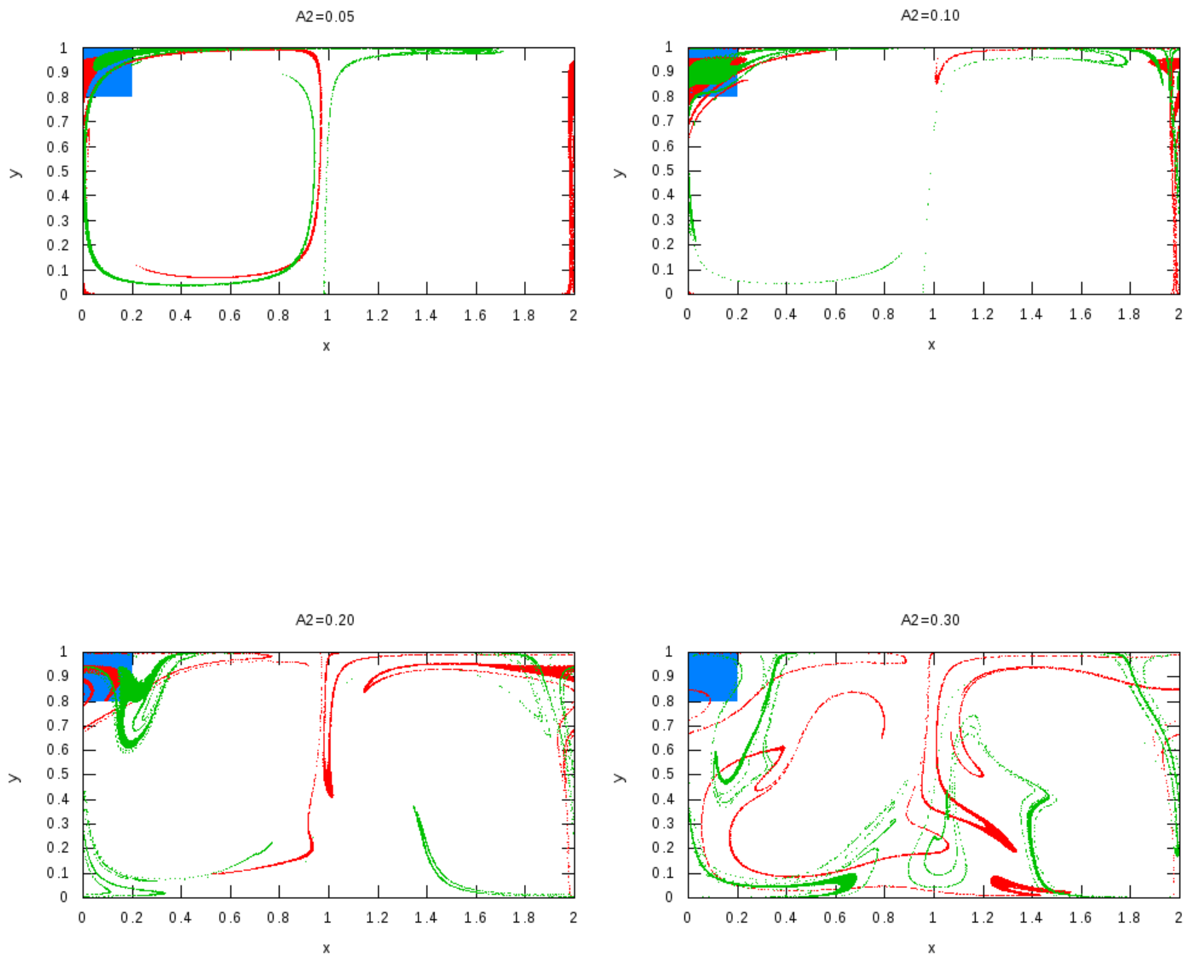

Figura 5.29: Um conjunto de condições iniciais foi colocado em azul nas proximidades do jato. Os pontos vermelhos foram obtidos integrando-se as equações de movimento por dois períodos para o futuro e indicam para onde essas trajetórias foram. Os pontos verdes foram obtidos integrando-se as equações de movimento por dois períodos para o passado e indicam de onde esses pontos vieram.

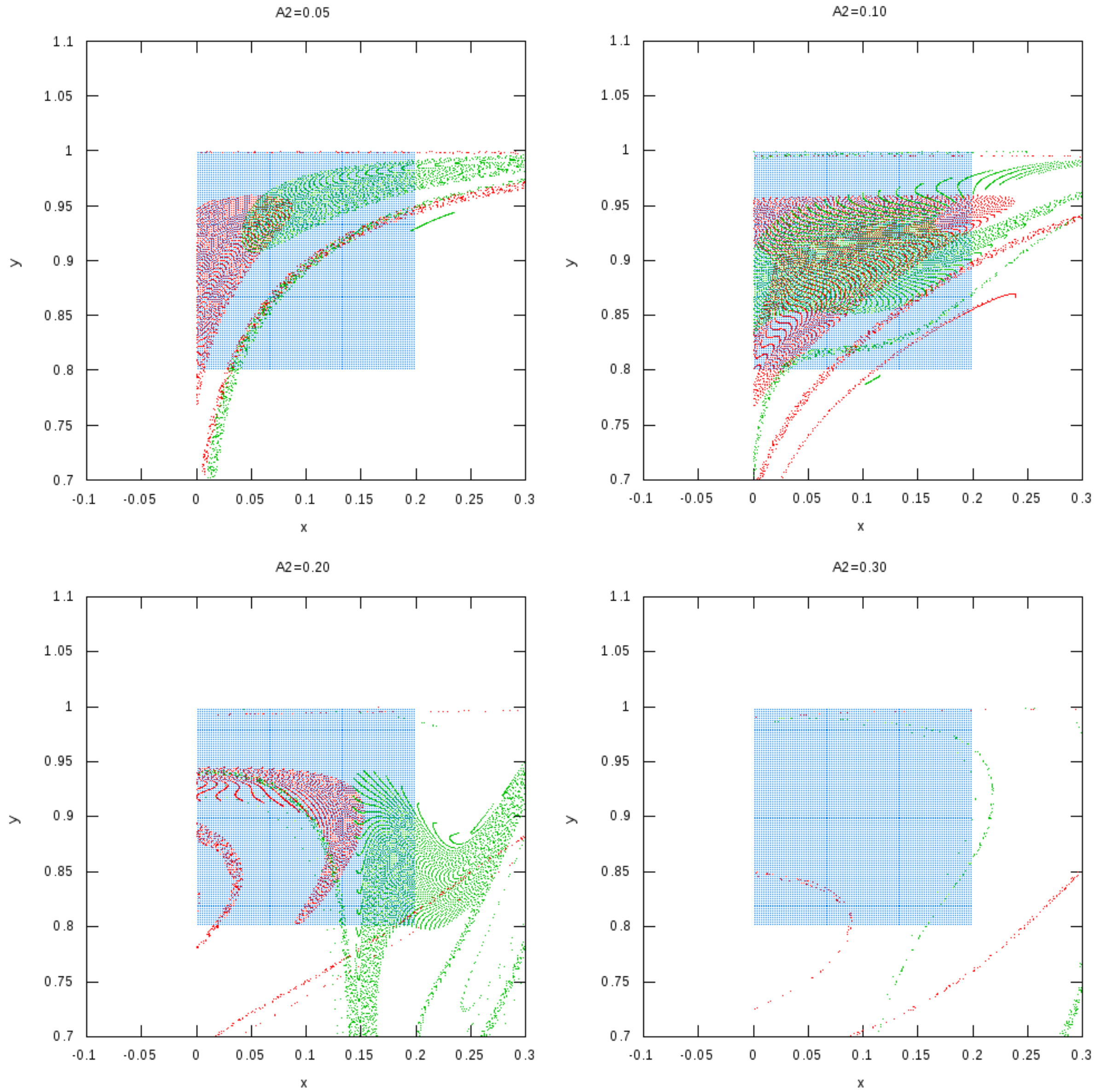

Figura 5.30: Zoom para a figura 5.29 em volta do jato. Um conjunto de condições iniciais foi colocado em azul nas proximidades do jato. Os pontos vermelhos foram obtidos integrando-se as equações de movimento por dois períodos para o futuro e indicam para onde essas trajetórias foram. Os pontos verdes foram obtidos integrando-se as equações de movimento por dois períodos para o passado e indicam de onde esses pontos vieram.

próximo de zero conforme o tempo de integração T é aumentado e as trajetórias de sua vizinhança também tem DR próximo de zero, podemos identificar que nessas regiões existem correntes de jato.

5.8.2 Diagrama de retorno

Utilizando a ideia da bacia de retorno, podemos definir o *deslocamento de retorno* (DR). Esse deslocamento de retorno mede a diferença entre a posição integrada para o futuro e a posição integrada para o passado corrigida pela velocidade do jato conforme a equação 5.4. Para cada condição inicial o valor de DR é apresentado como a escala de cores do diagrama. Dessa maneira, regiões escuras estão relacionadas com a presença de jatos.

Para um período de integração ($T = 1$), vemos na figura 5.31 e na figura 5.32 que existe uma região no espaço de fase onde o DR tem valores baixos. Em tais regiões as correntes de jato podem aparecer. Entretanto, como estamos observando o plano de fase por um tempo muito curto nenhuma conclusão pode ser tomada.

Aumentando o tempo de integração para $T = 2$ o cenário observado nas figuras 5.33 e 5.34 já começa a mudar. Nelas vemos que as regiões escuras começam a desaparecer onde não existem jatos.

É importante comparar a figura 5.34 com a 5.24. Aqui vemos que para o mesmo período de integração, o deslocamento de retorno da figura 5.34 já começa a se mostrar mais eficiente para identificar jatos.

Com o tempo de integração $T = 4$, já é possível dizer nas figuras 5.35 e 5.36 onde se localiza a corrente de jato.

Comparando ainda as figuras 5.36 com a 5.26 podemos ver que o deslocamento de retorno mostrado na figura 5.36 é muito mais claro em mostrar as corrente de jato do que o deslocamento médio da figura 5.26.

Finalmente, para $T = 40$, vemos na figura 5.37 cada uma das linhas de $DR = 0$ observada na figura 5.36 dá origem a uma corrente de jato. E novamente, comparando com a figura 5.27 o método utilizando o deslocamento de retorno (5.37) apresenta melhores resultados do que o método utilizando o deslocamento quadrático (5.27).

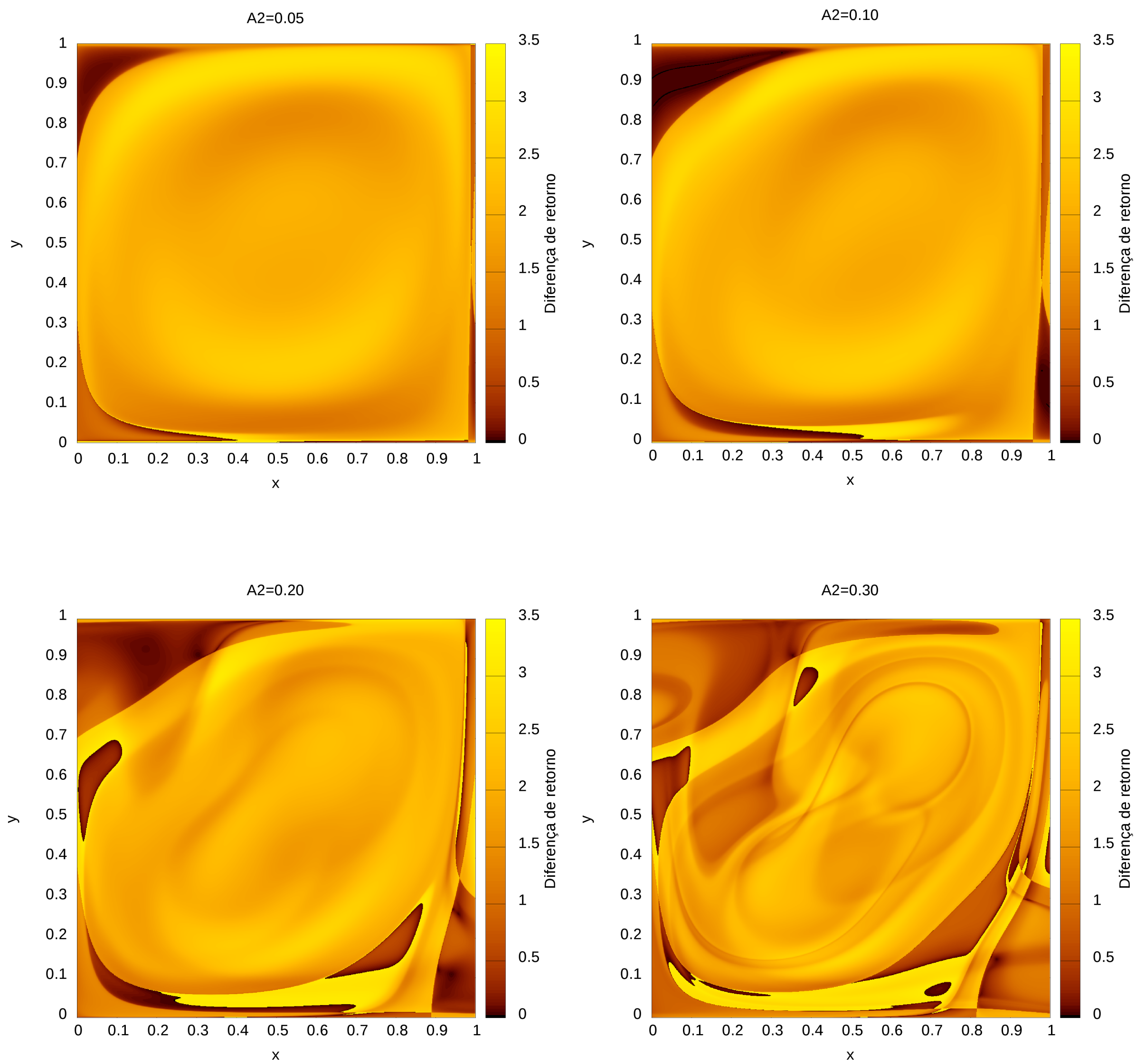

Figura 5.31: Diagrama de deslocamento de retorno para $T = 1$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

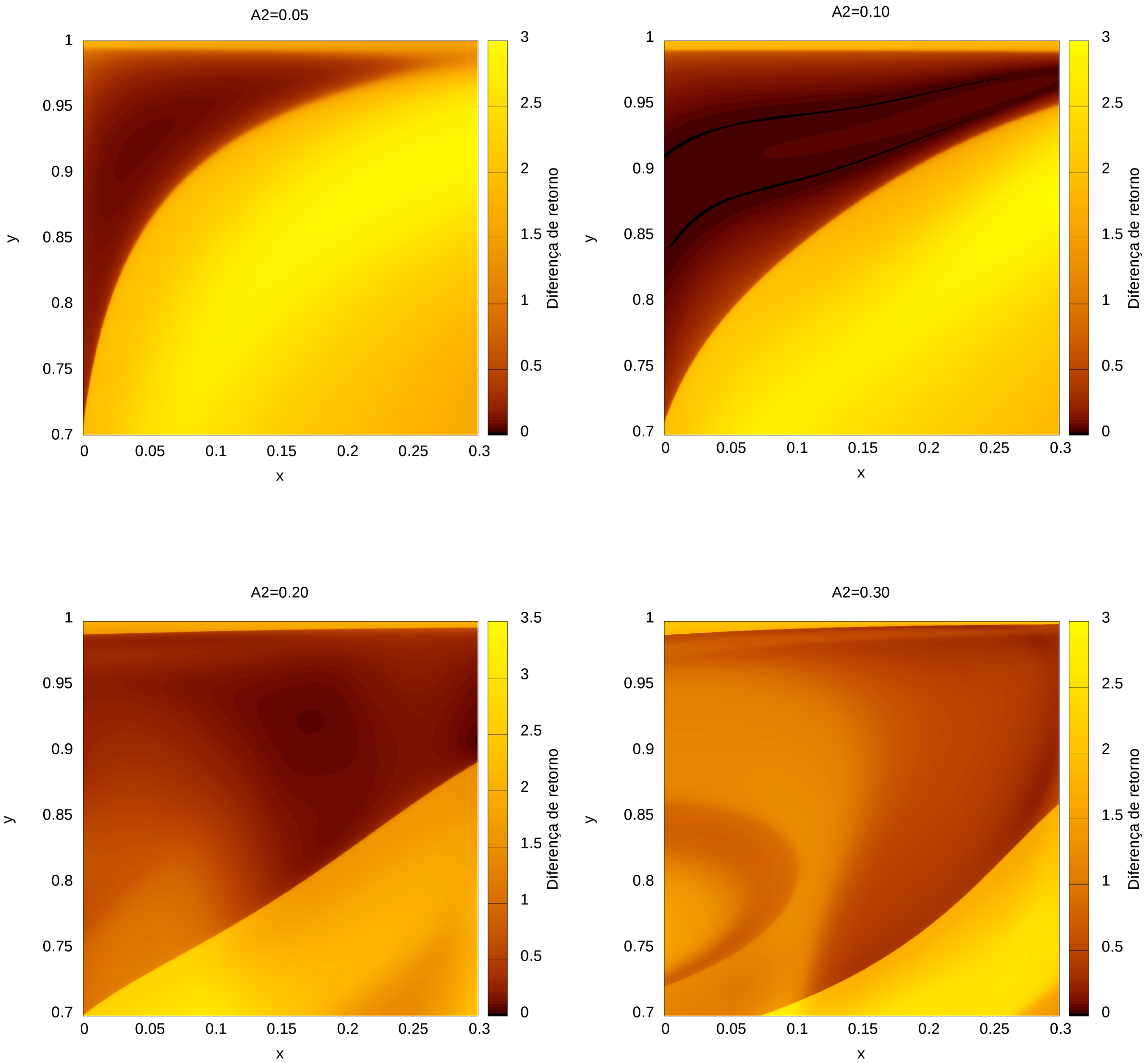

Figura 5.32: Ampliação do diagrama de deslocamento de retorno para $T = 1$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

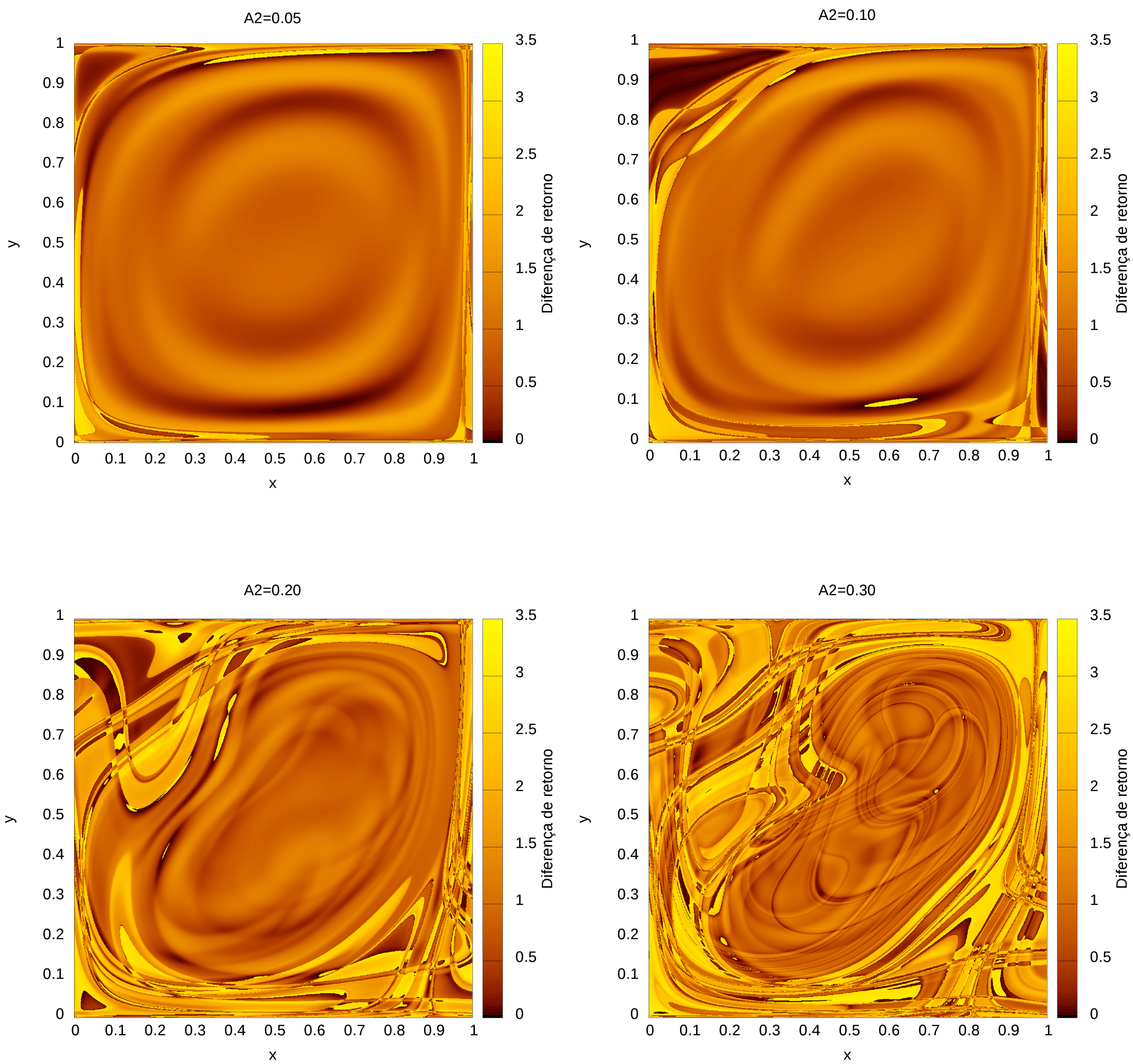

Figura 5.33: Diagrama de deslocamento de retorno para $T = 2$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

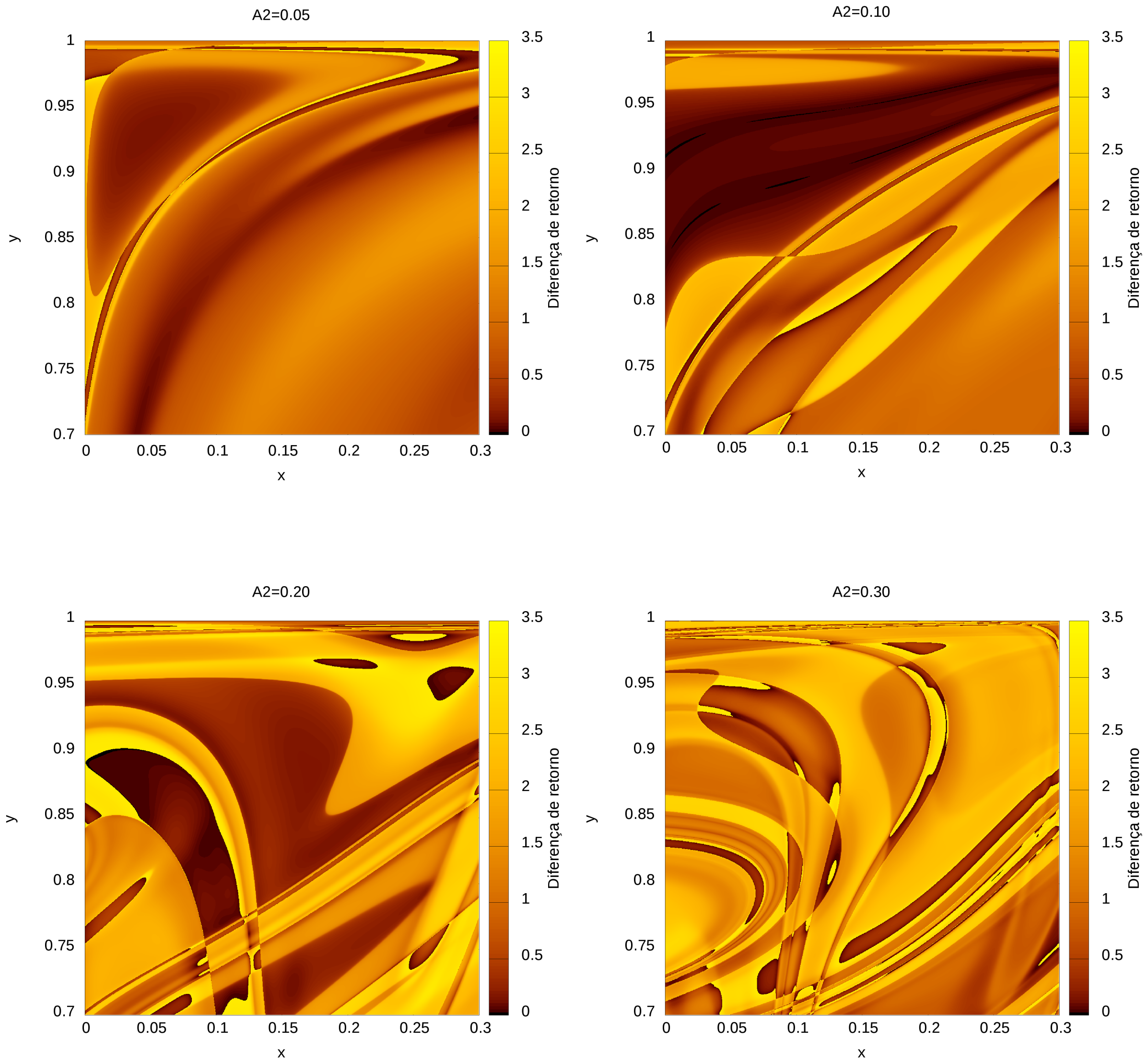

Figura 5.34: Ampliação do diagrama de deslocamento de retorno para $T = 2$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

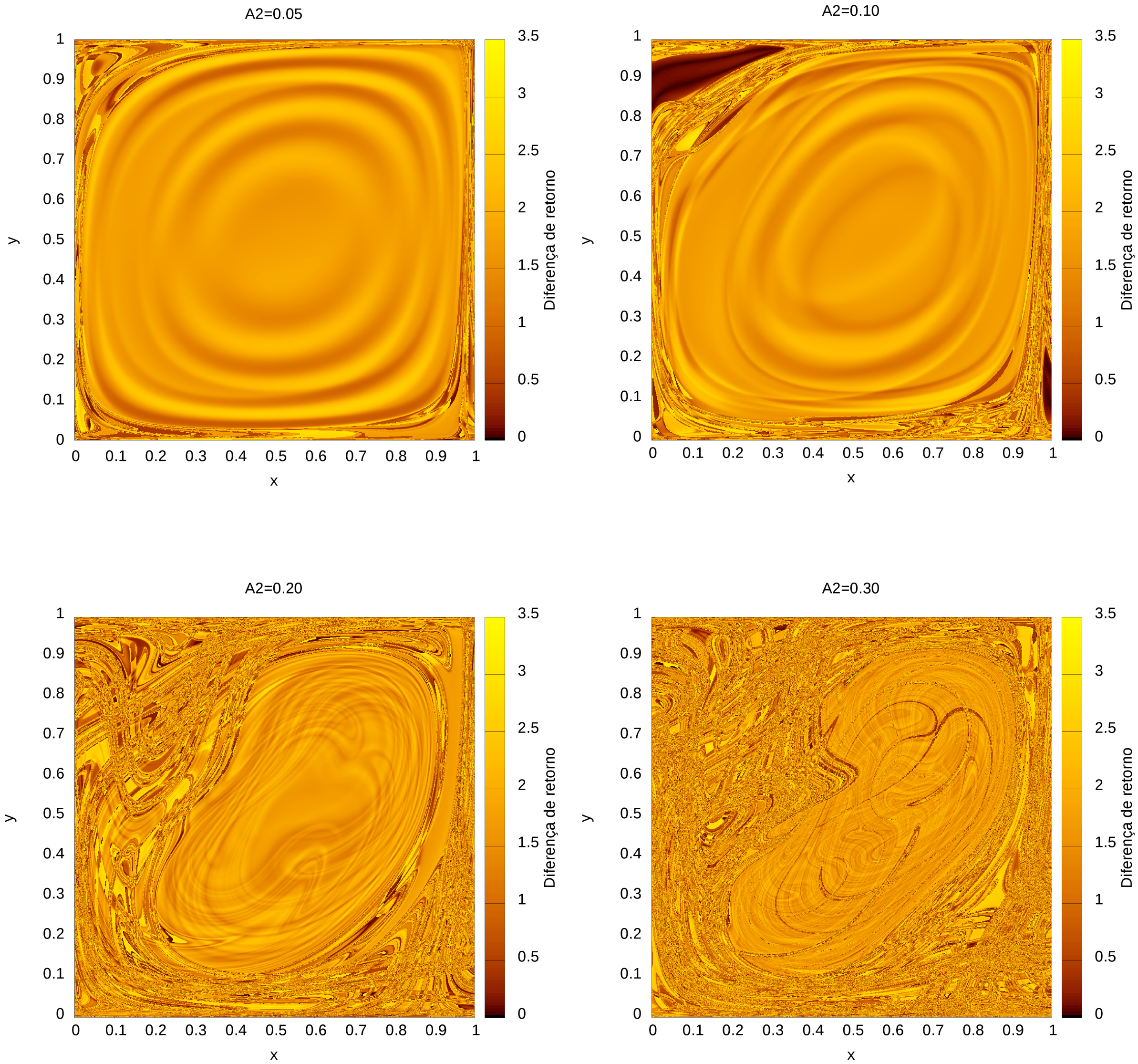

Figura 5.35: Diagrama de deslocamento de retorno para $T = 4$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

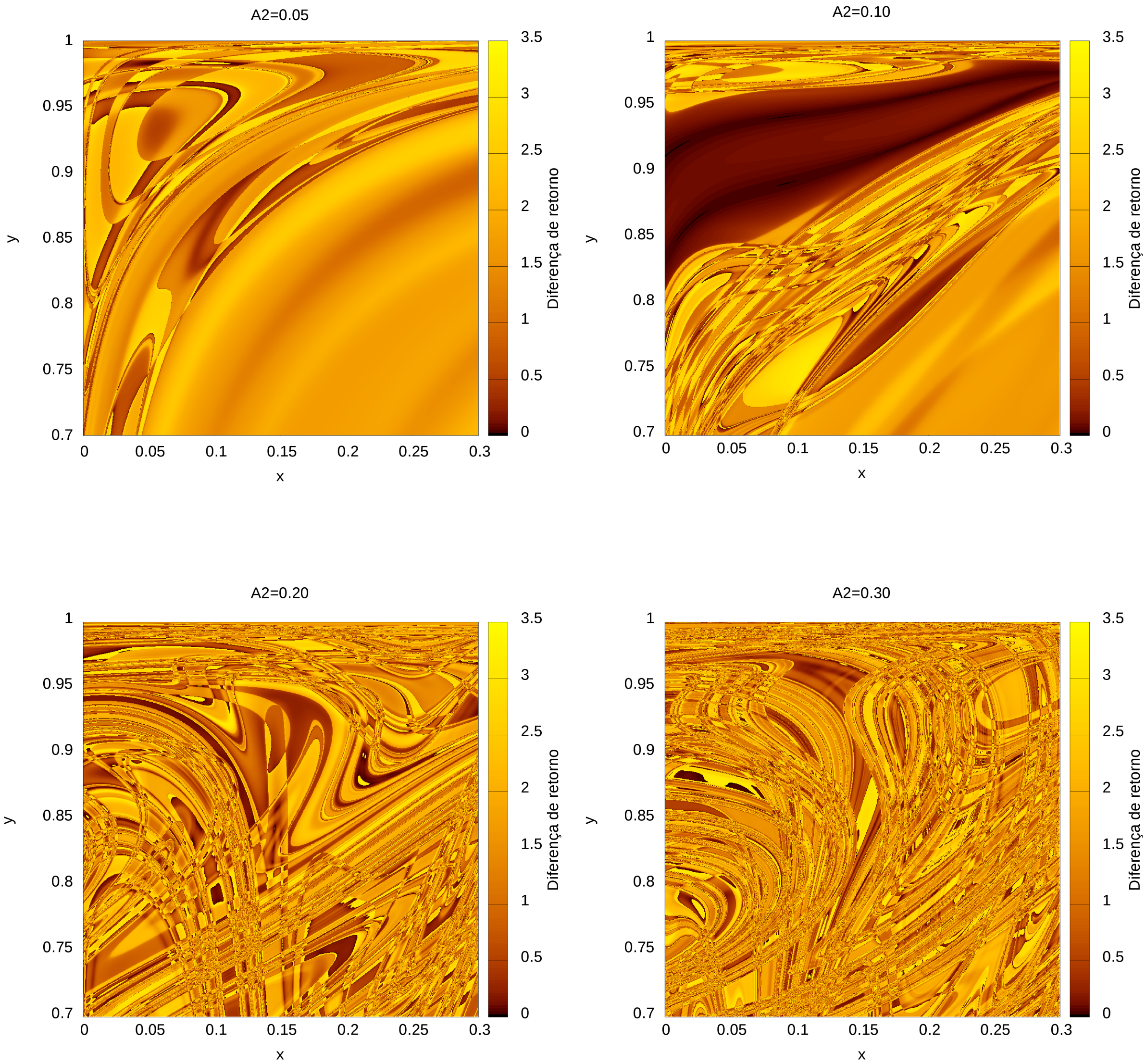

Figura 5.36: Ampliação do diagrama de deslocamento de retorno para $T = 4$ em volta da corrente de jato. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

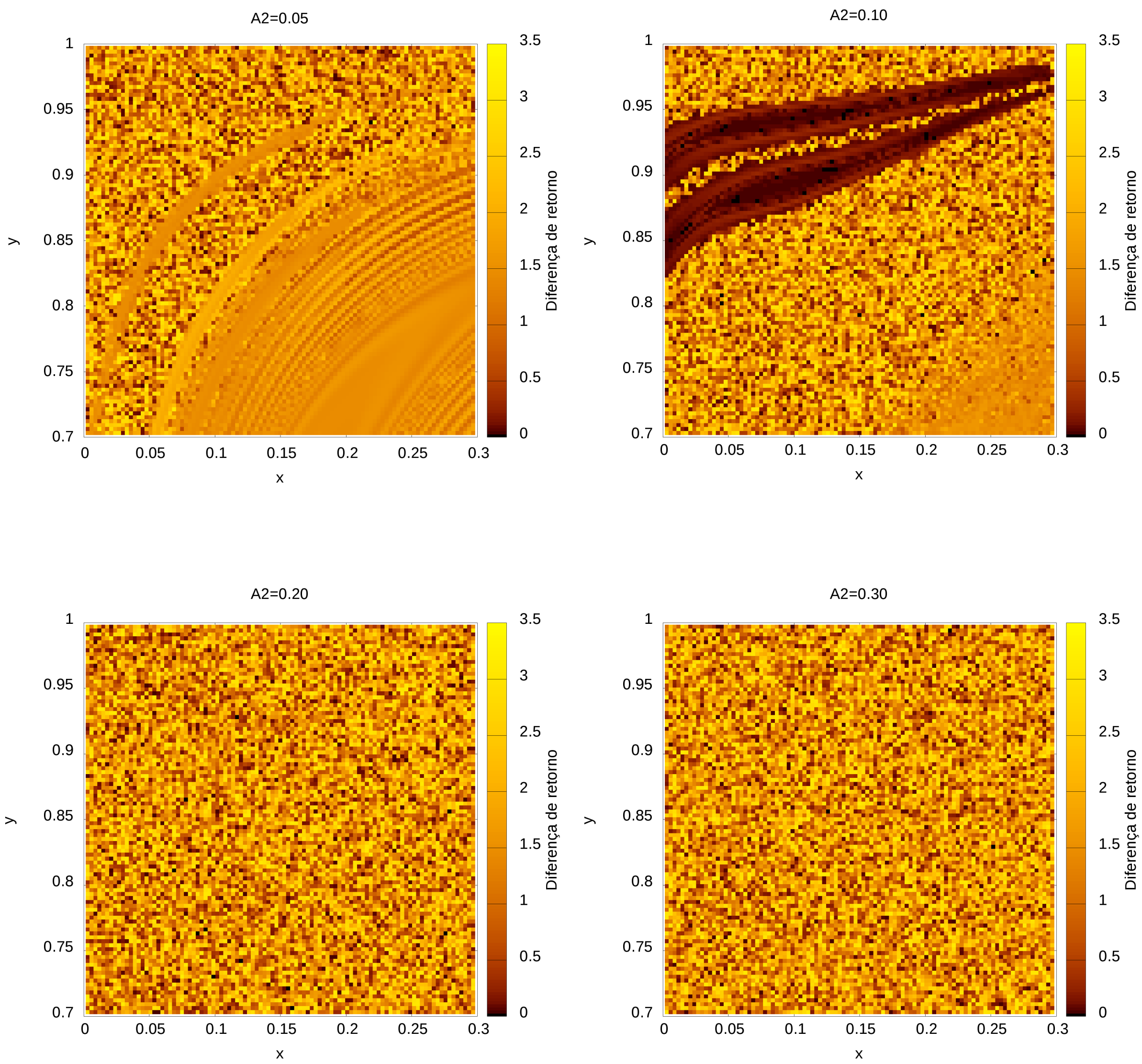

Figura 5.37: Diagrama de deslocamento de retorno para $T = 40$. Os eixos horizontal e vertical representam as condições iniciais em x e y e a escala de cores representa a diferença entre a posição da trajetória integrada para o futuro e para o passado.

5.9 Conclusões

Foi descoberto que nesse modelo, além das regiões caóticas e das ilhas periódicas, as correntes de jato também são muito importantes para o transporte. Quando elas existem no plano de fase mudam drasticamente o transporte caótico, uma vez que as trajetórias do mar caótico podem agora tanto ficar grudadas em ilhas quanto em correntes de jato. É importante ressaltar que, no modelo estudado, não é necessário adicionar nenhum termo para encontrar as correntes de jato, pois elas aparecem naturalmente no plano de fase devido a uma sincronização entre as duas ondas de deriva consideradas.

Quando as trajetórias estão aprisionadas em uma corrente de jato, elas se movem com velocidade constante e temos um transporte balístico ($\alpha = 2$) de partículas. Já quando essas partículas estão aprisionadas em uma ilha seu movimento se restringe ao interior de apenas uma célula e não temos transporte ($\alpha = 0$). Entretanto, partículas que estão na região caótica experimentam de tempos em tempos o grudamento em jatos e em ilhas, portanto, dependendo de quanto tempo ficam grudados em cada um desses elementos podemos ter transporte superdifusivo ($1 < \alpha < 1$) ou subdifusivo ($0 < \alpha < 1$).

Inicialmente foram utilizados três métodos combinados para tentar identificar as correntes de jato no plano de fase. Os três métodos consistiam em analisar os diagramas de Lyapunov, deslocamento quadrático médio e autocorrelação da velocidade. Cada um dos métodos representa um aspecto importante que deve ser levado em consideração para diferenciar ilhas, de correntes de jato e mar caótico.

O diagrama de Lyapunov nos dá a informação de onde estão as ELCs e, por consequência, como o plano de fase está dividido em regiões de comportamento distinto. Sendo assim, pode-se encontrar no plano de fase que regiões onde as ELCs não tem acesso são regulares, ou seja, podem ser jatos ou ilhas. Já as regiões onde é possível observar uma grande concentração de ELCs encontramos o mar caótico. Dessa maneira, vimos que tanto as correntes de jato como as ilhas estão envolvidas por ELCs, mas analisando somente os diagramas de Lyapunov não conseguimos diferenciar correntes de jato de ilhas.

Já o diagrama de deslocamento quadrático nos diz se um conjunto de trajetórias fica confinado ou se move muito através do plano de fase. Dessa maneira, conseguimos diferenciar possíveis regiões onde se encontram os jatos de regiões onde se encontram ilhas. Entretanto, não é possível dizer, analisando apenas o diagrama de deslocamento, se um conjunto de partículas com deslocamento alto vai permanecer junto por muito tempo (caracterizando um jato) ou se são apenas trajetórias caóticas que experimentam deslocamentos elevados seguidos de deslocamentos pequenos mais tarde.

Finalmente, o diagrama de autocorrelação da velocidade quantifica o quanto a velocidade em um determinado tempo influencia a velocidade em um tempo futuro. Com isso podemos, novamente, diferenciar regiões regulares de regiões caóticas, mas, além disso, é possível afirmar que essas regiões regulares permanecerão regulares por algum tempo suficientemente grande.

Combinando esses três métodos conseguimos identificar correntes jatos como regiões envolvidas por ELCs, com deslocamento elevado e com autocorrelação elevada; Ilhas como regiões envolvidas por ELCs, com deslocamento baixo e autocorrelação baixa; E finalmente o mar caótico como regiões povoadas por ELCs, com baixa autocorrelação e deslocamento quadrático intermediário.

Mesmo sendo uma metodologia satisfatória, combinar esses três diagramas não é uma maneira eficiente de se encontrar jatos, pois é preciso ter acesso a muita informação sobre as trajetórias durante todo o intervalo de tempo estudado. Para o Lyapunov é preciso de calcular a taxa de expansão local em torno de todas as trajetórias consideradas e para a autocorrelação da velocidade é preciso ter acesso a todas as velocidade em intervalos de tempo muito longos, por exemplo.

De maneira a usar o mínimo de dados possível com um custo computacional menor, foi desenvolvido um novo método para identificar jatos no plano de fase. Esse método consiste em encontrar regiões de mínimo no diagrama de retorno. Esse diagrama é construído com um número bem menor de dados em comparação aos outros três métodos, já que são computados apenas as posições finais para o futuro e para o passado de cada condição inicial. Com esse método é possível identificar as variedades instáveis e estáveis que se acumulam no mar caótico e, principalmente, as regiões que definem os jatos.

Utilizando o diagrama de retorno, conseguimos então encontrar onde ocorrem os jatos mesmo com simulações utilizando pouco tempo de integração. Além disso, foi possível também observar o esqueleto do caos formado pelas ELCs instáveis e estáveis no mar caótico. Entretanto, ainda são necessários mais estudos sobre as estruturas finas com deslocamento de retorno (DR) nulo que aparecem dentro dos jatos (figura 5.36, por exemplo) e de como essa estruturas se modificam com a variação dos parâmetros.

Finalmente, podemos concluir que, assim como as ilhas, as correntes de jato aparecem no plano de fase como regiões inacessíveis às ELCs. Dessa maneira, nenhuma trajetória caótica pode acessar uma corrente de jato, entretanto, devido ao acúmulo de ELCs ao redor das correntes de jato, uma trajetória caótica pode ficar por algum tempo aprisionada na vizinhança e consequentemente seguir tais correntes de jato pelo plano de fase por algum tempo. Logo, é possível afirmar que esse aprisionamento de trajetórias caóticas devido ao acúmulo de ELCs é o mecanismo que explica o transporte superdifusivo observado quando existem correntes de jato no plano de fase.

Capítulo 6

Difusão molecular nas ondas de deriva

6.1 Introdução

Nesse capítulo será considerada a difusão molecular das partícula através da inclusão de um ruído gaussiano. Esse ruído será inserido em cada trajetória como um "chute" de amplitude aleatória a um intervalo de tempo determinado. De maneira geral, veremos que a difusão molecular tende a uniformizar o espaço de fases, gerando um transporte difusivo. Entretanto, para ter-se o mesmo efeito quando existe no plano de fase uma corrente de jato, são necessários ruídos com amplitudes mais elevadas.

6.2 Modelo para simular a difusão molecular

Para simular a difusão molecular, serão resolvidas numericamente durante um intervalo de tempo Δt as equações de movimento dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{6.1}$$

onde a hamiltoniana é

$$H(x,y,t) = A_1 sin(k_{x1}(x))sin(k_{y1}y) + A_2 sin(k_{x2}(x-ut))sin(k_{y2}y). \tag{6.2}$$

Depois de passado esse intervalo de tempo Δt, é inserido um chute aleatório de tamanho $\sqrt{2r\Delta t}\xi(t)$ ([12]) na direção x, de forma que:

$$\begin{cases} x_{novo}(t) = x_{velho}(t) + \sqrt{2r\Delta t}\xi(t) \\ y_{novo}(t) = y_{velho}(t) \end{cases} \tag{6.3}$$

onde $\xi(t)$ é um número sorteado aleatoriamente em distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão unitário e r é um parâmetro proporcional ao tamanho do ruído.

6.3 Efeitos da difusão molecular

Para estudar quanto esses jatos conseguem aprisionar partículas e portanto interferir no transporte, foram feitas simulações numéricas para 40 trajetórias inicialmente colocadas dentro de uma corrente de jato, portanto $A_2 = 0.10$, com uma pequena difusão molecular que será aumentada gradativamente.

Na figura 6.1 está mostrada a simulação para $r = 10^{-6}$. Nela é possível ver que depois de $t \approx 1500$ todas as partículas escapam da corrente de jato, entretanto é possível ver também que grande parte das partículas eventualmente volta para a corrente de jato e permanecem nele por algum tempo. Sendo assim, com $r = 10^{-6}$ a contribuição da corrente de jato ainda é muito importante para o transporte e é esperado que esse transporte seja superdifusivo.

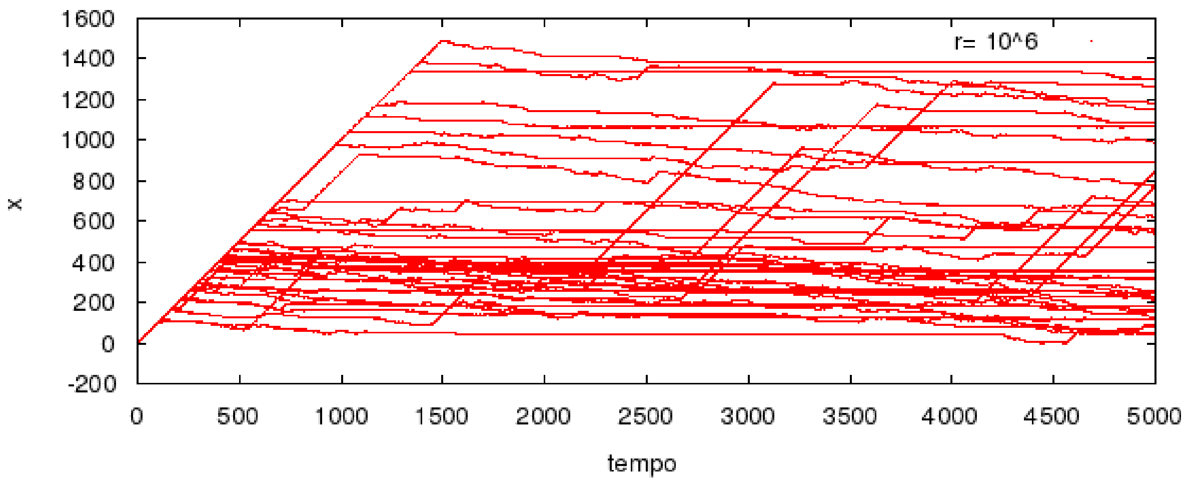

Figura 6.1: Posição em x em função do tempo para as trajetórias inicialmente dentro de uma corrente de jato com $r = 10^{-6}$ e $A_2 = 0.10$.

Quando a difusão molecular é aumentada para $r = 10^{-5}$, vemos na figura 6.2 que as partículas ficam menos tempo dentro dos jatos. Nessa simulação depois de $t \approx 500$ todas as partículas já haviam deixado o jato e poucas delas retornam. Esses retornos aos jatos ou a entrada em ilhas geram as elevações na autocorrelação da velocidade que veremos adiante. Entretanto, ainda existe influencia dos jatos no transporte, portanto ainda espera-se que o transporte seja superdifusivo.

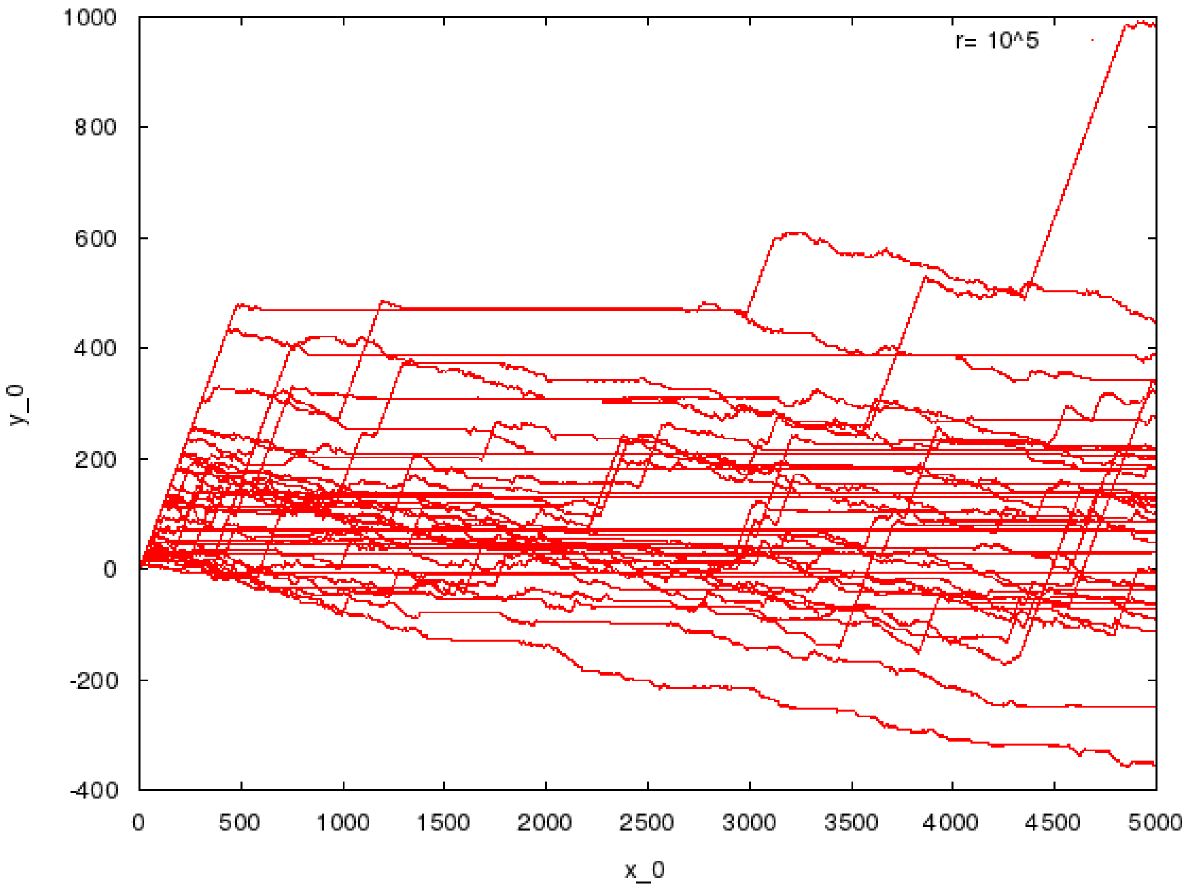

Figura 6.2: Posição em x em função do tempo para as trajetórias inicialmente dentro de uma corrente de jato com $r = 10^{-5}$ e $A_2 = 0.10$.

Aumentando a difusão molecular para $r = 10^{-3}$ é possível ver na figura 6.3 que as partículas são rapidamente ejetadas da corrente de jato e que raramente retornam a ela. Com essa configuração o transporte é praticamente simétrico na direção x, e não é possível encontrar trajetórias que ficam aprisionadas em ilhas ou correntes de jato por longos intervalos de tempo. Sendo assim é esperado que o transporte seja difusivo.

Lembrando da diferença de tamanho entre as ilhas e os jatos (figura 5.2), espera-se que uma partícula executando um movimento aleatório no plano de fases tem maior chance de ficar aprisionada em uma ilha do que em uma corrente de jato. Por esse motivo na figura 6.3 vemos que a quantidade de trajetórias seguindo uma ilha é maior do que a quantidade de trajetórias seguindo uma corrente de jato.

Dessa maneira, vimos que quando a difusão molecular é muito alta as partículas não ficam mais grudadas nos jatos ou ilhas por muito tempo e o transporte se assemelha a

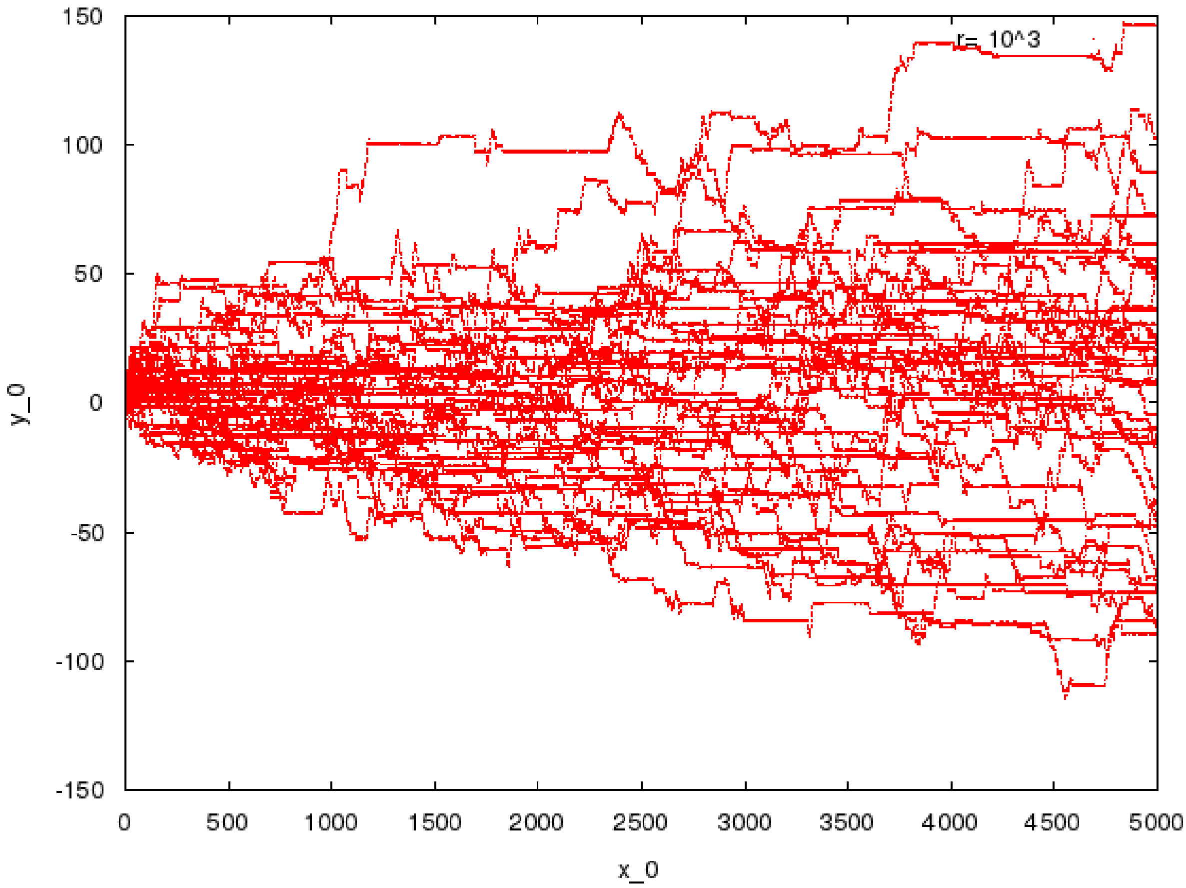

Figura 6.3: Posição em x em função do tempo para as trajetórias inicialmente dentro de uma corrente de jato com $r = 10^{-}3$ e $A_2 = 0.10$. É importante notar a drástica mudança na escala vertical que representa uma grande diminuição no transporte de partículas.

um passeio aleatório. Veremos agora o que acontece com a autocorrelação da velocidade (VAF) comparando o caso com jato ($A_2 = 0.10$) com o caso sem jato ($A_2 = 0.20$). Em todos os gráficos de VAF em função do atraso (Lag) iremos comparar a oscilação da autocorrelação com o banda de confiança ($\frac{2}{\sqrt{N}}$), onde N é o número de interações [40]. Tal banda de confiança é usada para testar aleatoriedade de um conjunto de dados.

Para $A_2 = 0.10$ com $r = 10^{-5}$ a autocorrelação mostrada na figura 6.4 é alta para valores de *lag* inferiores a 3500, apresentando algumas oscilações. Tais oscilações estão relacionadas com a troca de regime que as trajetórias estão. Quando a autocorrelação tem amplitude alta as partículas estão em ilhas ou jatos e quando a autocorrelação é baixa as estão no mar caótico.

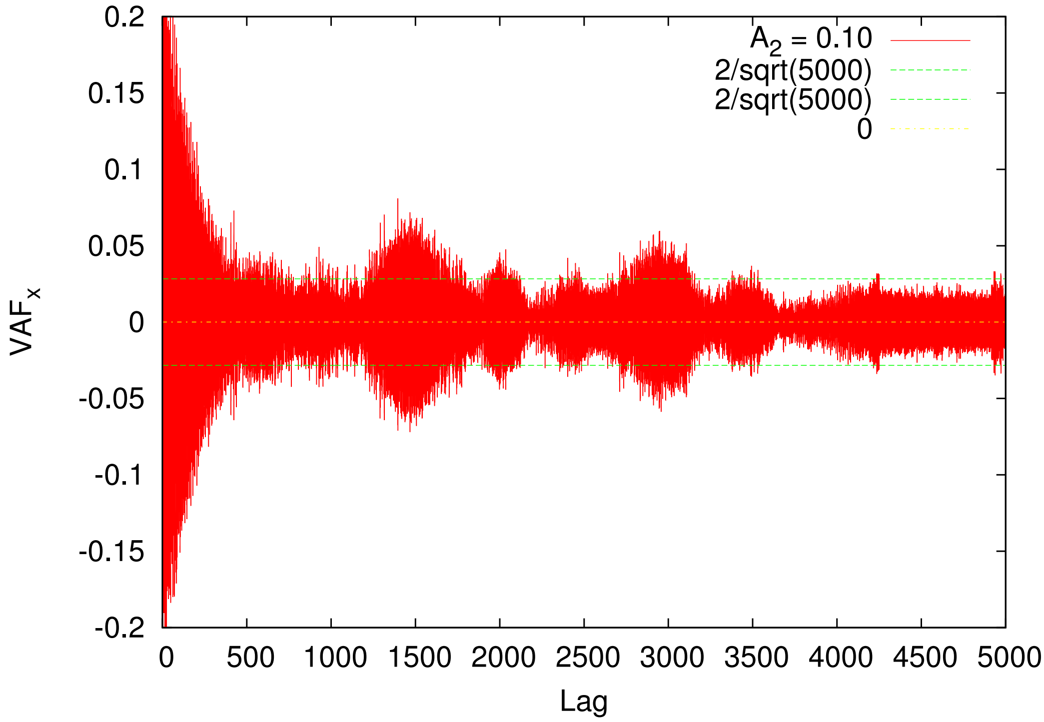

Figura 6.4: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (Lag) para $A_2 = 0.10$ e $r = 10^{-5}$. A banda de confiança usada é $\frac{2}{\sqrt{5000}}$.

Como referência, quando não existe corrente de jato ($A_2 = 0.20$) a autocorrelação, nas figuras 6.5 e 6.7, permanece com valores inferiores à banda de confiança.

Quanto r atinge valores suficientemente grandes a autocorrelação da figura 6.6 passa a apresentar valores inferiores à banda de confiança. Esse fato é esperado pois na figura 6.3 as trajetórias não permanecem na corrente de jato por muito tempo, mas passeiam aleatoriamente na direção x. Sendo assim, é possível afirmar que a difusão molecular (r) tem a função fundamental de "apagar" a memória da trajetória, tornando seu movimento

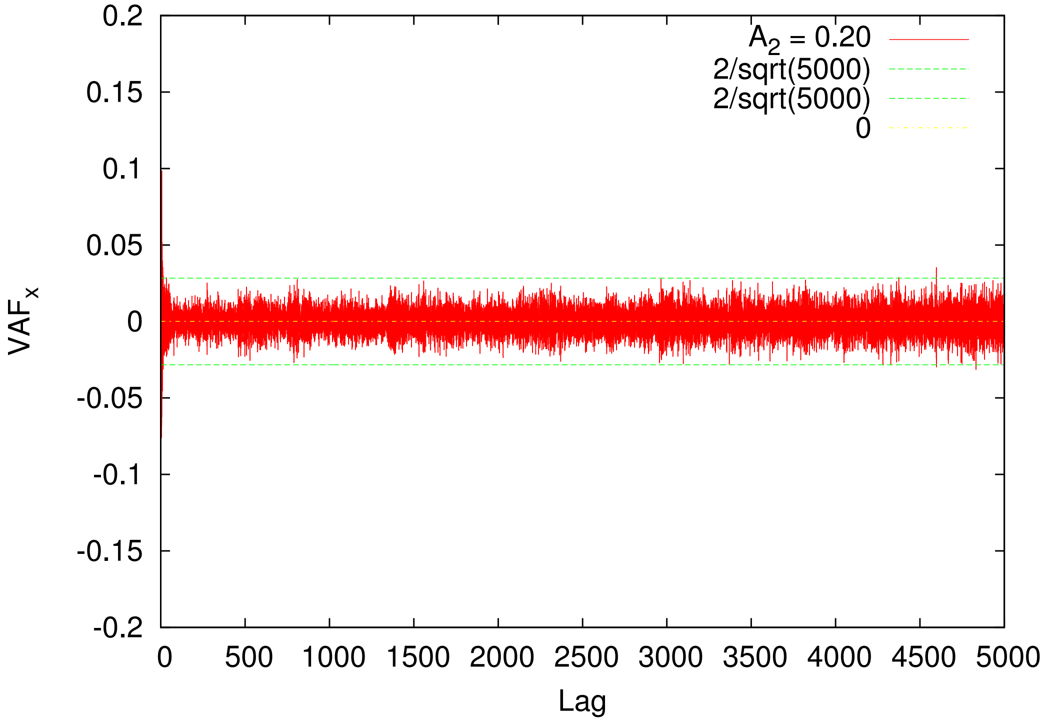

Figura 6.5: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (*Lag*) para $A_2 = 0.20$ e $r = 10^{-5}$. A banda de confiança usada é $\frac{2}{\sqrt{5000}}$.

similar a um movimento aleatório.

A fim de visualizar como as partículas saem dos jatos devido à presença de difusão molecular, faremos alguns diagramas de deslocamento mostrados nas figuras 6.8 e 6.9 para $r = 10^{-5}$ e $r = 10^{-3}$ respectivamente.

Essas figuras mostram apenas que as trajetórias inicialmente dentro de uma corrente de jato podem sair dela, mas é importante lembrar que a corrente de jato ainda existe e, de acordo com a figura 6.2, ainda é possível que as trajetórias voltem à corrente de jato. Entretanto, a probabilidade de retornar diminui a medida que a difusão molecular (r) aumenta.

Sendo assim, verificamos que a difusão molecular tende a dissolver os jatos e as ilhas, tornando o plano de fase mais homogêneo. Dessa maneira, quanto maior a difusão molecular, mais próximo do movimento aleatório estarão as trajetórias e menos voos de longa duração serão observados.

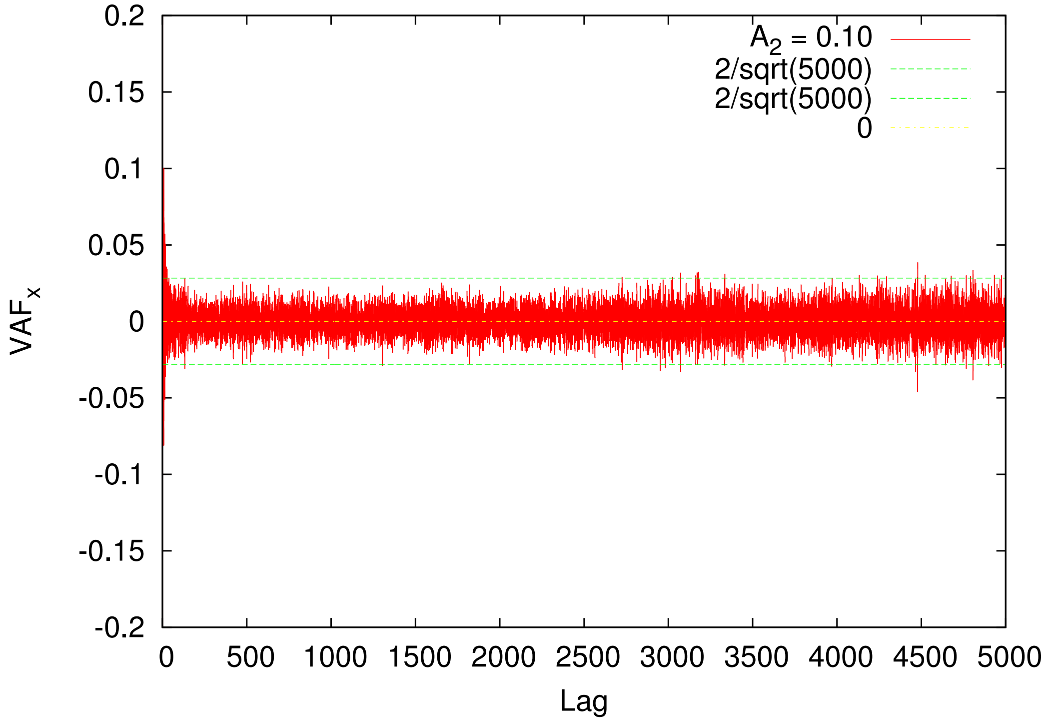

Figura 6.6: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (*Lag*) para $A_2 = 0.10$ e $r = 10^{-3}$. A banda de confiança usada é $\frac{2}{\sqrt{5000}}$.

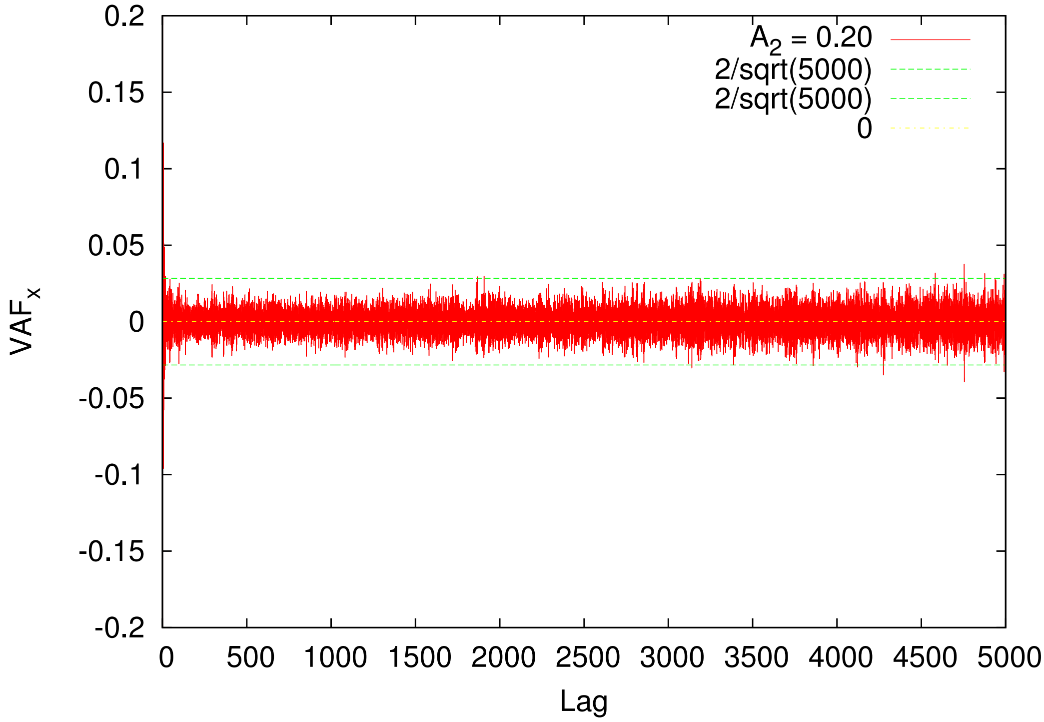

Figura 6.7: Autocorrelação da velocidade em função do atraso (*Lag*) para $A_2 = 0.20$ e $r = 10^{-3}$. A banda de confiança usada é $\frac{2}{\sqrt{5000}}$.

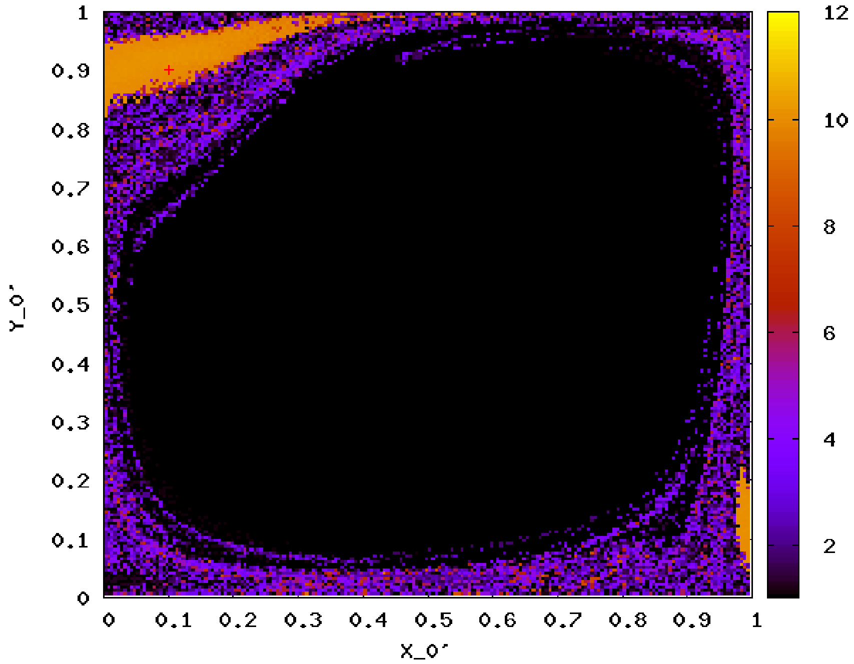

Figura 6.8: Diagrama de deslocamento para $T = 10$ com $r = 10^{-5}$ e $A_2 = 0.10$.

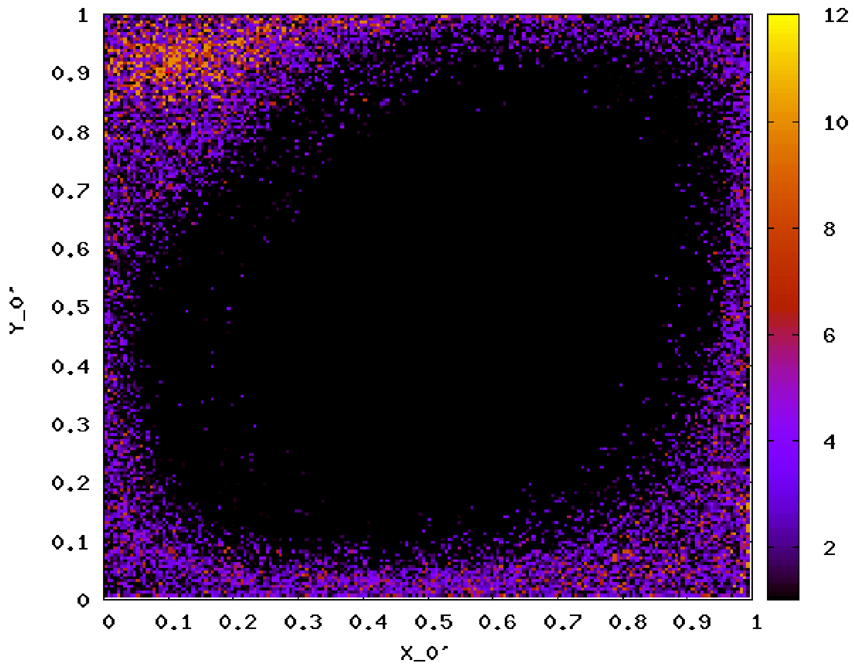

Figura 6.9: Diagrama de deslocamento para $T = 10$ com $r = 10^{-3}$ e $A_2 = 0.10$.

6.4 Conclusões

Quando a difusão molecular é incluída vimos que o transporte de partículas tende a ser homogêneo no plano de fases e passa ter um comportamento difusivo. Entretanto, quando existem correntes de jato no plano de fase, esse comportamento difusivo é obtido apenas para valores de difusão molecular bem mais elevados do que os necessários para quando não existem correntes de jato. Foi observado também que, quando a difusão molecular é considerada, além das trajetórias caóticas, as trajetórias inicialmente dentro de correntes de jato ou ilhas podem trocar de regime. Sendo esse um dos principais fatores que modificam a autocorrelação da velocidade e consequentemente o transporte total de partículas.

Capítulo 7

Conclusões finais

Nessa tese foi estudado o transporte de partículas na borda do plasma confinado magneticamente em tokamaks a partir de um modelo para ondas de deriva proveniente de flutuações eletrostáticas geradas pela não uniformidade do plasma. Foi observado que, nesse modelo, o transporte de partículas que surge devido às trajetórias caóticas é, de maneira geral, subdifusivo ($\alpha < 1$) devido à presença de ilhas no plano de fase. Entretanto, para determinados parâmetros, surgem correntes de jato e o transporte caótico se torna superdifusivo ($\alpha > 1$).

No capítulo 4 foi apresentado um resumo desse modelo das ondas de deriva utilizado para o estudo do transporte de partículas. Além disso, nesse capítulo foi possível verificar que para que exista transporte de partículas devem existir trajetórias caóticas no plano de fase. Quando apenas uma onda é considerada, as trajetórias são regulares, todas as partículas ficam confinadas em suas células iniciais e o transporte é nulo. Sendo assim, para que haja transporte de partículas entre células é necessário considerar pelo menos duas ondas de deriva com velocidades de fase diferente.

Analisando a distribuição dos saltos, pode-se verificar que para baixas amplitudes da segunda onda a maioria dos saltos tem o tamanho da célula, pois a região caótica se restringe às proximidades das separatrizes do sistema com apenas uma onda, assim as partículas pulam de uma célula para outra seguindo trajetórias caóticas que se assemelham às linhas verticais e horizontais que definem as separatrizes das células.

Conforme a amplitude da segunda onda é aumentada, foi verificado que a distribuição dos saltos, que apresentava picos nas extremidades, passa a apresentar picos em torno de zero para $A_2 = 0.3$ tanto na direção de propagação da onda de deriva quanto na direção transversal. Entretanto, observamos que o caso racional apresenta uma assimetria nessa distribuição mesmo para valores de $A_2 < 0.3$, enquanto o caso irracional apresenta assimetria somente para valores de $A_2 > 0.3$.

Essa assimetria observada no caso racional surge devido à presença de correntes de jato que caminham na mesma direção de propagação da segunda onda. Essas correntes surgem apenas para uma determinada combinação de parâmetros de ondas e seus efeitos no transporte foram examinadas com mais detalhes no capítulo 5.

Ainda sobre o capítulo 4, quando a dispersão média e a dispersão relativa em função do tempo é analisada, encontramos que quando não existe jato o transporte se comporta de maneira muito próxima ao transporte difusivo, sendo fracamente subdifusivo. Essa pequena diferença em relação ao transporte difusivo se dá devido ao aprisionamento de partículas em ilhas remanescentes. Já quando existem correntes de jato a dispersão média e a dispersão relativa apresentam um coeficiente maior que um, indicando que o jato é responsável por separar as partículas de maneira mais rápida que um passeio aleatório.

Em resumo, vimos no capítulo 4 que as correntes de jato são estruturas que surgem e modificam consideravelmente o transporte de partículas e isso fica visível quando analisamos a distribuição dos saltos e a série temporal da dispersões média e relativa. Portanto, entender melhor como surgem tais correntes de jato é de grande importância para explicar como o transporte de partículas ocorre nesse modelo.

No capítulo 5 investigamos o aparecimento de correntes de jato no mar caótico. Foi mostrado nesse capítulo que as correntes de jato mudam drasticamente o transporte caótico, uma vez que as partículas que estão na região caótica experimentam de tempos em tempos o grudamento tanto nas ilhas como nas correntes de jato e, dependendo de quando tempo ficam grudados em cada elemento, podemos ter transporte superdifusivo ou subdifusivo.

Ainda no capítulo 5, foram utilizados três métodos combinados para tentar identificar as correntes de jato no plano de fase. Os três métodos consistiam em analisar os diagramas de Lyapunov, deslocamento quadrático médio e autocorrelação da velocidade. Cada um dos métodos representa um aspecto importante que deve ser levado em consideração para diferenciar ilhas, de correntes de jato e mar caótico. O diagrama de Lyapunov nos dá a informação de onde estão as ELCs, o diagrama de deslocamento quadrático nos diz se um conjunto de trajetórias fica confinado ou se move muito através do plano de fase e o diagrama de autocorrelação da velocidade quantifica o quanto a velocidade em um determinado tempo influencia a velocidade em um tempo futuro.

Combinando os três métodos citados, conseguimos identificar correntes de jato como regiões envolvidas por ELCs, com deslocamento elevado e com autocorrelação elevada; Ilhas como regiões envolvidas por ELCs, com deslocamento baixo e autocorrelação baixa; e finalmente o mar caótico como regiões povoadas por ELCs, com baixa autocorrelação e deslocamento quadrático intermediário.

De maneira a usar o mínimo de dados possível com um custo computacional menor, foi desenvolvido um novo método para identificar jatos no plano de fase. Esse método consistiu em encontrar regiões de mínimo no diagrama de retorno. Com esse método é possível identificar as variedades instáveis e estáveis que se acumulam no mar caótico e, principalmente, as regiões que definem os jatos.

Utilizando o diagrama de retorno, conseguimos então encontrar onde ocorrem os jatos utilizando menos tempo de integração e com menos dados do que para os três métodos anteriores. Além disso, foi possível também observar as ELCs instáveis e estáveis no mar caótico. Entretanto, ainda são necessários mais estudos sobre as estruturas finas que aparecem dentro dos jatos e de como essa estruturas se modificam com a variação dos parâmetros.

Concluímos então no capítulo 5 que, assim como as ilhas, as correntes de jato aparecem no plano de fase como regiões inacessíveis às ELCs. Dessa maneira, nenhuma trajetória caótica pode acessar uma corrente de jato, entretanto, devido ao acúmulo de ELCs ao redor das correntes de jato, uma trajetória caótica pode ficar por algum tempo aprisionada na vizinhança e consequentemente seguir tais correntes de jato pelo plano de fase por algum tempo. Logo, é possível afirmar que esse aprisionamento de trajetórias caóticas devido ao acúmulo de ELCs é o mecanismo que explica o transporte superdifusivo observado quando existem correntes de jato no plano de fase.

Finalmente, no capítulo 6, vimos que quando é inserida a difusão molecular, partículas tendem a ser ejetadas de dentro das correntes de jato e ilhas. Além disso, o tempo que as trajetórias caóticas ficam aprisionadas tanto em jatos quanto em ilhas diminui, suprimindo tanto o transporte superdifusivo gerado pelas correntes de jato quanto o transporte subdifusivo gerado pelas ilhas. Sendo assim concluímos que quando a difusão molecular é incluída o transporte de partículas tende a ser homogêneo no plano de fases e passa ter um comportamento difusivo.

7.1 Perspectivas futuras

Algumas questões ainda permanecem em aberto e podem ser utilizadas para trabalhos futuros, dentre elas se destacam as seguintes questões.

No decorrer dessa tese vimos que o espaço de fase é dividido em três regiões: ilhas, correntes de jato e mar caótico, variando-se os parâmetros vimos que é possível modificar a áreas desses elementos. Uma importante questão que deve ser respondida é se existe uma relação entre a área em que cada um desses elementos ocupa o coeficiente de transporte.

No capítulo 5, na figura 5.36, por exemplo, são encontradas linhas aparentemente contínuas onde o deslocamento de retorno é nulo ($DR = 0$). Qual o significado das linhas pretas nesse diagrama? O que esperar de tais linhas a medida que variam-se os parâmetros?

Quando a difusão molecular é considerada, no capítulo 6, o que esperar do diagrama de retorno? E se calcularmos o tempo que cada trajetória demora para escapar dos jatos e construirmos um diagrama de tempo de retorno, qual a relação entre o diagrama utilizando o tempo de retorno com o diagrama do diagrama de retorno?

Bibliografia

[1] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa, B. Gonçalves. Fluctuations, sheared radial eletric fields and transport interplay in fusion plasmas. New Journal of Physics 4, 51 (2002).

[2] W. Horton. Onset of stochasticity and the diffusion approximation in drift waves. Plasma Physics and Controlled Fusion 27, 937 (1985).

[3] R. G. Kleva, J. F. Drake. Stochastic $\vec{E} \times \vec{B}$ particle transport. Physics of Fluids 27, 1686 (1984).

[4] F. J. Beron-Vera, M. J. Olascoaga, M. G. Brown, H. Koçak, I. I. Rypina. Invariant-tori-like Lagrangian coherent structuries in geophysical flows. Chaos 20, 017514 (2010).

[5] G. Haller and G. Yuan. Lagrangian Coherent Structures and Mixing in Two-Dimensional Turbulence. Physica D, 147, 352 (2000).

[6] R. O. Suigh. Transporte Caótico Causado por Ondas de Deriva. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da USP (2010).

[7] J. D. Szezech, Jr., I. L. Caldas, S. R. Lopes, P. J. Morrison, R. L. Viana. Effective transport barriers in nontwist systems. Phys. Rev. E 86, 036206 (2012).

[8] E. Fermi. On the Origin of the Cosmic Radiation. Phys. Rev. 75, 1169 (1949).

[9] E. D. Leonel. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. Chaos (Woodbury), 19, 33142 (2009).

[10] R. Egydio de Carvalho, F. C. Souza, E. D. Leonel. Fermi acceleration on the annular billiard. Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. v. 73, n.6, p. 66229 (2006).

[11] G. Boffetta and I. M. Sokolov. Statistics of two-particle dispersion in two-dimensional turbulence. Physics of Fluids 14, 3224 (2002).

[12] P. S. Addison. Fractals and Chaos: An illustrated course. Cap 4. IoP Publishing (1997).

[13] R. Metzler, J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. J. Phys. A: Math. Gen. 37 R161–R208 (2004).

[14] R. Metzler, J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Physics Reports 339, 1-78 (2000).

[15] I. M. Sokolov, J. Klafter, A. Blumen. Fractional Kinetics. Physics Today 55, 48-54 (2002).

[16] S. R. A. Salinas. Introdução a Física Estatística. Editora Universidade de São Paulo (1997).

[17] M. Mitzenmacher. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. Internet Math. 1, pp. 226–251 (2004).

[18] M. E. J. Newman. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. Contemp. Phy. 46, pp. 323–351 (2005).

[19] D. Sornette. Critical Phenomena in Natural Sciences 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin (2006).

[20] K. Christensen, L. Danon, T. Scanlon, P. Bak. Unified scaling law for earthquakes. PNAS February 19, vol. 99, no. Suppl 1, 2509-2513 (2002).

[21] J. D. Szezech Jr., S. R. Lopes, R. L. Viana. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems. Physics Letters. A, v. 335, p. 394-401 (2005).

[22] J. Klafter, M. F. Shlesinger, G. Zumofen. Beyond Brownian Motion. Physics Today 49, 33-39 (1996)

[23] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications. John Wiley and Sons (1950).

[24] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. Chaos: An introduction to dynamical systems. Springer (1997).

[25] S. C. Shadden, F. Lekien, J. E. Marsden. Definition and properties of Lagrangian coherent structures fromfinite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. Physica D 212(3-4), 271-304, (2005).

[26] M. A. Green, C.W. Rowley, G. Haller. Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 572, 111-120 (2007).

[27] G. A. Voth, G. Haller, J. P. Gollub. Experimental Measurements of Stretching Fields in Fluid Mixing. Phys. Rev. Lett. 88, 254501 (2002).

[28] T. H. Solomon, B. R. Wallace, N. S. Miller, C. J. L. Spohn. Lagrangian chaos and multiphase processes in vortex flows. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 8, 239–252 (2003).

[29] M. Sandulescu, C. Lopez, E. Hernandez-Garcia, U. Feudel. Plankton blooms in vortices: The role of biological and hydrodynamic timescales. Nonlinear Proc. Geoph. 14, 443-454 (2007).

[30] M. J. Olascoaga, F. J. Beron-Vera, L. E. Brand, H. Kocak. Tracing the early development of harmful algal blooms on the West Florida Shelf with the aid of Lagrangian coherent structures. J. Geophys. Res., 113, C12014 (2008).

[31] W. Tang, P. W. Chan, G. Haller. Accurate extraction of Lagrangian coherent structures over finite domains with application to flight data analysis over Hong Kong International Airport. Chaos 20, 017502 (2010).

[32] K. Padberg, T. Hau, F. Jenko, O. Junge. Lagrangian structures and transport in turbulent magnetized plasmas. New J. Phys. 9, 400 (2007).

[33] D. Borgogno, D. Grasso, F. Pegoraro, T. J. Schep. Barriers in the transition to global chaos in collisionless magnetic reconnection. I. Ridges of the finite time Lyapunov exponent field. Phys. Plasmas 18, 102307 (2011).

[34] X. Leoncini, O. Agullo, M. Muraglia, C. Chandre. From chaos of lines to Lagrangian structures in flux conservative fields. Eur. Phys. J. B 53, 351 (2006).

[35] E. L. Rempel, A. C. Chian, A. Brandenburg. Lagrangian coherent structures in a nonlinear dynamo. Astrophys. J. 735, L9 (2011).

[36] W. Horton. Drift waves and transport. Rev. Mod. Phys., 71, 735 (1999).

[37] F. A. Marcus, I. L. Caldas, Z. O. Guimarães-Filho, P. J. Morrison, W. Horton, Yu. K. Kuznetsov, I. C. Nascimento. Reduction of chaotic particle transport driven by drift waves in sheared flows. Physics of Plasmas 15, 112304 (2008).

[38] M. Branicki and S. Wiggins. Finite-time Lagrangian transport analysis: stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories and finite time Lyapunov exponents. Nonlin. Processes Geophys., 17, 1-36 (2010).

[39] K.C. Rosalem, M. Roberto, I.L. Caldas. Influence of the electric and magnetic shears on tokamak. Nucl. Fusion 54 064001 (2014).

[40] C. Chatfield. The Analysis of Time Series: An Introduction, Fourth Edition, Chapman and Hall, New York, NY (1989).