

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA
Departamento de Física dos Materiais e Mecânica

Profa. Dra. Helena Maria Petrilli
hmpetrl@if.usp.br

Caixa Postal 66318
CEP 05315-970 - São Paulo, SP

Fone +55 11 3091-6815
Fax +55 11 3091-6831

São Paulo, 20 de outubro de 2017.

O Prof. Carlos Eduardo Fiore dos Santos ministrou as disciplinas "Física III para a Escola Politécnica" e "Física IV para a Escola Politécnica" em 2016 e 2017. Publicou 7 trabalhos em periódicos indexados relevantes na sua área de pesquisa e têm ainda outros dois manuscritos em preparação. Concluiu uma orientação de mestrado (cujos resultados foram publicados na revista Physical Review E) e está orientando um estudante de mestrado, um de doutorado e um de iniciação científica. Participou também de diversas outras atividades acadêmicas, além de ser membro do conselho de departamento.

Considero assim, o relatório de atividades para o seu estágio probatório em RDIDP aprovado, tendo sido seu desempenho excelente, assim como seu projeto de pesquisa para o próximo biênio.

São Paulo, 20 de outubro de 2017

Helena Maria Petrilli

RELATÓRIO DE ATIVIDADES

BIENIO 2016-2017

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore.

Departamento de Física Geral, Instituto de Física da USP.

1. Resumo das atividades de Pesquisa

Neste relatório farei uma breve descrição das minhas atividades de pesquisa desenvolvidas no presente período (Novembro/15-outubro/17), no qual se insere o presente projeto. Minhas atividades de pesquisa podem ser agrupadas em 3 temas dentro da área de Física Estatística: Algoritmos e métodos para o estudo de transições de fase, Polimorfismo Líquido, anomalias e efeito hidrofóbico em modelos estatísticos simplificados para a água e processos de reação e difusão. No presente período, atuei principalmente no último tema e iniciei a pesquisa na área de sincronização em sistemas dinâmicos, em colaboração com o Prof. Tiago Pereira (ICMC-USP) e Dr. Ralf Toenjes (Universidade de Potsdam-Alemanha). Esta colaboração tem como objetivo estudar a influência de ruído no modelo de Kuramoto em grafos do tipo estrela e em estruturas mais complexas, dentre elas redes do tipo Barabasi-Albert que não apresentam uma escala característica.

A primeira parte deste projeto de pesquisa refere-se as transições com estados absorventes. Neste contexto, estudamos sob duas diferentes frentes de pesquisa, o efeito de um ingrediente recém proposto: A desordem temporal. Nesse caso, os parâmetros de controle variam com o tempo (e não espacialmente). Resultados para o processo de contato revelaram diferentes tipos de comportamento crítico. Enquanto Muñoz e colaboradores [Phys. Rev. Lett. **106**, 235702 (2011)] sugerem um comportamento crítico usual (algébrico) com expoentes não universais, Hoyos e colaboradores [Phys. Rev. E **94**, 022111, (2016)] derivaram um novo tipo de comportamento, com expoentes universais e comportamento não algébrico no regime de desordem temporal "forte". Na primeira frente, no qual se inseriu o projeto de mestrado do estudante Carlos Mario Solano (bolsa CNPq), investigamos a desordem temporal num modelo com transição crítica. Verificamos por meio de simulações numéricas e análises de campo médio que dependendo de como a desordem temporal é incluída, o efeito no diagrama de fases é diferente. Enquanto desordem incluída nos parâmetros de reação pode levar a uma supressão da reentrância (para desordem uniforme), desordem incluída na difusão a preserva. Análise do comportamento crítico nos mostrou um comportamento crítico similar ao recém proposto por Hoyos e colaboradores. No entanto, no regime de

difusão suficientemente alta, a classe de percolação direcionada parece ser recuperada.

Na segunda frente, estudamos seu efeito em transições descontínuas com estados absorventes. Este estudo teve como motivação inicial um estudo recente onde se mostrou (por meio de simulações numéricas) que a desordem espacial destrói a transição descontínua, tornando-a crítica e similar ao caso das transições críticas na presença de desordem espacial. Mostramos, [Physical Review E **94**, 052138, (2016)] que ao contrário do caso espacial, desordem temporal não proíbe a ocorrência de transições descontínuas, embora a supressão da coexistência de fases tenha verificada em alguns casos. Num trabalho subsequente, em colaboração com José A. Hoyos e Marcelo M. de Oliveira desenvolvemos uma teoria para transições descontínuas na presença de desordem temporal. Este trabalho está em fase de conclusão e o artigo contendo os principais resultados está sendo finalizado.

A terceira frente tem como objetivo estudar o modelo de Kuramoto na presença de ruído em grafos do tipo estrela e redes sem escala. Ele é constituído por N vértices não interagentes entre si, denominado folhas e um sítio central (hub) que interage individualmente com cada uma das folhas. Para o caso puro (sem ruído), resultados mostram, tanto sob o ponto de vista de cálculo numérico quanto para a solução exata, a existência de uma transição descontínua (explosiva) caracterizada pela existência de bistabilidade para numa região intermediária de interação entre os osciladores e o hub. Consideramos na primeira parte deste projeto o ruído incluído somente nas folhas, somente no hub e em ambos. No primeiro caso, a presença de ruído nas folhas destrói a sincronização explosiva, inibe uma sincronização do sistema. Por outro lado, ruído somente no "hub" favorece a sincronização, mesmo para interação suficientemente pequena. Ambos os comportamentos e uma sincronização explosiva aparecem quando o ruído incluído em todo sistema.

Na quarta parte deste projeto, ainda em andamento, considere um novo tema de pesquisa: Um estudo sobre a transição descontínua no modelo do votante majoritário (VM) com inércia. Originalmente, o modelo VM apresenta uma transição contínua, independentemente da topologia da rede [J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992); Phys. Rev. E **91**, 022816 (2015)]. Muito recentemente (Phys. Rev. E **95**, 042304 (2017)) descobriu-se que na presença de inércia, isto é, um quando há uma probabilidade de um dado sítio permanecer no mesmo estado, a transição torna-se descontínua com histerese, similar a bistabilidade descrita anteriormente para o modelo de Kuramoto. O presente estudo tem como primeiro objetivo a inclusão de inércia parcial, isto é, quando apenas uma parte dos sítios (no presente caso com maior grau) possui inércia.

2. Indicadores de Produção científica e acadêmica no biênio (2016-2017)

No presente período (novembro-2015-outubro 2017) publiquei 7 artigos científicos e 2 estão artigos estão sendo finalizados.

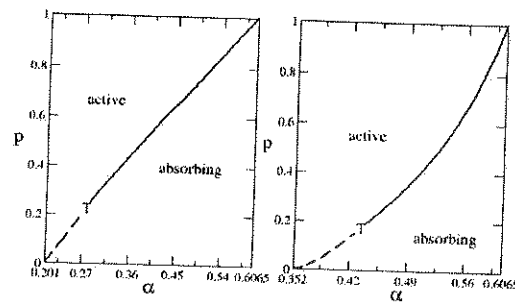
- M. M. de Oliveira, M. G. E. da Luz e C. E. Fiore, "Generic finite size scaling for discontinuous nonequilibrium phase transitions into absorbing states", *Physical Review E* **92**, 062126 (2015).
- M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, "Temporal disorder does not forbid discontinuous absorbing phase transitions", *Physical Review E* **94**, 052138, (2016).
- C. M. D. Solano, M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, "Comparing the influence of distinct kinds of temporal disorder in an one-dimensional absorbing transition model", *Physical Review E* **94**, 042123, (2016).
- S. Pianegonda e C. E. Fiore, "Influence of competition in minimal systems with discontinuous absorbing phase transitions", *Physica A*, **451**, 359. (2016).
- K. Kramer, M. Koehler, C. E. Fiore e M. G. E. da Luz, "Emergence of distinct spatial patterns in cellular automata with inertia", *Entropy* **94**, 042123 (2017).
- M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, "Effects of diffusion in competitive contact processes on bipartite lattices", *J. Stat. Mech.* v. 2017, p. 053211, (2017).
- Pedro E. Harunari, M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, "Partial inertia induces additional phase transition in the explosive majority voter", aceito para publicação no *Physical Review E*; arXiv: [1706.07465](https://arxiv.org/abs/1706.07465).
- C. E. Fiore, M. M. de Oliveira e J. A. Hoyos, "Discontinuous absorbing phase transitions in the presence of temporal disorder", em preparação.
- Jesus M. Encinas, P. E. Harunari, M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, "Fundamental ingredients for the emergence of discontinuous phase transitions in the majority vote model", em preparação.

Sou bolsista de produtividade do CNPq (nível II) desde 01/2010. As folhas de rosto dos artigos supracitados encontram-se no material anexo.

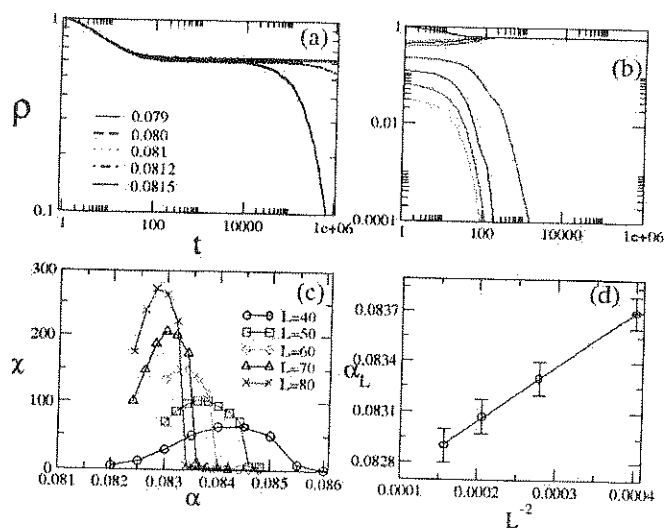
3. Resumo dos principais resultados:

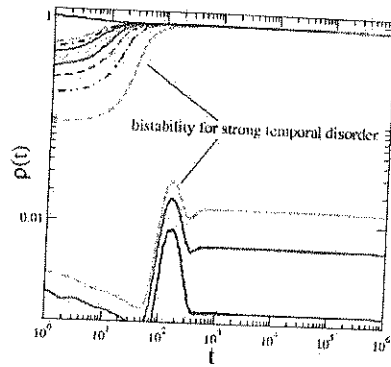
1. *Physica A* **451**, 349 (2016). Abaixo mostramos o diagrama de fases de uma versão bidimensional do processo de contato, no qual a criação requer pelo menos duas partículas para criar uma terceira (no

processo usual somente uma partícula é necessária para criação). Isto nos leva à uma mudança na ordem da transição. Nos diagramas de fases abaixo, mostramos a influência da competição com interação usual (uma partícula para criação). Vemos que taxas relativamente pequenas de competição já suprimem a coexistência de fases.

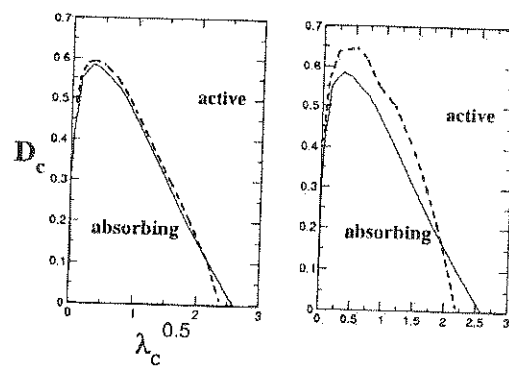
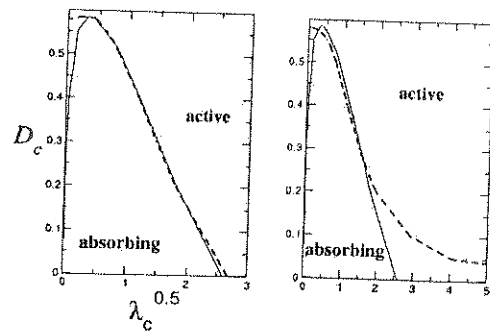


2. Physical Review E **94**, 052138, (2016). A seguir comparamos o comportamento do sistema puro (sem desordem temporal) com o sistema desordenado. Note um comportamento similar, isto é um comportamento bi-estável, consistente com a coexistência de fases.

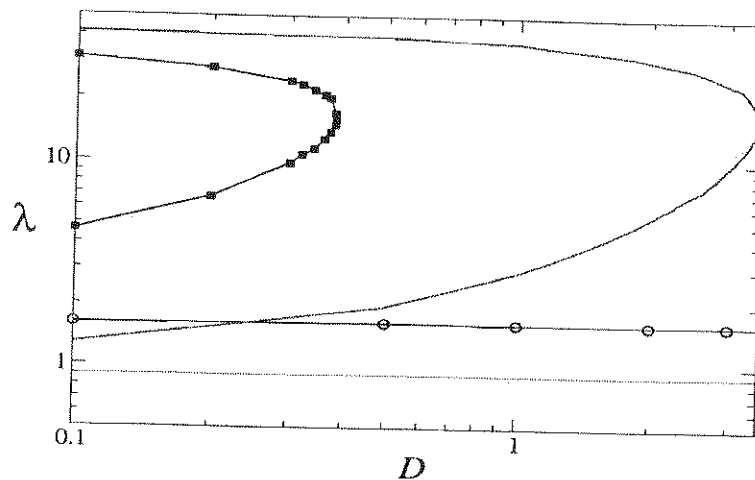




3. Physical Review E **94**, 042123, (2016). Projeto de mestrado do estudante Carlos Mario Díaz Solano. A seguir, mostro diagrama de fases do modelo de aniquilação por trincas na presença de desordem temporal nos parâmetros de controle e difusão. No primeiro caso, a desordem (quando introduzida por meio de uma distribuição uniforme) destrói o comportamento reentrante. Se ela for introduzida como uma distribuição bimodal (não mostrado aqui) ou se introduzida no parâmetro difusivo ela é aumentada.



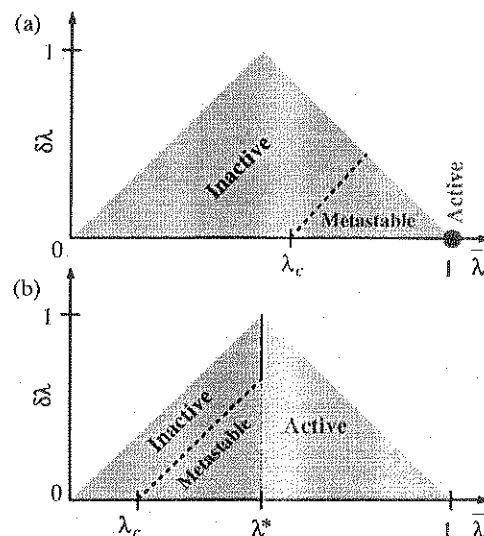
4. J. Stat. Mech. v. 2017, p. 053211, (2017).. Processo de contato em diferentes sub-redes bipartidas na presença de difusão. Neste caso, cada sub-rede tem uma taxa de criação diferente e um termo de aniquilação também depende da densidade local. Estes dois ingredientes levam ao surgimento de uma fase ativa assimétrica, na qual cada uma das sub-redes tem diferentes densidades de ocupação. Na presença de difusão vemos que a fase ativa assimétrica diminui até desaparecer numa difusão crítica. Abaixo resultados de campo médio simples (linhas vermelhas) e simulações numéricas (símbolos). O comportamento crítico não é alterado pela difusão.



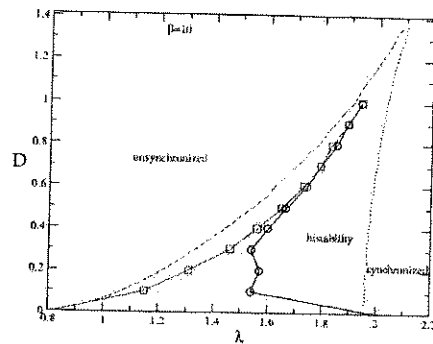
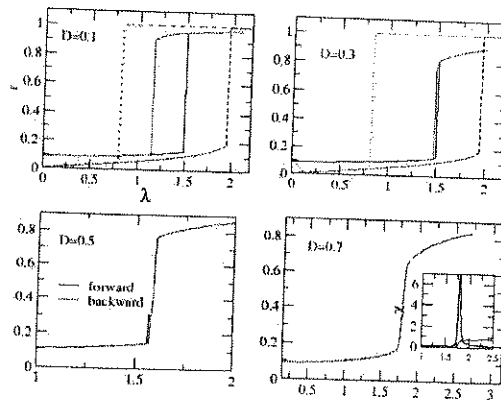
5.

Transições descontínuas com estados absorventes na presença de desordem temporal. Neste trabalho, estendemos o estudo anterior e mostramos que de fato a presença de desordem temporal não proíbe a ocorrência de transições descontínuas, embora ela provoque algumas mudanças significativas. Transições descontínuas apresentam, conforme mencionamos anteriormente, a bistabilidade. Este fato tem um papel fundamental. Considere um dos parâmetros de controle (taxa de criação) variar com o tempo, de forma que (por simplicidade) ele obedeça à uma distribuição bimodal. Em outras palavras, o sistema pode ter apenas dois valores à medida que o tempo evolui. Se um dos valores estiver na fase ativa com bistabilidade e outro na fase absorvente, mostramos que o sistema decairá para a fase absorvente. Se um deles estiver na fase ativa com bistabilidade e outro na fase ativa sem bistabilidade, mostramos que no primeiro caso o sistema estará na fase com bistabilidade. No segundo modelo, o comportamento do sistema bem como sua fase dependerá da diferença entre as taxas de criação.

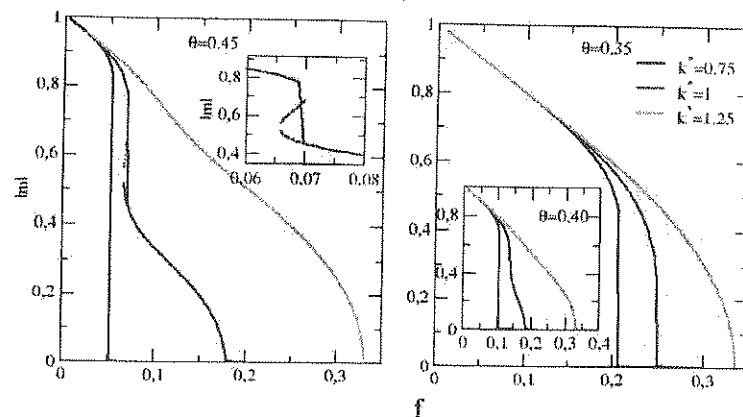
Se um valor de λ corresponder a fase ativa sem bistabilidade e outro na absorvente, no primeiro caso o sistema estará a fase absorvente, enquanto que para o segundo modelo também dependerá da diferença entre as taxas. Abaixo, resultados para dois sistemas (o primeiro modelo foi estudado em *Physical Review E* **94**, 052138, (2016) e os novos resultados reforçam aqueles mostrados anteriormente) na presença de desordem temporal, sendo a abcissa e ordenada o valor médio de λ e a diferença entre as taxas de criação $\delta\lambda$, respectivamente. Aqui “metastable” denota a fase que apresenta bistabilidade e “active” a fase sem bistabilidade. Linhas tracejadas e contínuas correspondem a transições descontínuas e contínuas, respectivamente.



6. Resultados para o modelo de Kuramoto na presença de ruído. Temos um sistema composto por uma coleção de osciladores com interação apenas entre o sítio central e as folhas [*Phys. Rev. E* **92**, 012904 (2015)] acrescido de um ruído gaussiano. No primeiro e segundo gráficos, resultados para o ruído introduzido apenas nas folhas. Vemos que à medida que a intensidade do ruído D aumenta, a sincronização deixa de ser explosiva e é desfavorecida (a partir de um valor limite de intensidade). Por comparação, linhas tracejadas correspondem ao resultado exato para o caso puro, *Phys. Rev. E* **92**, 012904. No segundo gráfico, comparamos com cálculo semi-analítico. Apesar da concordância qualitativa, resultados numéricos apresentam efeitos de tamanho finito (à medida que o tamanho do sistema aumenta, os resultados numéricos aproximam-se dos analíticos). Resultados para ruído introduzido apenas no sítio central (não mostrados aqui) mostram um efeito contrário: o ruído favorece uma sincronização do sistema, mesmo para interação pequena.



7. Modelo votante majoritário (MV) com inércia. Recentemente proposto em Phys. Rev. E **95**, 042304 (2017) mostrou-se que na presença de inércia, a transição ordem-desordem do MV torna-se descontínua. Na primeira parte (em fase de conclusão) mostramos que a presença de inércia parcial (somente acrescida nos sítios com mais vizinhos) provoca o aparecimento de uma transição de fase adicional (curvas vermelhas), entre duas fases sincronizadas quando a inércia for elevada. Curvas pretas e verdes correspondem ao caso com restrição pequena e elevada, respectivamente. No primeiro caso a transição é similar ao caso com inércia em todo sistema, enquanto no segundo a transição é contínua.



4. Participação em congressos e visitas científicas

Particpei do primeiro Encontro de Física 2016, ocorrido entre os dias 04 e 07 de setembro de 2016 em Natal (ES). Apresentei o trabalho (oral) "Influence of temporal disorder in one dimensional absorbing phase transitions".

Particpei da visita científica, entre os dias 24 de fevereiro e 10 de março (2017) e também entre os dias 1 e 13 de setembro (2017), na Universidade de Potsdam, referente a colaboração científica com o Dr. Ralf Toenjes. Também apresentei dois seminários, sendo o primeiro para o grupo de Caos e Sistemas Dinâmicos da própria universidade e o segundo seminário foi apresentado na Universidade de Humboldt (Berlin).

5. Seminários Apresentados

Apresentei diferentes seminários nos Departamentos de Física Geral do IFUSP (3/2016 e 4/2017) e de Física da UFPR (6/2016). Apresentei também, à convite da comissão de Pesquisa, um colóquio no IFUSP em maio de 2017.

6. Orientações concluídas e em andamento

Concluí a orientação de mestrado do estudante Carlos Solano, cujos resultados foram publicados no periódico Physical Review E. Também estou orientando o estudante de iniciação científica Pedro Eduardo Harunari (com bolsa FAPESP), cujo projeto visa o estudo do fenômeno da sincronização explosiva em modelos de Kuramoto e o estudo da transição descontínua no modelo do votante majoritário com inércia.

Iniciei a orientação de doutorado do estudante Jesus Mauricio Riveros, cujo primeiro objetivo do projeto visa o estudo de ingredientes mínimos na transição descontínua do modelo do votante majoritário com inércia.

Iniciei a orientação de mestrado do estudante Carlos Ernesto Moa, cujo primeiro objetivo do projeto visa o estudo de transições descontínuas com estados absorventes em redes complexas.

7. Participação em bancas examinadoras.

1. Diego Sales de Oliveira, Teoria cinética e aplicações em plasmas termonucleares, exame de qualificação de doutorado-IFUSP (2016).

2. Joniel Carlos Francisco Alves dos Santos, Distribuição de comprimentos de conjugação em polímeros em solução, doutorado-UFPR (2016).

3. Flávia Mayumi Hirata, Dinâmica estocástica de populações biológicas, exame de qualificação de doutorado-IFUSP (2016).

4. Bruno Jeferson Lourenço, Amostragem entrópica tomográfica: aprimoramento e aplicações ao modelo de Ising antiferromagnético com campo externo e ao problema de flow shop scheduling, doutorado-UFMG (2016).

5. Mauro Lucio Lobão Iannini, Traffic model with an absorbing phase transition, doutorado-UFMG (2017).

6. Tiago Boff Pedro, Estudo de modelo epidemiológico competitivo com dinâmica estocástica não-Markoviana, doutorado-UFSC (2017).

7. Fernando Takeshi Tamouye, Enovelamento de proteínas e ligações de hidrogênio - estudo de modelos mínimos, mestrado-IFUSP (2017).

8. Disciplinas Ministradas

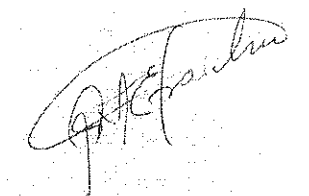
Ministrei as disciplinas Física III (1º semestre de 2016 e 2017) e Física IV para a Escola Politécnica (2º semestre de 2016 e 2017), respectivamente. Os comprovantes encontram-se em anexo.

9. Atividades Administrativas

Sou membro titular do conselho do departamento de Física Geral desde meados de 2014. Sou representante do Departamento de Física Geral na comissão de Informática.

São Paulo, 15 de outubro de 2017

Prof. Dr. Carlos E. Fiore dos Santos

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Carlos E. Fiore dos Santos', written over a faint, dotted grid background.

Generic finite size scaling for discontinuous nonequilibrium phase transitions into absorbing states

M. M. de Oliveira,^{1,2} M. G. E. da Luz,³ and C. E. Fiore⁴¹*Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG 36420-000 Brazil*²*Theoretical Physics Division, School of Physics and Astronomy, University of Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom*³*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR 81531-980, Brazil*⁴*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, São Paulo, SP 05315-970, Brazil*

(Received 24 July 2015; revised manuscript received 26 October 2015; published 15 December 2015)

Based on quasistationary distribution ideas, a general finite size scaling theory is proposed for discontinuous nonequilibrium phase transitions into absorbing states. Analogously to the equilibrium case, we show that quantities such as response functions, cumulants, and equal area probability distributions all scale with the volume, thus allowing proper estimates for the thermodynamic limit. To illustrate these results, five very distinct lattice models displaying nonequilibrium transitions—to single and infinitely many absorbing states—are investigated. The innate difficulties in analyzing absorbing phase transitions are circumvented through quasistationary simulation methods. Our findings (allied to numerical studies in the literature) strongly point to a unifying discontinuous phase transition scaling behavior for equilibrium and this important class of nonequilibrium systems.

DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062126

PACS number(s): 05.20.Gg, 05.70.-a

I. INTRODUCTION

A nonequilibrium phase transition (NEQPT) into absorbing states (AS) is key in a wide range of phenomena, such as [1–5] chemical reactions, interface growth, epidemics, and population dynamics. Likewise, it is relevant for the emergence of spatiotemporal chaos in different classes of problems, as experimentally verified in liquid crystal electroconvection [6], driven suspensions [7], and superconducting vortices [8]. So much has been done on continuous NEQPT, especially addressing universality [3,5,9,10]. However, comparatively less attention has been paid to *discontinuous* transitions in systems with AS [11,12], the case, e.g., in catastrophic shift processes [13] (bearing important questions regarding the influence of diffusion and disorder in creating or destroying AS), heterogeneous catalysis [14,15], ecological [16,17], granular [18], and replicator dynamics [19], cooperative coinfection [20], language formation [21], and social patterns [22].

Discontinuous transitions to AS conceivably require mechanisms to suppress the formation of absorbing minority islands induced by fluctuations [23,24]. Also, there is strong evidence that they cannot occur in one dimension (1D) if the interactions are short ranged: The absence of boundary fields would prevent the stabilization of compact clusters [25]. In spite of these presumably universal facts, a general description of discontinuous NEQPT, including the ability to identify a possible scaling behavior, is still lacking.

Equilibrium first-order transitions are characterized by discontinuities in the order parameter ϕ and by thermodynamic “densities”, whose susceptibilities display deltalike shapes. In finite systems, such quantities become continuous functions of the control parameter λ . However, the infinite limit still can be estimated from a finite size scaling theory (FSS) [26–33], when second derivatives scale linearly with the volume $V = L^d$ (for d the spatial dimension and L the lattice size). Also, $|\lambda_1 - \lambda_0| \sim V^{-1/d}$ (with λ_1 and λ_0 the coexistence point for a finite system and the thermodynamic limit).

NEQPT to AS, precise methods such as spreading simulations—available for continuous transitions—as well as

a FSS framework (as the above) are absent in the discontinuous case. Actually, a difficulty in its analysis is that the AS often prevent simulations to properly converge, precluding any scaling inference. Even for large systems, eventually the dynamics will end up in an AS via a statistical fluctuation of small, but nonzero, probability. Also, metastable states can make it hard to locate or even classify transition points due to doubts if the observed order parameter jump is genuine.

In the present article we address such a class of problems, presenting solid arguments for a common finite size scaling behavior. Based on previous suggestions [11,34–36]—and in the fact that equilibrium and nonequilibrium phase transitions share important similarities when the latter display stationary (steady) states [37] (see below)—we develop a FSS for transitions into single and infinitely many AS by means of the quasistationary (QS) concept. We show that, in full analogy with equilibrium, standard quantities follow the same $1/V$ scaling. Five models are used to illustrate our results.

II. THEORY AND METHOD

The quasistationary probability distribution (QSPD), a powerful tool for continuous NEQPTs [38], is likewise useful here. In very general terms, the main purpose of this method is to evade just the absorption process. Formally, assume at time t the microstate (σ) probability distribution $P(\sigma, t)$ and the survival probability $P_s(t)$, i.e., the probability that the system is still active. Then, the QSPD, $P_{QS}(\sigma) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\sigma, t)/P_s(t)$, describes the asymptotic properties of a finite system conditioned to survival [39,40]. In practice, P_{QS} is calculated by effectively redistributing the flux from the absorbing state to the system's nonabsorbing subspace when the dynamics is sufficiently close to the absorbing condition. In this case, although the detailed balance is not satisfied, if the redistribution is made compatible with the QS distribution itself (through a self-consistent procedure—see Ref. [38]), then the global balance [41] is verified in the nonabsorbing subspace of the original problem. Furthermore, the QS distribution becomes the stationary solution of the

Influence of competition in minimal systems with discontinuous absorbing phase transitions

Salete Pianegonda^{a,b}, Carlos E. Fiore^{c,*}

^a Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Caixa Postal 15051, CEP 91501-970, Porto Alegre, RS, Brazil

^b Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 19044, CEP 81531-980, Curitiba, PR, Brazil

^c Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 14 January 2016

Available online 23 January 2016

Keywords:

Phase transitions

Critical phenomena

Discontinuous phase transitions

Absorbing states

ABSTRACT

Contact processes (CP's) with particle creation requiring a minimal neighborhood (restrictive or threshold CP's) present a novel sort of discontinuous absorbing transitions, that revealed itself robust under the inclusion of different ingredients, such as distinct lattice topologies, particle annihilations and diffusion. Here, we tackle on the influence of competition between restrictive and standard dynamics (that describes the usual CP and a continuous DP transition is presented). Systems have been studied via mean-field theory (MFT) and numerical simulations. Results show partial contrast between MFT and numerical results. While the former predicts that considerable competition rates are required to shift the phase transition, the latter reveals the change occurs for rather limited (small) fractions. Thus, unlike previous ingredients (such as diffusion and others), limited competitive rates suppress the phase coexistence.

© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The usual contact process [1] is probably the simplest example of system presenting an absorbing phase transition. It is composed of two subprocesses: “spontaneous” annihilation and “catalytic” particle creation, in which new species are created only in empty sites on the neighborhood of at least one particle. Despite the lack of an exact solution, its phase transition and critical behavior are very well known and belong to the robust directed percolation (DP) universality class [2–4]. Many generalizations of its rules can be extended not only for theoretical purposes, but also for the description of a large variety of systems in the framework of physics [5,6], chemistry [7,8], ecology [9] and others. In these cases, the competition among dynamics leads to several new findings. In some cases [5,10], the competition between particle hopping (diffusion) and annihilation of three adjacent particles (instead of a single particle) is responsible for a reentrant phase diagram and a stable active phase for extremely low activation rates. In other examples [11], by allowing particles to have different creation rates with respect to their first and second neighbors, the competition is responsible for the appearance of an active asymmetric phase with spontaneous breaking symmetry. Also, when particles interact in a symbiotic manner [12], two active symmetric phases, in which only one species is present, emerge. An interesting generalization is the called restrictive (threshold) CPs, in which the phase transition changes from continuous to discontinuous for $d \geq 2$. They are similar to the usual CP, but one requires at least two particles for creating a new species (in the original CP at least one particle is needed). Different restrictive models have revealed that the phase transition remains first-order by including

* Corresponding author.

E-mail addresses: fiore@fma.usp.br (C.E. Fiore).

Comparing the influence of distinct kinds of temporal disorder in a low-dimensional absorbing transition model

C. M. D. Solano,¹ M. M. de Oliveira,² and C. E. Fiore¹¹*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP 05314-970, Brazil*²*Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco-MG 36420-000, Brazil*

(Received 22 June 2016; revised manuscript received 23 August 2016; published 19 October 2016)

Recently it was stated that temporal disorder constitutes a relevant perturbation in absorbing phase transitions for all dimensions. However, its effect on systems other than the standard contact process (CP), its competition with other ingredients (e.g., particle diffusion), and other kinds of disorder (besides the standard types) are unknown. In order to shed some light on the above-mentioned points, we investigate a variant of the usual CP, namely, the triplet annihilation model, in which the competition between triplet annihilation and single particle diffusion leads to an unusual phase diagram behavior, with reentrant shape and endless activity for sufficiently large diffusion rates. Two kinds of time-dependent disorder have been considered. In the former, it is introduced in the creation-annihilation parameters (as commonly considered in recent studies), whereas in the latter, the diffusion rate D is allowed to be time dependent. In all cases, the disorder follows a uniform distribution with fixed mean and width σ . Two values of σ have been considered in order to exemplify the regime of “weaker” and “stronger” temporal disorder strengths. Our results show that in the former approach, the disorder suppresses the reentrant phase diagram with a critical behavior deviating from the directed percolation (DP) universality class in the regime of low diffusion rates, while they strongly suggest that the DP class is recovered for larger hopping rates. An opposite scenario is found in the latter disorder approach, with a substantial increase of reentrant shape and the maximum diffusion, in which the reentrant shape also displays a critical behavior consistent with the DP universality class (in similarity with the pure model). In order to compare with very recent claims, the results from taking a bimodal distribution and critical behavior in the limit of strong disorder are presented. Also, the results derived from the mean-field theory are performed, presenting partial agreement with numerical results. Lastly, a comparison with the diffusive disordered CP is undertaken.

DOI: 10.1103/PhysRevE.94.042123

I. INTRODUCTION

Although typical nonequilibrium phase transitions into an absorbing phase belong generically to the very well-established directed percolation (DP) universality class [1–5], the inclusion of impurities or defects drastically affects its critical behavior [6–12]. Such disorder approach is an unavoidable ingredient of real systems and has been argued to be one of the causes for the rarity of DP behavior in experiments [13]. For these reasons, the study of disordered systems has earned considerable attention in recent years.

Impurities and defects are different kinds of spatial disorder that lead to the existence of rare regions in the absorbing phase, characterized by large local activity and slow decay (algebraic, instead of exponential) toward the extinction with nonuniversal exponents [11,12]. It is typically introduced in two distinct ways, i.e., through random spatial variation of the control parameter [11] or through random deletion of sites or bonds [7–9].

Even though less studied than the spatial disorder, the temporal disorder has also attracted interest [14–19]. In contrast to the previous case, the control parameter is allowed to be time dependent, resulting in temporarily active (ordered) and absorbing (disordered) phases, whose effects are more relevant at the emergence of the phase transition. Heuristically, the importance of temporal disorder can be set through the generalization of the Harris criterion (valid for spatial disorder) [20], proposed by Kinzel [21]. According to it, the temporal disorder is a relevant perturbation whenever the clean temporal correlation exponent (without disorder) $\nu_{||}$ satisfies

the condition $\nu_{||} < 2$. Since, for the DP universality class, $\nu_{||}$ reads $\nu_{||} = 1.733847(6)$, $1.2950(60)$, and $1.110(10)$ in one, two, and three dimensions, respectively, the temporal disorder is expected to destabilize the DP absorbing phase transition. Recent results for the contact process (CP), the prototypical model in the DP class, have shown that the temporal disorder also reveals a region of new phase, named *temporal Griffiths phase*, in which the lifetime exhibits a power-law behavior (instead of exponential growth) [15,17,19]. Despite this, results are restricted to the contact process and with partially conflicting predictions. The first set of numerical results, from Ref. [15], predicts nonuniversal critical behavior with algebraic behavior $t^{-\alpha}$ (where α is the critical exponent of a given quantity) and dependence on the disorder strength. On the other hand, based on a strong-noise normalization group (RG) analysis and simulations, a behavior of type $t^\nu [\ln t]^{-\alpha}$ with universal critical exponents has been argued for the CP in very recent works by Vojta *et al.* [17] and Barghathi *et al.* [19].

Additionally, the effects of temporal disorder in the presence of other ingredients, such as particle diffusion, and interactions have not been considered yet. In particular, several works have shown that the diffusion constitutes a relevant perturbation, drastically affecting the critical behavior [3,22] or even leading to distinct scenarios for discontinuous phase transitions [23–25].

In order to cover the above points, in this work we investigate the effects of temporal disorder in a variant of the usual CP, namely, the triplet annihilation model (TAM) [26,27], in a stochastic lattice model that was proposed a long time

Temporal disorder does not forbid discontinuous absorbing phase transitions in low-dimensional systems

M. M. de Oliveira¹ and C. E. Fiore²¹*Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, Minas Gerais, 36420-000, Brazil*²*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, 05314-970, Brazil*

(Received 29 March 2016; revised manuscript received 25 July 2016; published 23 November 2016)

Recent papers have shown that spatial (quenched) disorder can suppress discontinuous absorbing phase transitions. Conversely, the scenario for temporal disorder is still unknown. To shed some light in this direction, we investigate its effect in three different two-dimensional models which are known to exhibit discontinuous absorbing phase transitions. The temporal disorder is introduced by allowing the control parameter to be time dependent $p \rightarrow p(t)$, either varying as a uniform distribution with mean $\bar{p}$ and variance σ or as a bimodal distribution, fluctuating between a value p and a value $p_l \ll p$. In contrast to spatial disorder, our numerical results strongly suggest that such uncorrelated temporal disorder does not forbid the existence of a discontinuous absorbing phase transition. We find that all cases are characterized by behaviors similar to their pure (without disorder) counterparts, including bistability around the coexistence point and common finite-size scaling behavior with the inverse of the system volume, as recently proposed [M. M. de Oliveira *et al.*, Phys. Rev. E 92, 062126 (2015)]. We also observe that temporal disorder does not induce temporal Griffiths phases around discontinuous phase transitions, at least not for $d = 2$.

DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052138

I. INTRODUCTION

Nonequilibrium phase transitions are considered a key feature of a countless number of phenomena, such as magnetic systems, biological and ecological models, and many others [1–4]. Recently, considerable interest has been devoted to the inclusion of more realistic ingredients in order to describe (or mimic) the effects of impurities or external fluctuations, as well as their effects in the phase transition [5–10].

Commonly, these ingredients are introduced by allowing the control parameter to assume distinct values in space and/or time. The former case, regarded as quenched disorder, affects drastically the phase transitions, leading to the existence of a new universality classes and local regions in the absorbing phases, characterized by large activities with slow decays toward extinction. These rare zones typically arise when the activation rate λ lies between the clean value λ_c^0 (without disorder) and the dirty (disordered) critical point λ_c ; i.e., $\lambda_c^0 < \lambda < \lambda_c$. Moreover, in these domains the system may exhibit nonuniversal exponents toward full extinction [11–13]. Heuristically, the Harris criterion [14] establishes that quenched disorder is a relevant perturbation if $d\nu_\perp < 2$, where d is the system dimensionality and $\nu_\perp$ is the spatial correlation length exponent. For models belonging to the directed percolation (DP) universality class $\nu_\perp = 1.096854(4)$, $0.734(4)$, and $0.581(5)$ in $d = 1, 2$, and 3 , respectively. Consequently, the Harris criterion indicates that spatial disorder is a relevant perturbation for continuous absorbing phase transitions in all dimensions.

Conversely, the Imry-Ma [15] and Aizenman-Wehl [16] criteria establish that quenched disorder suppresses the phase coexistence in equilibrium systems for $d \leq 2$. Afterward, it was shown [17–19] that the discontinuous transition in the Ziff-Gulari-Barshad (ZGB) model becomes continuous when the disorder strength is large enough. More recently, Villa-Martín *et al.* [9] have suggested that the Imry-Ma-Aizenman-Wehl conjecture should be extended for discontinuous absorbing

phase transitions for $d \leq 2$, irrespective of the disorder magnitude.

Although less studied than spatial disorder, the influence of temporal disorder has also been considered in some cases [20–22]. In contrast to the quenched disorder, here the control parameter becomes time dependent, resulting in a temporarily active (ordered) as well as absorbing (disordered) phases, whose effect of variability becomes pronounced at the emergence of the phase transition. In particular, the available results have shown that temporal disorder is a highly relevant perturbation [23], suppressing the DP phase transitions in all dimensions. For systems with up-down symmetry they are relevant only for $d \geq 3$. *Temporal Griffiths phases* (TGPs), regions in the active phase characterized by power-law spatial scaling and generic divergences of susceptibility, have also been reported for absorbing phase transitions [21,23–25] but not found in low-dimensional systems with up-down symmetry [22]. On the other hand, the effect of temporal disorder for *discontinuous* absorbing phase transitions is unknown.

To shed some light in this direction, here we investigate the effects of temporal disorder in discontinuous absorbing phase transition. Our study aims to answer three fundamental questions: (i) Is the occurrence of phase coexistence forbidden under the presence of temporal disorder? (ii) If not, what changes does it provoke with respect to the pure (without disorder) version? (iii) Does the temporal disorder induce temporal Griffiths phases around these phase transitions? These ideas will be tested in three models which are known to yield discontinuous absorbing phase transitions in two- and infinite-dimensional systems, namely, the ZGB model for CO oxidation [26] and two lattice versions of the second Schlögl model (SSM) [12,27]. As we will show, in all cases the phase transition is characterized by a behavior similar to their pure (without disorder) counterparts, including bistability around the coexistence point and common finite-size scaling behavior

Article

Emergence of Distinct Spatial Patterns in Cellular Automata with Inertia: A Phase Transition-Like Behavior

Klaus Kramer ^{1,2}, Marlus Koehler ², Carlos E. Fiore ³ and Marcos G.E. da Luz ^{2,*}

¹ CEPLAN, Universidade do Estado de Santa Catarina, 89283-081 São Bento do Sul-SC, Brazil; glausians@gmail.com

² Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, C.P. 19044, 81531-980 Curitiba-PR, Brazil; koehler@fisica.ufpr.br

³ Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66318, 05315-970 São Paulo-SP, Brazil; fiore@if.usp.br

* Correspondence: luz@fisica.ufpr.br; Tel.: +55-41-3361-3664

Academic Editor: Mikhail Prokopenko

Received: 24 December 2016; Accepted: 28 February 2017; Published: 7 March 2017

Abstract: We propose a Cellular Automata (CA) model in which three ubiquitous and relevant processes in nature are present, namely, spatial competition, distinction between dynamically stronger and weaker agents and the existence of an inner resistance to changes in the actual state S_n ($= -1, 0, +1$) of each CA lattice cell n (which we call inertia). Considering ensembles of initial lattices, we study the average properties of the CA final stationary configuration structures resulting from the system time evolution. Assuming the inertia a (proper) control parameter, we identify qualitative changes in the CA spatial patterns resembling usual phase transitions. Interestingly, some of the observed features may be associated with continuous transitions (critical phenomena). However, certain quantities seem to present jumps, typical of discontinuous transitions. We argue that these apparent contradictory findings can be attributed to the inertia parameter's discrete character. Along the work, we also briefly discuss a few potential applications for the present CA formulation.

Keywords: cellular automata; spatial-temporal patterns; complexity; phase transitions; emergent behavior; phase segregation; ecotones

1. Introduction

Spatial-temporal pattern structures are ubiquitous [1,2], especially in biological and human phenomena [3–6]. They commonly originate from (nonlinear) driving forces acting locally on the elements of a spatially-extended system. Often, this type of global emergent behavior cannot be “guessed” simply from a direct qualitative inspection of the interactions between the individual constituents (i.e., at the microscopic level). The full dynamics, the macroscopic description [6], can be understood only as a collective effect. Such a scenario frames what is frequently termed in the literature complex systems.

Likewise, phase transitions do constitute an extremely relevant class of processes. In particular, the so-called critical phenomena lead to a very rich range of distinct comportment [7,8]. Briefly, not too close to a critical point λ_c , the system microscopic organization varies continuously with a given control parameter λ (for instance, temperature, chemical potential, etc.), maintaining a certain main characteristic, e.g., a non-null magnetization or some degree of ordered aggregation, quantified by a macroscopic order parameter Γ . However, by crossing λ_c (with $\Gamma(\lambda_c)$ usually vanishing), the system qualitatively changes, going through a phase transition, e.g., becoming non-magnetic or complete disordered. Moreover, around the critical point [7], there is the development of infinite correlation

Fundamental ingredients for the emergence of discontinuous phase transitions in the majority vote model

Jesús M. Encinas, Pedro E. Harunari¹, M. M. de Oliveira² and C. E. Fiore^{1*}

¹ Instituto de Física, Universidade de São Paulo,

Caixa Postal 66318

05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil

² Departamento de Física e Matemática, CAP,

Universidade Federal de São João del Rei,

Ouro Branco-MG, 36420-000 Brazil,

(Dated: October 9, 2017)

Recently Chen et al. [Phys. Rev. E **95**, 042304 (2017)] have found out that an explosive (e.g. a discontinuous) transition appears in the majority vote (MV) model when one incorporates a term proportional to the local spin (inertial term) in complex networks. Here we advance the rather incomplete understanding about the discontinuous MV transition by inspecting thoroughly the role of three fundamental ingredients: inertia, system connectivity and the lattice topology. Analysis have been carried out for regular lattices and random regular networks and different degrees (interacting neighborhood) through mean-field treatment and numerical simulations. Our findings reveal that not only the inertia but also the connectivity constitute essential elements for shifting the phase transition. Astonishingly, a discontinuous transition also manifests in low-dimensional regular topologies, exposing a scaling behavior entirely different than those from the complex networks case, in which relevant quantities scale with the system volume, as recently proposed in Phys. Rev. E **94**, 062126 (2015). Therefore, our findings put on firmer bases the essential issues for the manifestation of discontinuous transitions in such relevant class of system with “up-down” symmetry.

I. INTRODUCTION

Spontaneous breaking symmetry manifests in a countless sort of systems in nature besides the classical ferromagnetic-paramagnetic phase transition. Fishes, moving in ordered schools as a strategy of protecting themselves against predators, suddenly reverse its direction motion due to the emergence of some external factor, such as water turbulence or opacity. Other remarkable example occurs for some species of asian fireflies [2]. They start emitting flashes of light at night from an unsynchronized way. Some time later, the whole swarm is flashing in a coherent way. Order-disorder transitions also describe the spontaneous formation of a common language, culture or the emergence of consensus in distinct contexts [3]. (FALTA UMA FRASE AQUI) These examples illustrate the relevance of transitions in systems with Z_2 (“up-down”) in the scope of physics, biology, chemistry, social dynamics and others. Several systems [4–6] have been considered aimed at tackling their main features, including critical behavior, universality classes and more recently the entropy production.

Recently, discontinuous nonequilibrium phase transitions have attracted great deal of interest, in part due to the ascertainment that in several situations the crossover between distinct regimes do not follow smooth behaviors [7–9], but instead they manifest by means of abrupt shifts. Another reason, from practical purposes, concerns that comparatively (nonequilibrium) first-order phase transitions have received much less attention if compared

to the critical case, implying in a lesser knowledge regarding their fundamental aspects, including the mechanisms for their occurrence [4, 6, 10, 16]. In contrast with distinct dynamics [11], a finite size theory applies to others.

First-order transitions in the class of systems with symmetry “up-down” exemplify most of above mentioned points [12, 13]. A possible route for overcoming such lack of knowledge has been drawn with the recent work by Chen et al. [14]. They have assted that the usual majority vote (MV) model, an emblematic example of system with Z_2 symmetry [15–17], presents a discontinuous transition when relevant strengths of inertia (dependence on the local spin) in complex networks are incorporated in the dynamics. The original version, in which the dynamics is ruled only from the spins neighborhood, presents a critical phase transition, irrespectively the lattice topology and neighborhood.

Although inertia plays a fundamental role in shifting the phase transition, its effect, till now, has not been satisfactory understood. First, how does the phase transition shift occur, is it dependent on the neighborhood or on the contrary, is it independent of the neighborhood for (together the inertia plays a role in the shifting? Second, is the topology a fundamental ingredient? In more concrete terms, do complex network structures bring us similar conclusions?

Aimed at addressing aforementioned questions, here we examine the role of three fundamental ingredients: inertia, system connectivity and the lattice topology. For instance we consider lattice regular and random regular topologies for different system degrees by means of mean-field treatment and numerical simulations. Our findings

Effects of diffusion in competitive contact processes on bipartite lattices

M M de Oliveira^{1,3} and C E Fiore²

¹ Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco-MG, 36420-000, Brazil

² Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 05314-970, Brazil

E-mail: mmdeoliveira@ufsj.edu.br

Received 1 February 2017

Accepted for publication 27 April 2017

Published 25 May 2017



Online at stacks.iop.org/JSTAT/2017/053211

<https://doi.org/10.1088/1742-5468/aa71d3>

Abstract. We investigate the influence of particle diffusion in the two-dimension contact process (CP) with a competitive dynamics in bipartite sublattices, proposed in de Oliveira and Dickman (2011 *Phys. Rev. E* **84** 011125). The particle creation depends on its first and second neighbors and the extinction increases according to the local density. In contrast to the standard CP model, mean-field theory and numerical simulations predict three stable phases: inactive (absorbing), active symmetric and active asymmetric, signaled by distinct sublattice particle occupations. Our results from MFT and Monte Carlo simulations reveal that low diffusion rates do not destroy sublattice ordering, ensuring the maintenance of the asymmetric phase. On the other hand, for diffusion larger than a threshold value D_c , the sublattice ordering is suppressed and only the usual active (symmetric)-inactive transition is presented. We also show the critical behavior and universality classes are unaffected by the diffusion.

Keywords: diffusion in random media, phase transitions into absorbing states, stochastic particle dynamics

[†] To whom any correspondence should be addressed.

Discontinuous absorbing phase transitions in the presence of temporal disorder

C. E. Fiore,¹ M. M. de Oliveira,² and José A. Hoyos³

¹*Instituto de Física, Universidade de São Paulo.*

Caixa Postal 66318 São Paulo, São Paulo 05315-970, Brazil.

²*Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, Minas Gerais 36420-000, Brazil.*

³*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo.*

C.P. 369, São Carlos, São Paulo 13560-970, Brazil.

(Dated: September 28, 2017)

Based on mean-field theory and Monte Carlo simulations, we develop a general theory for discontinuous non-equilibrium phase transitions into an absorbing state in the presence of a time-varying environmental noise. Our study takes into account two important examples of discontinuous transitions, in which the phase coexistence emerges from different ingredients. The former, named second Schoëgl model (SSM) the particle creation requires a minimal neighborhood of two particles, whereas the latter (σ -CP) the long-range interaction, is responsible for shifting the phase transition, from continuous to discontinuous. The temporal disorder is introduced by allowing the control parameter to be time dependent according to a bimodal distribution. Our results reinforce recent findings (Phys. Rev. E **94**, 052138 (2016)), in which in contrast to the uncorrelated quenched disorder, temporal disorder does not forbid discontinuous transition in low dimensional systems. However, the classification of phase transition depends on the strength of disorder and the model properties. Numerical simulations confirm results obtained from the mean-field theory.

PACS numbers: 05.70.Ln, 05.50.+q, 05.65.+bx

I. INTRODUCTION

Disorder due to spatial or temporal inhomogeneities is an unavoidable ingredient of real systems and commonly plays a significant role in their behaviour [1–3]. In particular, in the last decade, the effects of spatial (quenched) [4–8] and temporal disorder [9–14] have attracted a considerable attention in the context of absorbing phase transitions (APTs) [15–17].

Such far from equilibrium phase transitions occur when varying a control parameter the system changes from a microscopic active phase to a frozen absorbing phase, in which there are no fluctuations. APTs can be found in a wide variety of models in ecology [18], epidemic spreading [19], sociophysics [20], and other fields.

As well as observed in the equilibrium models, quenched disorder can strongly affects critical APTs, resulting in a completely different scaling behavior than the one observed in the pure (non-disordered) models. Rare regions such as Griffiths phases with large activity and slow decay toward the absorbing state also can emerge as effects of quenched disorder [4–8].

The effects of *temporal* disorder, on the other hand, are less understood. In such case, the control parameter is time dependent, resulting in a temporarily active/ordered as well as absorbing/disordered phases. The first studies [9, 21], focused on systems belonging to the directed percolation (DP) universality class (the generic APT universality class), revealed that temporal disorder is a highly relevant perturbation to the critical absorbing transition, suppressing the DP universality class, irrespectively the dimension. In contrast, its effects in systems with up-down symmetry are relevant only for

$d \geq 3$ [10]. More recent works have put their effects under more solid theoretical basis, including a new kind of scaling behavior [11, 12]. The effects of disorder on introducing temporal disorder in such systems were recently addressed in Ref. [14].

Besides less studied than the critical behavior of *discontinuous* APTs become a topic of high interest in the last years [22–34]. Regarding the effect of disorder in such context, it was shown that uncorrelated quenched disorder affects drastically first-order APTs [25]. In analogy with the the Imry-Ma criterion [35] for equilibrium transitions, absorbing transitions become rounded in the presence of quenched disorder for $d \leq 2$. (See however the intriguing contrast with available results for the ZGB model [33]). On the other hand, some kinds of correlated quenched disorder have no effects in the nature of the discontinuous APT [34].

The effects of temporal disorder in discontinuous APTs are still less clear. Very recently it was found that, in contrast to quenched disorder, uncorrelated temporal disorder does not forbid the occurrence of discontinuous absorbing transitions in bidimensional systems [36]. More specifically, in the presence of temporal disorder, the phase transitions are signed by similar features than the pure cases, including bistability around the coexistence point, common finite size scaling behavior with the inverse of the system, and the absence of bounded Griffiths phases around phase transitions, in contrast to their pure counterparts [30]. Despite this, the occurrence of phase coexistence was verified in a system with sufficiently large disorder.

Based on a mean-field like description, we develop a simple (but general) theory for discontinuous APTs in the

Partial inertia induces an additional phase transition in the majority vote model

Pedro E. Harunari,¹ M. M. de Oliveira,² and C. E. Fiore^{1,*}

¹*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318 05315-970 São Paulo, São Paulo, Brazil*

²*Departamento de Física e Matemática, CAP, Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco-MG, 36420-000 Brazil*

(Received 21 June 2017; revised manuscript received 10 September 2017; published xxxxxx)

Explosive (i.e., discontinuous) transitions have aroused great interest by manifesting in distinct systems, such as synchronization in coupled oscillators, percolation regime, absorbing phase transitions, and more recently, the majority-vote model with inertia. In the latter, the model rules are slightly modified by the inclusion of a term depending on the local spin (an *inertial term*). In such a case, Chen *et al.* [Phys. Rev. E **95**, 042304 (2017)] have found that relevant inertia changes the nature of the phase transition in complex networks, from continuous to discontinuous. Here we give a further step by embedding inertia only in vertices with degree larger than a threshold value $\langle k \rangle k^*$, ($\langle k \rangle$ being the mean system degree and k^* the fraction restriction). Our results, from mean-field analysis and extensive numerical simulations, reveal that an explosive transition is present in both homogeneous and heterogeneous structures for small and intermediate k^* 's. Otherwise, a large restriction can sustain a discontinuous transition only in the heterogeneous case. This shares some similarities with recent results for the Kuramoto model [Phys. Rev. E **91**, 022818 (2015)]. Surprisingly, intermediate restriction and large inertia are responsible for the emergence of an extra phase, in which the system is partially synchronized and the classification of phase transition depends on the inertia and the lattice topology. In this case, the system exhibits two phase transitions.

DOI: 10.1103/PhysRevE.00.002300

I. INTRODUCTION

An explosive (discontinuous) transition occurs when an infinitesimal increase of the control parameter produces an abrupt change in macroscopic quantities. This kind of transition has attracted a lot of interest in the recent years, inspired by the discovery of a procedure (the “Achlioptas process”) that gives rise to an abrupt percolation transition in complex networks [1–4]. While subsequent works have shown the Achlioptas process transition was, in fact, a continuous phase transition with unusual finite-size scaling [5–7], many related models with alternative mechanisms showing genuinely discontinuous and anomalous transitions have now been discovered (see Ref. [8] and references therein).

One of these main examples appear in the context of coupled oscillators in which the Kuramoto model (KM) [9] plays a central role. The original KM describes self-sustained coupled phase oscillators and exhibits a continuous phase transition at a critical coupling, beyond which a collective behavior is achieved. A few years ago, in a pioneering work, Gardeñes *et al.* [10], discovered that a discontinuous phase transition to synchronization emerges as a consequence of the correlation between structure and local dynamics when a scale-free network is considered. Subsequent studies have confirmed the transition robustness under changing ingredients, such as lattice topology [10], time delay [11], disorder [12], and inertia [13]. Analysis of the explosive transition in simpler structures, such as star graphs, for which exact treatment is possible [14], also confirmed that the transition to collective behavior is discontinuous. Investigating the explosive synchronization in a generic complex network, Zhang *et al.* [15] have found that a positive correlation between the oscillators frequency and the degree of their corresponding vertices is the required condition

for its appearance. More recently, Pinto *et al.* [16] have verified that it suffices to fulfill the above minimal requirement for the hubs (e.g., the vertices with higher degrees) for promoting an abrupt transition.

Besides dynamical systems, they manifest in Markovian nonequilibrium reaction-diffusion processes. Two groups are important in this context: those presenting absorbing states and the up-down symmetric systems. In the former, distinct mechanisms, such as the inclusion of a quadratic term in the particle creation rates [17,18], the need of a minimal neighborhood for generating subsequent offsprings [19], synergetic effects in multispecies models [20,21], or cooperative coinfection of multiple diseases epidemic models [22–24], can be taken into account for shifting, from a continuous transition to a discontinuous one. In the latter, the transition can be generically related to the directed percolation (DP) universality class [25–27]) to a discontinuous one.

The Majority Vote (MV) model is one of the simplest nonequilibrium up-down symmetric systems exhibiting a second-order order-disorder phase transition [28]. Extensive studies in the MV model in distinct lattice topologies (besides the usual square and hexagonal ones) showed that the symmetry-breaking phase transition is not affected by the kind of the underlying network topology, although the critical behavior results in set of critical exponents that are entirely different [30]. However, very recently, Chen *et al.* [31] verified that the usual second-order phase transition in the majority vote (MV) becomes first-order when a term depending on the local density is included in the dynamics (an *inertial effect*).

Aimed at investigating how the network topology and inertial effects contribute to the emergence of the explosive transition in the MV model, in this work we include the inertia only in a given fraction of sites with degree k larger than a threshold $\langle k \rangle k^*$. We observe that the MV transition remains explosive only for a low or intermediate fraction of restriction k^* in homogeneous structures. On the other hand, in heterogeneous networks, it is sufficient to include inertia only

*fiore@if.usp.br



Júpiter Web - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Demonstrativo de carga horária Docente - 20161

Unidade: 43 - Instituto de Física

Prefixo: FGE - Física Geral

Docente: 2871034 - Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Carga Horária em Disciplinas

Disciplina:	4323203 1	Física III
Turma	2016105 (T)	Dedicação horária / período
	qui 15:00 - 16:40 (01:40 hora)	15/02/2016 a 30/06/2016 (18 semanas ministradas)
	ter 13:10 - 14:50 (01:40 hora)	15/02/2016 a 30/06/2016 (20 semanas ministradas)
Carga horária - Docente: 63:20 Horas		Total de docentes: 1 Alunos matriculados: 76
Carga horária da disciplina: aula: 60 h		
Carga horária total - Docente: 63:20 horas/semestre		Média semanal: 04:13 horas / semana

1 - A média semanal é obtida pela divisão da carga semestral por 15 semanas.

2 - Tipo de Turma: T - Teórica P - Prática TV - Teórica Vinculada PV - Prática Vinculada

Legenda: * - Dedicação horária quinzenal ou alternada. A carga horária do docente foi dividida por 2.

** - Disciplina anual.



Júpiter Web - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Demonstrativo de carga horária Docente - 20162

Unidade: 43 - Instituto de Física

Prefixo: FGE - Física Geral

Docente: 2871034 - Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Carga Horária em Disciplinas

Disciplina:	4323204 1	Física IV
Turma	2016204 (T)	Dedicação horária / período
	qui 15:00 - 16:40 (01:40 hora)	01/08/2016 a 10/12/2016 (19 semanas ministradas)
	ter 13:10 - 14:50 (01:40 hora)	01/08/2016 a 10/12/2016 (18 semanas ministradas)
Carga horária - Docente: 61:40 Horas		Total de docentes: 1 Alunos matriculados: 79
Carga horária da disciplina: aula: 60 h		
Carga horária total - Docente: 61:40 horas/semestre		Média semanal: 04:06 horas / semana

1 - A média semanal é obtida pela divisão da carga semestral por 15 semanas.

2 - Tipo de Turma: T - Teórica P - Prática TV - Teórica Vinculada PV - Prática Vinculada

Legenda: (*) - Dedicação horária quinzenal ou alternada. A carga horária do docente foi dividida por 2.

(**) - Disciplina anual.



Júpiter Web - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Demonstrativo de carga horária Docente - 20171

Unidade: 43 - Instituto de Física

Prefixo: FGE - Física Geral

Docente: 2871034 - Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Carga Horária em Disciplinas

Disciplina:	4323203 1	Física III
Turma	2017109 (T)	Dedicação horária / período
	qua 13:10 - 14:50 (01:40 hora)	06/03/2017 a 08/07/2017 (18 semanas ministradas)
	seg 15:00 - 16:40 (01:40 hora)	06/03/2017 a 08/07/2017 (17 semanas ministradas)
Carga horária - Docente: 58:20 Horas		Total de docentes: 1 Alunos matriculados: 1
Carga horária da disciplina: aula: 60 h		

Carga horária total - Docente: 58:20 horas/semestre

Média semanal: 03:53 horas / semana

Média semanal é obtida pela divisão da carga semestral por 15 semanas.

Legenda Turma: T - Teórica P - Prática TV - Teórica Vinculada PV - Prática Vinculada

Legenda 1 - Dedicação horária quinzenal ou alternada. A carga horária do docente foi dividida por 2.

1 - Disciplina anual.



Júpiter Web - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Demonstrativo de carga horária Docente - 20172

Unidade: 43 - Instituto de Física

Prefixo: FGE - Física Geral

Docente: 2871034 - Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Carga Horária em Disciplinas

Disciplina:	4323204 1	Física IV
Turma	2017205 (T)	Dedicação horária / período
	qui 15:00 - 16:40 (01:40 hora)	01/08/2017 a 15/12/2017 (17 semanas ministradas)
	ter 13:10 - 14:50 (01:40 hora)	01/08/2017 a 15/12/2017 (20 semanas ministradas)
Carga horária - Docente:	61:40 Horas	Total de docentes: 1 Alunos matriculados: 69
Carga horária da disciplina:	aula: 60 h	
Carga horária total - Docente:	61:40 horas/semestre	Média semanal: 04:06 horas / semana

1 - A média semanal é obtida pela divisão da carga semestral por 15 semanas.

2 - Tipo de Turma: T - Teórica P - Prática TV - Teórica Vinculada PV - Prática Vinculada

Legenda: (*) - Dedicação horária quinzenal ou alternada. A carga horária do docente foi dividida por 2.

(**) - Disciplina anual.

Transições de fase descontínuas em redes complexas

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fiore dos Santos

Instituto de Física - USP, São Paulo.

1 Resumo

O presente projeto tem como objetivo estudar diferentes transições de fase descontínuas em redes complexas: Primeiramente, pretendemos investigar a recém descoberta transição descontínua no modelo do votante majoritário com inércia. Este estudo visa compreender melhor qual(is) ingrediente(s) é(são) essencial(is) para o surgimento de uma mudança na ordem da transição. Na sequência pretendemos estudar a influência de diferentes ingredientes, dentre eles a desordem temporal no presente modelo. Finalmente, pretendemos estudar ingredientes mínimos para a ocorrência de transições descontínuas com estados absorventes em redes complexas, em conformidade com o estudo realizado em [21] para redes regulares.

2 Introdução

Transições de fase e criticalidade ocorrem tanto em sistemas em equilíbrio termodinâmico quanto em sistemas irreversíveis [1, 2, 3, 4]. Dentre os inúmeros exemplos, citamos sistemas magnéticos, ligas metálicas, cristais líquidos, cristais líquidos turbulentos, sincronização de osciladores, modelos de percolação e outros. No equilíbrio termodinâmico, os sistemas são descritos pela teoria dos *ensembles* de Gibbs. Fora do equilíbrio, há diversas abordagens, dentre elas as que descrevem os sistemas fora de equilíbrio através de processos estocásticos¹ markovianos. Duas classes importantes de sistemas descritos com esta abordagem são os processos irreversíveis com estados absorventes e aqueles com simetrias de inversão. Um estado absorvente é definido como uma configuração inativa na qual a transição para qualquer outra configuração é proibida, embora a transição de outros estados para ele possa ocorrer. Uma vez que

¹Processo estocástico é o nome dado a todo sistema governado por regras de evolução probabilísticas, ou seja, não determinísticas.

essas características não possuem um análogo na mecânica estatística de equilíbrio, elas têm atraído considerável interesse, sejam por descrever uma grande variedade de problemas, como dinâmica populacional, catálise heterogênea, crescimento de interfaces e propagação de epidemias [3, 5, 6, 7, 8] e mais recentemente pelo interesse em verificações experimentais, observadas pela primeira vez em cristais líquidos turbulentos [9].

Assim como nos sistemas em equilíbrio termodinâmico, as transições para estados absorventes podem ser categorizadas em classes de universalidade. Nesta categoria de sistemas, a classe de universalidade da percolação direcionada [3] desempenha um papel central, descrevendo sistemas com um único estado absorvente, como é o caso do processo de contato [10], o autômato celular de Domany-Kinzel [11], modelos com mais de um estado absorvente [12] ou ainda alguns processos com infinitos estados absorventes [13]. No caso de simetrias de inversão, suas regras microscópicas violam o balanço detalhado, porém eles não apresentam estados absorventes [4]. No caso das transições críticas em sistemas com simetria de inversão, uma classe diferente da percolação direcionada é encontrada, em alguns casos com um comportamento crítico similar ao modelo de Ising [14].

O processo de contato [10] é considerado um dos sistemas mais simples com transição de fase com estado absorvente. Ele é definido em uma rede onde cada sítio tem dois estados possíveis: vazio ou ocupado por uma partícula. Sua dinâmica se caracteriza pela competição entre a aniquilação espontânea de partículas e a criação catalítica das mesmas. Na versão original, é necessário apenas uma partícula vizinha a um sítio vazio para que uma nova partícula seja criada. O modelo do contato apresenta duas fases, sendo uma delas ativa, na qual partículas são criadas e destruídas, e outra absorvente (com densidade nula), onde não ocorre nenhuma atividade. Conforme mencionamos anteriormente, a transição de fases é contínua e os expoentes críticos pertencem à classe de universalidade da percolação direcionada. A partir do processo de contato, diferentes generalizações dão origem à uma variedade de resultados, dentre eles mudança no comportamento crítico [8, 6, 15], surgimento de diferentes estruturas [16], diagrama de fases reentrante [17, 18] ou ainda uma mudança na ordem da transição. Este último tem despertado considerável interesse nos últimos anos. Genericamente, transições descontínuas necessitam de um mecanismo capaz de suprimir a existência de estados de baixas densidades. De acordo com a classificação de Elgart e Kamenev [19], sistemas com uma única espécie, sem simetrias adicionais com criação catalítica de n partículas e aniquilação espontânea de k partículas representadas pelas reações $nA \rightarrow (n + m)A$ e $kA \rightarrow (k - l)A$, respectivamente apresentam transições descontínuas sempre que $k < n$. Embora ela sugere ingredientes importantes e necessários para a ocorrência de transições descontínuas,

a classificação de Elgart e Kamenev não leva em conta fatores também importantes, como dimensionalidade do sistema, topologia da rede, difusão, desordem e outros. Como disso temos as reações $2A \rightarrow 3A$ e $A \rightarrow 0$. Embora classificação é obedecida (pois $n = 2 > k = 1$), verifica-se que em uma dimensão a transição de fase é sempre contínua. Por outro lado, a extensão das regras acima para sistemas bidimensionais pode levar a uma transição descontínua [20, 21, 22]. Essa transição descontínua tem se revelado robusta com relação a inclusão de determinados ingredientes, dentre eles, diferentes mecanismos de criação e aniquilação de partículas, difusão ou ainda desordem temporal [21, 23, 24]. Com relação a este último, recentemente, um grande interesse tem despertado na inclusão de ingredientes mais realistas, a fim de descrever (ao menos de uma forma aproximada) o efeito de impurezas ou flutuações externas, bem como seu efeito em transições de fases [25, 26, 27, 28, 29, 30]. Tipicamente, estes ingredientes são levados em conta permitindo os parâmetros de controle variando espacialmente ou temporalmente. O primeiro caso, conhecido também como desordem *quenched* (temperada), afeta drasticamente a transição de fases. Nesta situação, como as taxas de criação e aniquilação variam espacialmente, o sistema pode apresentar regiões com maiores e menores atividade e portanto a fase absorvente pode conter regiões locais de grande atividade, no qual o decaimento da densidade global em direção à extinção é esperado para tempos suficientemente longos. Nestes casos, verifica-se que o decaimento é algébrico e exibe comportamento não universal. Também, o comportamento crítico é também drasticamente afetado, diferindo do comportamento comumente observado nas transições de fase contínuas. No caso de transições descontínuas, resultados recentes [29] mostraram que a coexistência de fases é destruída, tornando-se crítica, cujo comportamento é similar ao mencionado anteriormente. Na direção contrária, a desordem temporal, onde o parâmetro de controle é permitido variar com o tempo, têm sido também estudado [24, 31, 32, 33, 34], revelando que ela pode levar a uma mudança considerável no comportamento crítico, cuja classe de universalidade torna-se diferente da percolação direcionada. No caso de sistemas com simetria de inversão, a desordem temporal parece ser irrelevante em baixas dimensões [35]. Embora um certo avanço ocorreu, ressaltamos que estudos para outros sistemas são ainda necessários [31, 32, 33, 34, 36]. No caso de transições descontínuas, muito recentemente mostramos [24] que a desordem temporal, não destrói a coexistência de fases e elas podem ocorrer em baixas dimensões, preservando todas as propriedades do sistema puro (sem desordem). Uma argumentação para esta diferença seria que ao contrário da desordem espacial, em baixas dimensões (onde as flutuações são esperadas maiores) as flutuações adicionais que surgem devido a desordem temporal não são suficientes para mudar a ordem da transição. Por outro lado, em dimensões maiores, onde o efeito das flutuações devido à própria dinâmica são

menores, a desordem temporal poderia em princípio ter um efeito mais significativo e alterar a ordem da transição de fases. Ressaltamos que este estudo ainda carece de melhor compreensão bem como uma fundamentação teórica.

Um importante exemplo de sistema irreversível com simetria de inversão é o modelo do votante majoritário (VM) [14]. Assim como no processo de contato, ele é descrito numa rede por meio de um processo markoviano, no qual um dado sítio i da rede pode estar num estado “up” ($\sigma_i = 1$) ou “down” ($\sigma_i = -1$). Tal sítio da rede muda sua variável (de σ_i para $-\sigma_i$) com probabilidade dependente da opinião de sua vizinhança [4, 14]. Se a maioria de seus vizinhos estiver no estado de spin contrário, ele muda de opinião com probabilidade $1 - f$. Caso contrário, se a minoria tiver opinião contrária, ele muda de opinião com probabilidade complementar f . O VM tem sido estudado em diversas topologias de rede, tanto regulares quanto em redes complexas [37]. Em todos os casos a transição é contínua, sendo no primeiro caso pertencente a mesma classe de universalidade do modelo de Ising. Em redes complexas, uma nova classe de universalidade tem sido verificada [37]

A maioria dos exemplos acima refere-se à transições descontínuas ocorrendo em redes regulares ou ainda à transições contínuas. Recentemente um considerável interesse no estudo em redes complexas tem despertado. Em muitos casos, tem-se verificado que em redes complexas, a transição de fase pode se tornar descontínua. Destacamos os fenômenos da percolação [38, 39], e sincronização explosivas [40, 41, 42, 43] ou ainda na transição descontínua no modelo VM com inércia [44]. Neste último caso, além da opinião dos vizinhos, acrescenta-se uma probabilidade do sítio permanecer no mesmo estado, independente da opinião de seus vizinhos (inércia). Para altas taxas de inércia, a transição torna-se descontínua.

3 Metodologia e objetivos

Na primeira parte deste projeto pretendemos realizar um estudo comparativo para o modelo VM com inércia considerando redes regulares e topologias do tipo Erdős-Rényi e Barabasi-Albert com diferentes conectividades. Este estudo visa compreendermos qual(is) ingrediente(s) é(são) essencial(is) para a mudança na ordem da transição. Em seguida, pretendemos estudar a influência de diferentes ingredientes, dentre eles a desordem temporal no modelo acima mencionado. Desejamos também verificar se a inclusão destes ingredientes altera ou não a ordem da transição.

Também pretendemos estender, para redes complexas, o estudo de transições descontínuas com estados absorventes considerados em redes regulares [21, 24]. Neste caso, a existência de uma vizinhança mínima é o ingrediente que altera a ordem da transição de fase. Desejamos estabelecer se este é o caso para redes complexas.

Tomaremos como ponto de partida o estudo iniciado por Durret [22] considerando diferentes regras de criação e aniquilação de partículas. Em todos os casos, daremos destaque as simulações computacionais e aproximações de campo médio.

3.1 Metas

Temos como principais metas publicar artigos em periódicos indexados com fator de impacto superior à 1.5 e também participar de congressos, workshops e outros eventos científicos.

4 Recursos Computacionais

É importante ressaltar que os recursos computacionais do Instituto de Física da USP são suficientes para realização dos cálculos numéricos que pretendemos efetuar.

Referências

- [1] S. R. A. Salinas, (*Introdução à Física Estatística*, EDUSP, 1999).
- [2] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, (Clarendon Press Oxford 1996).
- [3] J. Marro e R. Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [4] T. Tomé e Mário J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, (EDUSP, 2001).
- [5] G. Ódor, *Universality In Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations* (World Scientific, Singapore, 2007)
- [6] M. Henkel, H. Hinrichsen e S. Lubeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions Volume I: Absorbing Phase Transitions* (Springer-Verlag, The Netherlands, 2008).
- [7] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.* **49**, 815 (2000).
- [8] G. Ódor, *Rev. Mod. Phys* **76**, 663 (2004).
- [9] K. A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chaté e M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 234503 (2007).

- [10] T.E. Harris, Ann. Probab. **2**, 969 (1974).
- [11] E. Domany e W. Kinzel, Phys. Rev. Lett. **53**, 311 (1984).
- [12] R. M. Ziff, E. Gulari e Y. Barshad, Phys. Rev. Lett. **56**, 25 53 (1986).
- [13] I. Jensen, Phys. Rev. Lett. **70**, 1465 (1993).
- [14] M. J. de Oliveira, J. Stat. Phys. **66**, 273 (1992).
- [15] R. Dickman e M. A. F. de Menezes, Phys. Rev. E **66**, 045101 (2002); S. C. Park e H. Park, Phys. Rev. Lett **94**, 065701 (2005).
- [16] T. Vojta e M. Dickison, Phys. Rev. E **72**, 036126 (2005); H. Barghathi e T. Vojta, Phys. Rev. Lett **109**, 170603 (2012).
- [17] R. Dickman, Phys. Rev. B **40**, 7005 (1989). R. Dickman, Phys. Rev. A **42**, 6985 (1990).
- [18] Carlos E. Fiore e M. J. de Oliveira, Phys. Rev. E **72**, 046137 (2005).
- [19] V. Elgart e A. Kamenev, Phys. Rev. E **74**, 041101 (2006).
- [20] E. F. da Silva e M. J. de Oliveira, Comp. Phys. Comm. **183**, 2001 (2012).
- [21] Carlos E. Fiore, Phys. Rev. E **89**, 022104 (2014).
- [22] C. Varghese e R. Durrett, Phys. Rev. E **87**, 062819 (2013).
- [23] S. Pianegonda and C. E. Fiore, J. Stat. Mech. 2015, P08018 (2015).
- [24] M. M de Oliveira and C. E. Fiore, Phys. Rev. E **94**, 052138 (2016).
- [25] G. M. Buendia and P. A. Rikvold, Phys. Rev. E **88**, 012132 (2013).
- [26] V. Bustos, R. O. Unac, and G. Zgrablich, Phys. Rev. E **62**, 8768 (2000).
- [27] D.-J. Liu, X. Guo, and J. W. Evans, Phys. Rev. Lett. **98**, 05 0601 (2007).
- [28] C. Buono, F. Vazquez, P. A. Macri e L. A. Braunstein Phys. Rev. E **88**, 022813 (2013).
- [29] P. Villa Martín, J. A. Bonachela e M. A. Muñoz, Phys. Rev. E **89**, 012145 (2014).
- [30] M. M. de Oliveira, S. G. Alves e S. C. Ferreira, Phys. Rev. E **93**, 012110 (2016).
- [31] I. Jensen, Phys. Rev. Lett. **77**, 4988 (1996).

- [32] F. Vazquez, J. A. Bonachela, C. López e M. A. Muñoz, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 235702 (2011).
- [33] T. Vojta and J. A. Hoyos, *Europhys. Lett.* **112**, 30002 (2015).
- [34] H. Barghathi, J. A. Hoyos, T. Vojta, *Phys. Rev. E* **94**, 022111 (2016).
- [35] R. M-Garcia, F. Vazquez, C. López e M. A. Muñoz, *Phys. Rev. E* **85**, 051125 (2012).
- [36] C. M. D. Solano, M. M. de Oliveira e C. E. Fiore, *Phys. Rev. E* **94**, 042123, (2016).
- [37] L. F. C. Pereira and F. G. Brady Moreira, *Phys. Rev. E* **71**, 016123 (2005).
- [38] D. Achlioptas, R. M. D.Souza, and J. Spencer, *Science* **323**, 1453 (2009).
- [39] N. A. M. Araújo e H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 035701 (2010).
- [40] J. Gómez-Grareñes, S. Gómez, A. Arenas e Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 128701 (2011).
- [41] X. Zhang, X. Hu, J. Kurths e Z. Liu, *Phys. Rev. E* **88**, 010 802(R) (2013).
- [42] R. S. Pinto e A. Saa, *Phys. Rev. E* **91**, 022818 (2015).
- [43] V. Vlasov, Y. Zou e T. Pereira, *Phys. Rev. E* **92**, 012904 (2015).
- [44] H. Chen, C. Shen, H. Zhang, G. Li, Z. Hou and J. Kurths, arXiv:1609.00469.