Unificação, Simetrias e Grupos

Representações do grupo de Poincaré no espaço de Hilbert

Arthur Xavier

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

12 de setembro de 2023

Sumário

Quântica e relatividade

Unificação?

O que cada uma dessas teorias nos fornece?

$$\text{quântica} \mapsto (\Psi, \mathcal{H})$$

$$\text{relatividade} \mapsto (\Lambda, \mathbb{R}^4)$$

Mas não se trata de uma transformação qualquer!

Simetrias em mecânica quântica

Onde a nossa descrição encontra a realidade?

$$\Psi \mapsto \Psi' = D\Psi$$

$$(\Psi', \Psi') = (D\Psi, D\Psi) = (\Psi, D^\dagger D\Psi)$$

Logo...

Teorema de Wigner: Simetrias em mecânica quântica são representadas por operadores unitários e lineares ou antiunitários e antilineares.

$$D^{-} = D^{\dagger}$$

Os operadores Λ em $\mathbb{R}^4$

$$V^\mu \mapsto V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu + a^\mu$$

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

Com η a matriz diagonal com $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$, $\eta_{22} = 1$, $\eta_{33} = 1$.

Composição

$$V \xrightarrow{(\Lambda,a)} V' \xrightarrow{(\Lambda',a')} V''$$

$$V''^{\mu} = (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\gamma})V^{\gamma} + (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu} + a'^{\mu})$$

Logo:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a')$$

Ou seja, esses operadores exibem uma estrutura interessante: a estrutura de um **grupo** (o **grupo de Poincaré**, para ser específico)

Composição

$$V \xrightarrow{(\Lambda,a)} V' \xrightarrow{(\Lambda',a')} V''$$

$$V''^{\mu} = (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\gamma})V^{\gamma} + (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu} + a'^{\mu})$$

Logo:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a')$$

Ou seja, esses operadores exibem uma estrutura interessante: a estrutura de um **grupo** (o **grupo de Poincaré**, para ser específico)

Composição

$$V \xrightarrow{(\Lambda,a)} V' \xrightarrow{(\Lambda',a')} V''$$

$$V''^{\mu} = (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\gamma})V^{\gamma} + (\Lambda'^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu} + a'^{\mu})$$

Logo:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda'a + a')$$

Ou seja, esses operadores exibem uma estrutura interessante: a estrutura de um **grupo** (o **grupo de Poincaré**, para ser específico)

Grupos de Lie e suas representações

Grupos

Um grupo G é um conjunto C dotado de uma operação $\times$ entre elementos do conjunto que satisfaz:
É fechada:

$$\forall g_1, g_2 \in C \quad g_1 \times g_2 = g_3 \in C$$

associativa:

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in C \quad g_1 \times (g_2 \times g_3) = (g_1 \times g_2) \times g_3$$

Tem elemento neutro

$$\exists e \in C \mid g \times e = e \times g = g \quad \forall g \in C$$

Tem inverso bem definido:

$$\forall g_1 \in C \;\exists g_2 \in C \;\; tq \;\; g_1 \times g_2 = e$$

Representações de Grupos

O que é uma representação de um grupo?

$$D : C \to \mathbb{L}^{\mathbb{V}}$$

$$g_1 \mapsto D(g_1)$$

Tal que o produto do grupo abstrato seja mapeado ao produto dos operadores:

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Exemplo simples: Paridade

Defino um grupo abstrato: tabela de multiplicação.

\	**e**	**p**
e	e	p
p	p	e

Uma possível representação $D : C \mapsto \mathbb{L}^{\mathbb{R}}$.

$$D(e) = 1 \ ; \ D(p) = -1$$

Representações de grupos de Lie

Grupo de Lie: elementos indexados por uma coleção $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de parâmetros contínuos. Logo:

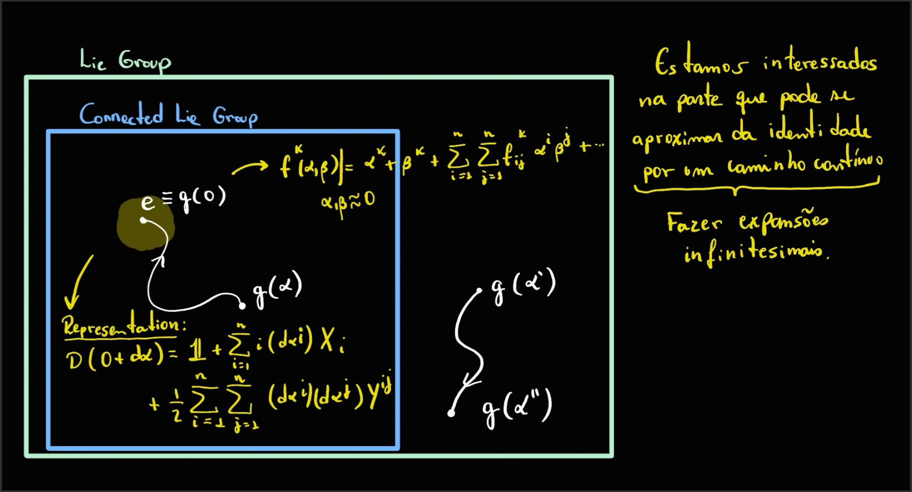
$$D(g(\alpha)) \equiv D(\alpha)$$

E a regra de composição:

$$g(\alpha)g(\beta) = g(f(\alpha,\beta)) \implies D(g(\alpha))D(g(\beta)) = D(g(f(\alpha,\beta)))$$

Para alguma função f dos parâmetros.

Onde concentramos nossos esforços?



A estrutura do grupo de Lie

Na vizinhança da identidade $e \equiv 0$:

$$D(0 + d\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^{n} i(d\alpha^i)X_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}(d\alpha^i)(d\alpha^j)Y_{ij} + \mathcal{O}(d\alpha^3)$$

Com

$$X_i = -i\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha^i}\bigg|_{\alpha=0} \; ; \; Y_{ij} = \frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial \alpha^i \alpha^j}\bigg|_{\alpha=0}$$

A estrutura do grupo de Lie

Tomando $e \equiv 0 = g(0)$, novamente na vizinhança da identidade (ou seja, para parâmetros infinitesimais) devemos ter:

$$f^k(\alpha, \beta)\big|_{\alpha=\beta=0} = \alpha^k + \beta^k + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} {f^k}_{ij}\,\alpha^i \beta^j + \dots$$

A estrutura do grupo de Lie

Assim, substituindo de volta (e adotando a convenção de Einstein para a notação):

$$D(\alpha)D(\beta) = \left(1 + i\alpha^i X_i + \frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j Y_{ij}\right)\left(1 + i\beta^i X_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j Y_{ij}\right)$$

E:

$$\begin{aligned} D(f(\alpha,\beta)) &= 1 + i\left[\alpha^i + \beta^i + f^i{}_{ab}\,\alpha^a\beta^b\right]X_i \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\alpha^i + \beta^i + f^i{}_{ab}\,\alpha^a\beta^b\right]\left[\alpha^j + \beta^j + f^j{}_{ab}\,\alpha^a\beta^b\right]Y_{ij} \end{aligned}$$

A estrutura do grupo de Lie

Dessa comparação entre a *a expansão infinitesimal dos operadores e da regra de composição* segue uma condição não trivial:

$$Y_{ij} = -i f^{a}{}_{ij} X_a - X_i X_j$$

$$\implies [X_i, X_j] = i C^{a}{}_{ij} X_a$$

Com:

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$$
$$C^{a}{}_{ij} = -f^{a}{}_{ij} + f^{a}{}_{ji}$$

Especificar essa álgebra é suficiente para calcular qualquer $D(\alpha)$ conectado à identidade por um caminho contínuo!
O que concluímos, então?

O grupo de Poincaré num espaço de Hilbert

Nosso plano

Pois bem, o que queremos fazer, exatamente? Afinal, a priori não temos acesso ao grupo de Poincaré abstrato.
Representação 'horizontal': $\mathbb{R}^4 \to \mathcal{H}$

$$[\Lambda^\mu{}_\nu + a^\mu]\, V^\mu \mapsto [D(?)]\Psi$$

Nossos parâmetros: $D(\Lambda, a)$;
Regra de composição*: $D(\Lambda', a')D(\Lambda, a) = D(\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a')$;
Mudança de referencial é uma simetria $\implies$ Operadores são unitários: $D(\Lambda, a) \equiv U(\Lambda, a)$.

Novamente na vizinhança da identidade

Depois de obter a regra de composição para o nosso grupo, queremos achar a sua álgebra. Seguiremos o mesmo raciocínio de antes. Noto que:

- $\det(\Lambda) = \pm 1$
- $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$

Separo a parte conectada à identidade $(\delta^\mu{}_\nu)$ por uma mudança contínua de parâmetros:

$$\det(\Lambda) = +1 \quad \text{e} \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

Obs: é necessário verificar que essas condições definem um subgrupo dentro do grupo de Poincaré (Grupo de Poincaré próprio ortocrono)

Novamente na vizinhança da identidade

O que seria uma expansão infinitesimal dos parâmetros nessa 'representação horizontal'?

$$(\Lambda, a) \mapsto (\delta + \omega, \epsilon)$$

Exijo que $\delta + \omega$ seja uma transformação de Lorentz $\implies \omega_{\mu\nu}$ antissimétrico.

Novamente na vizinhança da identidade

Como fizemos antes para chegar na álgebra do grupo? Precisamos confrontar a expansão infinitesimal (que carrega os geradores) com a regra de composição (que carrega a constante de estrutura).
Expansão infinitesimal:

$$U(\delta+\omega,\epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu + \mathcal{O}(\omega^2, \epsilon^2)$$

$U(\delta+\omega,\epsilon)$ unitário $\implies$ P^μ e $J^{\mu\nu}$ hermitianos.
Como ω é antissimétrico, tomamos $J^{\mu\nu}$ como antissimétrico também.
Em particular, estamos interessados em saber como esses geradores se transformam por Lorentz.

Novamente na vizinhança da identidade

Calculo:

$$U(\Lambda, a)U(\delta+\omega, \epsilon)U(\Lambda, a)^{-} =$$
$$U(\Lambda(\delta+\omega)\Lambda^{-}, \Lambda((\delta+\omega)(-\Lambda^{-}a)+\epsilon)+a)$$

$$\implies U(\Lambda, a)U(\delta+\omega, \epsilon)U(\Lambda^{-}, -\Lambda^{-}a) = U(\Lambda\omega\Lambda^{-}, -\Lambda\omega\Lambda^{-}a+\Lambda\epsilon)$$

Onde usamos que $U^{-}(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-}, -\Lambda^{-}a)$ (segue da definição de Λ) e a própria regra de composição.
Note que essa expressão tem exatamente a comparação entre os geradores e as constantes de estruturas que queremos.

Novamente na vizinhança da identidade

Expandindo todas as expressões até ordem 2 nos parâmetros infinitesimais e comparando os termos:

$$\boxed{U(\Lambda, a) P^{\mu} U^{-}(\Lambda, a) = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} P^{\nu}}$$

$$\boxed{U(\Lambda, a) J^{\mu\nu} U^{-}(\Lambda, a) = \Lambda_{\alpha}{}^{\mu} \Lambda_{\beta}{}^{\nu} [J^{\alpha\beta} - a^{\alpha} P^{\beta} + a^{\beta} P^{\alpha}]}$$

Ou seja, para uma transformação de Lorentz homogênea, P^{μ} e $J^{\mu\nu}$ são um vetor e um tensor, respectivamente.

Novamente na vizinhança da identidade^2

Os resultados anteriores nos dizem como os nossos geradores se transformam por Lorentz em geral. Podemos, entretanto, nos perguntar como eles se transformam na vizinhança da identidade:
$U(\Lambda, a) \to U(\delta + \omega, \epsilon)$.
Fazendo isso, desprezando os termos quadráticos nos parâmetros infinitesimais e usando a antissimetria de ω, chegamos na álgebra do grupo:

A álgebra do grupo de Poicaré

$$\boxed{[P^\mu, P^\rho] = 0}$$

$$\boxed{i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\sigma} J^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} J^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma}}$$

$$\boxed{i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma}$$

Que é a **álgebra do grupo de Poincaré**.

Consequências

Lembrando do fato de que os geradores precisam ser operadores hermitianos, fazemos uma associação entre as componentes dos tensores e alguns operadores relevantes em mecânica quântica:

$$(P^0, P^1, P^2, P^3) \equiv (H, \vec{P}) \text{ e } (J^{23}, J^{31}, J^{12},) \equiv \vec{L}$$

A partir daqui é possível recuperar uma série de resultados de Mecânica Quântica (Impressionante!).

Consequências

Exemplo: Considere uma translação (que é uma transformação de Loretz) $U(\delta, a)$. Podemos 'fatiar' essa transformação graças a regra de composição:

$$U(\delta, a) \equiv U(a) = U(a/N)^N$$

No limite $N \to \infty$, notamos que $U(a/N)$ é uma transformação infinitesimal

$$U(a/N) = 1 - i\frac{a_\mu}{N}P^\mu$$

, e então:

$$U(a) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{ia_\mu P^\mu}{N}\right)^N = \exp(-ia_\mu P^\mu)$$

Consequências

Em particular, se $a = (t, 0, 0, 0)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é uma variável, então segue que:

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = P^0 U(t)$$

Que é essencialmente a equação de Schrodinger (basta aplicar um ket Ψ dos dois lados).

Próximos passos

Sequência natural:
estados de uma partícula enquanto representações irredutíveis do grupo de Poincaré

$$U(\Lambda, a)\Psi = ?$$

O universo das tranformações tem pedaços fechados, e algumas representações conseguem detectar isso.
Mas muitas perguntas permanecem sem respostas (por enquanto)...little group? CPT symmetry?? Bósons e Férmions? Vetores e spinores? Projective representations?