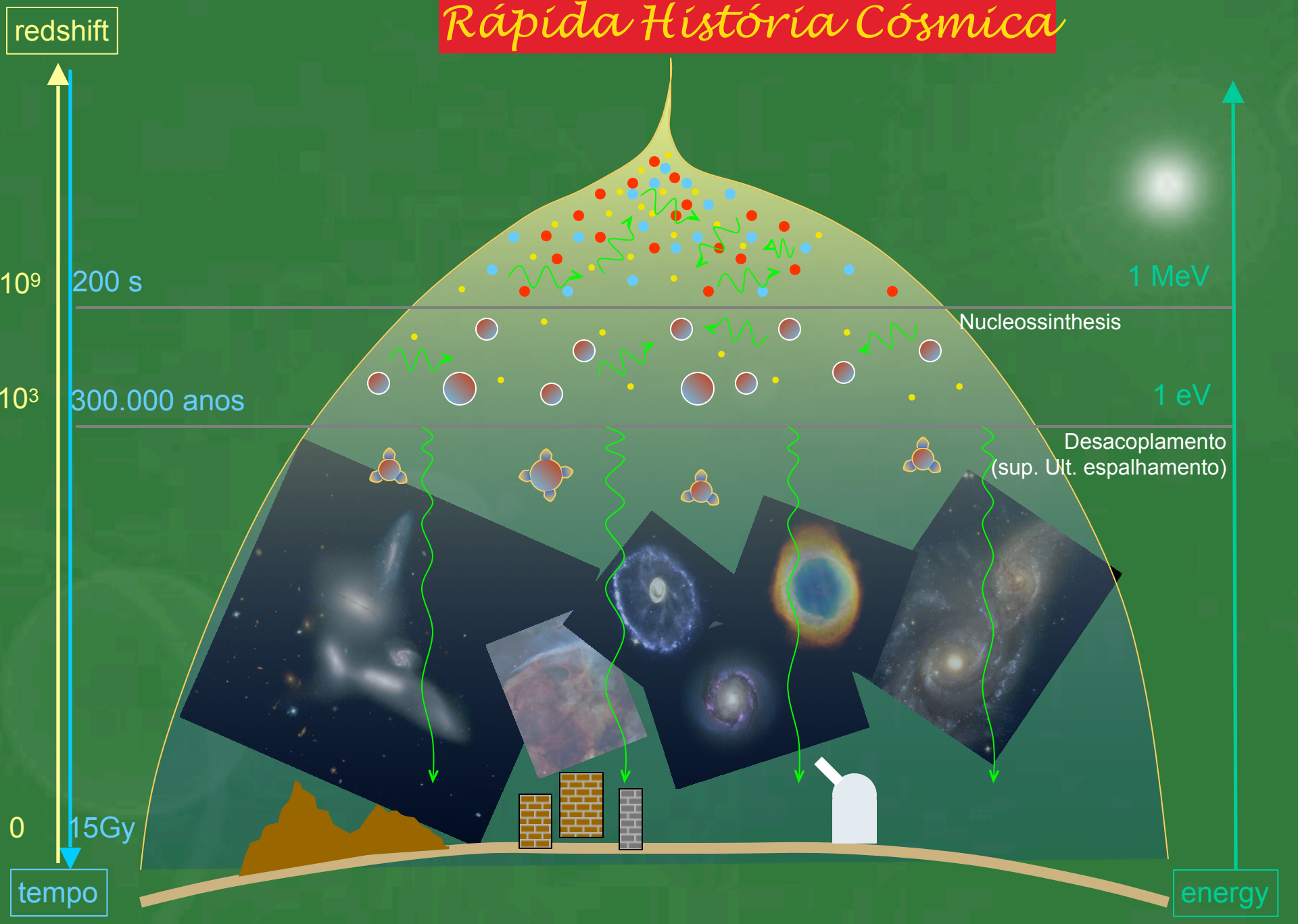
O Modelo Cosmologico Standard

- Historia rápida do Universo
- O Princípio Cosmológico
- A Relatividade Geral de Einstein
- A métrica de Friedmann-Robertson-Walker
- Propagação da Luz em FRW: horizontes, passado e futuro
- cosmologia FRW: poeira, radiação, Λ, escalares etc.
- Tempo, distância, redshift, energia e temperatura

I. Relcio Abdalla

Rápida História Cósmica



Fatos:

- Idade: $T_0 = (13.799 \pm 0.021)$Gy (LambdaCDM)
- Densidade crítica: $\rho_0 = (1.9 \pm 0.15)\ h^2 \times 10^{-29}$ g cm^{-3}
- Parametro de expansao: $H_0 = 100\ h$ Km s^{-1} Mpc^{-1}

  $h = 0.69 \pm 0.2$ (Planck); 0.73 (Supernovae)
- Fracao Barionica: $\Omega_b = \rho_b / \rho_{tot} = 0.0224\ h^{-2}$; $\rho_b = 0.24$ p ons/m3
- Fracao de Energia em radiacao (fotons e neutrinos sem massa): $\Omega_\gamma = 2.5 \times 10^{-6}\ h^{-2}$

1 pc = 3,26 l.y.
1 Mpc = 3,085 x 10^{24} cm

- Extremamente homogeneo e isotropico: $\Delta T/T \sim 10^{-5}$

O Princípio Cosmologico

Queremos estudar o universo como um todo, em suas mais largas escalas, para depois estudar detalhes locais específicos. Num primeiro instante queremos apenas descrever sua evolução, idade e geometria.

Sabemos, através da radiação cósmica de fundo (RCF), que pelo menos até a época do desacoplamento dos fótons com a matéria (quando a idade do universo era 300.000 anos), a densidade era um fluido extremamente homogêneo e isotrópico – as regiões mais densas eram apenas 0.001% mais densas que a média.

Além disso, a distribuição de galáxias fica bastante homogênea quando observada em escalas muito grandes (> 100 Mpc).

Essas constatações servem para fundamentar uma hipótese extremamente útil: o Princípio Cosmológico. Ele diz que **não existem posições nem direções privilegiadas no universo**.

I. Relcio Abdalla

Relatividade Geral

As velocidades das galáxias distantes são dadas, na lei fenomenológica de Hubble, por:

v=H0.R , onde H0= 69 km/s.Mpc

A distâncias R maiores que 1000 Mpc, a velocidade entre duas galáxias será próxima à velocidade da luz. Portanto, para descrever esse sistema é necessário empregar uma **teoria relativística**.

A mais simples teoria de campos relativística, covariante, que obedece ao princípio da equivalência, enfim, temente a Deus, é a **teoria da Relatividade Geral de Einstein**. Nessa teoria, a **métrica** de Minkowski é generalizada:

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 \rightarrow \quad ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

c=1

$$\partial_a \quad \rightarrow \quad \nabla_a$$

A gravitação é descrita pelas **equações de Einstein**:

$$G_{ab} = 8\pi G\, T_{ab}$$

Tensor de energia e momento (matéria)

Tensor de Einstein $G_{ab}[g]$ (geometria)

Constante de Newton

O tensor de Einstein é uma função da métrica do espaço-tempo. Alguns objetos úteis em espaços curvos são os seguintes, nas nossas convenções:

$$g^{ab} = g_{ab}^{-1} \quad , \quad \sum_{c=0}^{3} g^{ca} g_{cb} = \delta^{a}_{b}$$

delta de Kronecker

Conexões (símbolos de Christoffel):

índices repetidos

$$\Gamma^{c}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(g_{da,b} + g_{db,a} - g_{ab,d} \right)$$

Tensor de Riemann:

$$R^{d}_{abc} = \Gamma^{d}_{eb}\Gamma^{e}_{ac} - \Gamma^{d}_{ec}\Gamma^{e}_{ab} + \Gamma^{d}_{ac,b} - \Gamma^{d}_{ab,c}$$

Tensor de Ricci e Escalar de Ricci:

$$R_{ab} = R^{c}_{acb} \quad , \quad R = R^{a}_{a} = g^{ab} R_{ab}$$

Tensor de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$$

2.4 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A métrica maximalmente simétrica que descreve um espaço homogêneo e isotrópico é chamada Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta\, d\phi^2\right]$$

É quase sempre de grande utilidade reparametrizar o **"tempo comóvel"** ***t*** em termos do **"tempo conforme"**:

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad , \quad \eta = \int^{t} \frac{dt'}{a(t')}$$

Portanto, uma forma equivalente para a métrica FRW é:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta\, d\phi^2\right]$$

Note que, se *K*=0 (seção espacial plana), a métrica FRW é conformemente plana:

$$ds^2_{K=0} = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\vec{x}^2\right] \quad , \quad g^{K=0}_{ab} = a^2\eta_{ab}$$

• A **geometria da parte espacial** da métria FRW é dada pelo elemento de distância espacial:

$$dl^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

Definindo: $$r = \frac{1}{\sqrt{K}} sen(\sqrt{K}\chi)$$

Temos: $$dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \frac{1}{K} sen^2(\sqrt{K}\chi) d\Omega^2\right]$$

Portanto, obtemos três casos limite:

- ***K* =+1** -- a geometria é a de uma hiperesfera, com $0 \le \chi \le \pi$.
- ***K* = -1** -- a geometria é hiperbólica, com $0 \le \chi \le \infty$.
- ***K* = *0* --** a geometria é plana (euclideana), $r = \chi$.

A topologia da métrica FRW é portanto determinada pela constante ***K***:

- fechada - ***K*=+1**

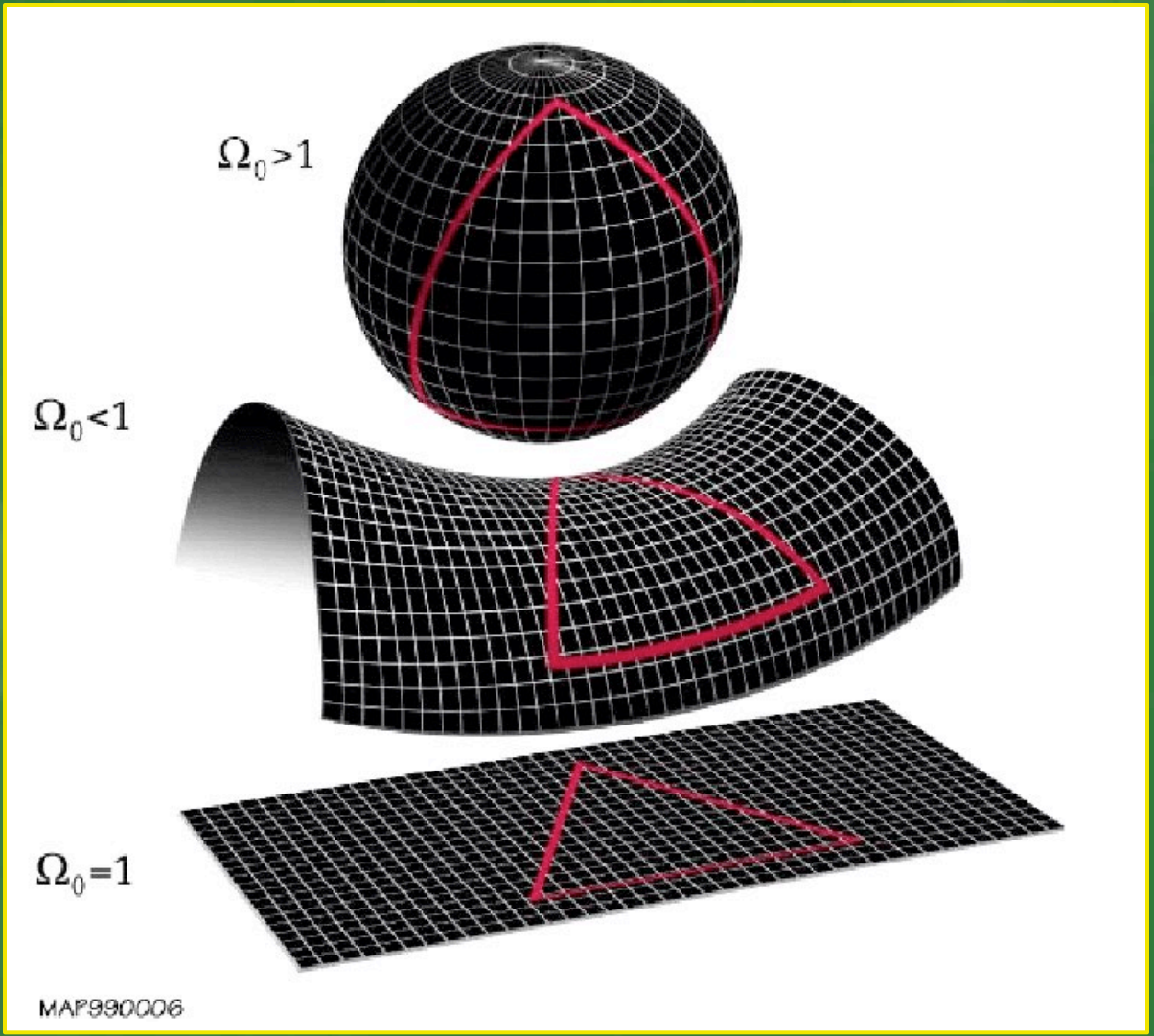
(seção espacial esférica)

- aberta - ***K*=-1**

(seção espacial hiperbólica)

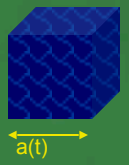
- plana - ***K*=0**

(seção espacial euclideana)



• O sistema de referencial de FRW é tal que os observadores do sistema estão em repouso (inerciais), em coordenadas (r,θ,Φ) constantes.

• O **fator de escala a(t)** mede o variação do tamanho das seções espaciais:



A **taxa de expansão** (ou **parâmetro de Hubble**) do universo é a taxa de crescimento do fator de escala, medida em tempo comóvel:

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}$$

Em termos de tempo conforme, temos:

$$H = \frac{1}{a^2}\frac{da}{d\eta} = \frac{a''}{a^2}$$

2.5 Propagação da luz em FRW: distâncias e horizontes

• O sistema de referencial de FRW não tem posições nem direções privilegiadas. Portanto, a propagação de um raio de luz radial nesse sistema de coordenadas é idêntica à propagação de qualquer outro raio.

• A propagação da luz em Relatividade Geral é trivial: como é sempre possível escolher um sistema de coordenadas que é *localmente* Minkowski, isso significa que, assim como na Relatividade Especial, raios de luz viajam por ***geodésicas nulas***, o que quer dizer simplesmente que o elemento de distância **$ds^2 = 0$** .

Portanto, um fóton se propagando através da direção radial obedece a:

$$\frac{dt^2}{a^2(t)} = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} \quad , \text{ ou} \quad d\eta^2 = d\chi^2$$

A integração é imediata:

$$\int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad , \quad |\Delta\eta| = \Delta\chi$$

A ***distância própria*** percorrida por um raio de luz de ***r=0*** até ***$r=r_1$*** é dada por:

$$d_p(t) = \int_0^{r_1} dr \sqrt{g_{rr}(r,t)} = a(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt'}{a(t')}$$

• Os objetos situados em ***r=0*** e ***r=r$_1$*** estão naturalmente em repouso, no referencial de FRW. A velocidade com que os dois se afastam é devida **somente à expansão do universo.**

• É muita vezes útil separar essas distâncias físicas em duas partes: a **distância em coordenadas**, que permanece constante; e a parte dependente do tempo, que é o **fator de escala *a(t)***. Escrevemos então:

$$d_p(t) = a(t)\, d_c$$

onde d_c é a ***distância comóvel***.

• A ***velocidade*** que separa dois pontos a distâncias comóveis fixas (ou seja, dois objetos inerciais no sistema FRW) é dada por:

$$\dot{d}_p(t) = \frac{\dot{a}}{a} d_p(t) = H(t)\, d_p(t)$$

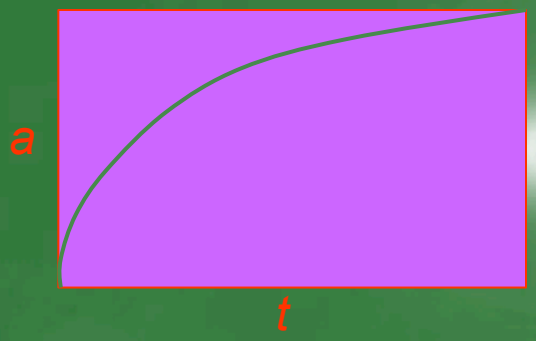
Ou seja, rededuzimos a ***Lei de Hubble*** das velocidades das galáxias distantes:

$$v = H\, d$$

• As distâncias próprias podem ser finitas mesmo quando os intervalos de tempos se extendem arbitrariamente para o passado ou para o futuro.

•Por exemplo, vamos supor que:

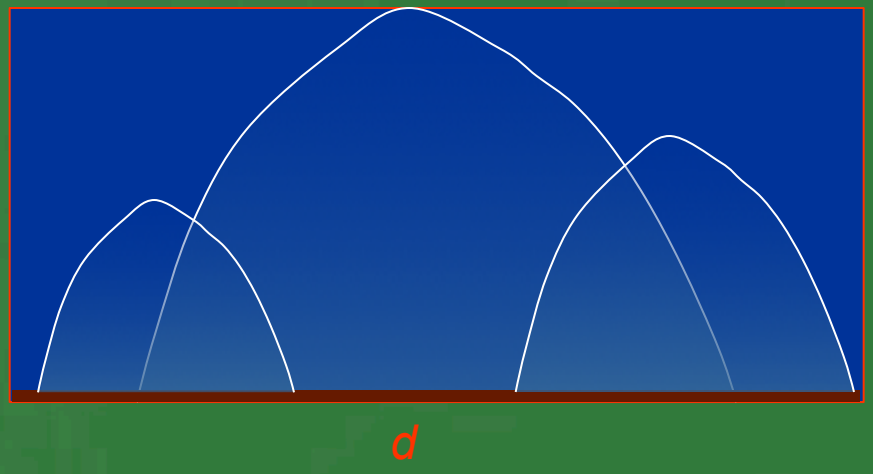
$$a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^p \quad , \quad 0 < p < 1$$



Esse espaço-tempo pode ser continuado somente até t=0 no passado (quando ***a*=0**). Temos:

$$d_{Hp}(t) = a(t)\int_0^t dt'\left(\frac{t'}{t_0}\right)^{-p} = \frac{1}{1-p}t \quad = \frac{p}{1-p}H^{-1}(t) \qquad \left[H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{p}{t}\right]$$

A distância d_H é a distância ***máxima*** percorrida por um raio de luz emitido no passado. Isso significa que o ***cone de luz passado*** é limitado, e não pode ser extendido além desse instante inicial t=0 (que corresponde a uma expansão inicial explosiva – o Big Bang!)



• Chamamos essa distância máxima de ***horizonte***. Como nesse caso (p<1) o horizonte diz respeito a uma truncagem do cone de luz no passado, ele é um ***horizonte tipo passado***, também conhecido como ***horizonte de partículas***. Veremos que esse horizonte é muito próximo do ***raio de curvatura*** do espaço-tempo de FRW com o fator de escala dado acima.

• O horizonte de partículas nos diz que observadores separados por uma distância $d_{Hp}(t)$ nunca estiveram em contato antes do instante t. Portanto, a existência de um horizonte de partículas indica que o universo tem regiões ***causalmente desconexas***.

• As regiões causalmente conexas de um universo FRW com fator de escala $a \sim t^p$ com $0<p<1$ têm um raio dado por $d_{Hp}(t)$. No passado, evidentemente, esse horizonte era ainda menor do que hoje. Isso quer dizer que no passado tinhamos acesso a uma região ainda menor do universo que a que enxergamos hoje.

• Acreditamos (ver seções seguintes) que o universo foi, durante a maior parte de sua história, descrito pelo fator de escala acima, com $p \sim 2/3$. Portanto, o horizonte de partículas seria hoje:

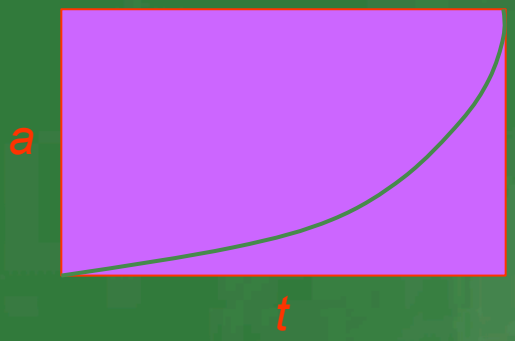
$$d_H(0) \approx c \times t_0 \approx 4600 \text{ Mpc}$$

Problema!!!
Como podemos explicar que a RCF seja tão homogênea???

☛ Exercício: compute o horizonte de partículas na época do desacoplamento (t=300.000 y), assumindo que p=1/2.
R: 184 Kpc.

•Considere agora o fator de escala:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^p \quad , \quad p > 1$$



Novamente, aparece o instante inicial t=0. Porém, agora

$$d(t) = a(t) \int_0^t dt' \left(\frac{t'}{t_0} \right)^{-p}$$

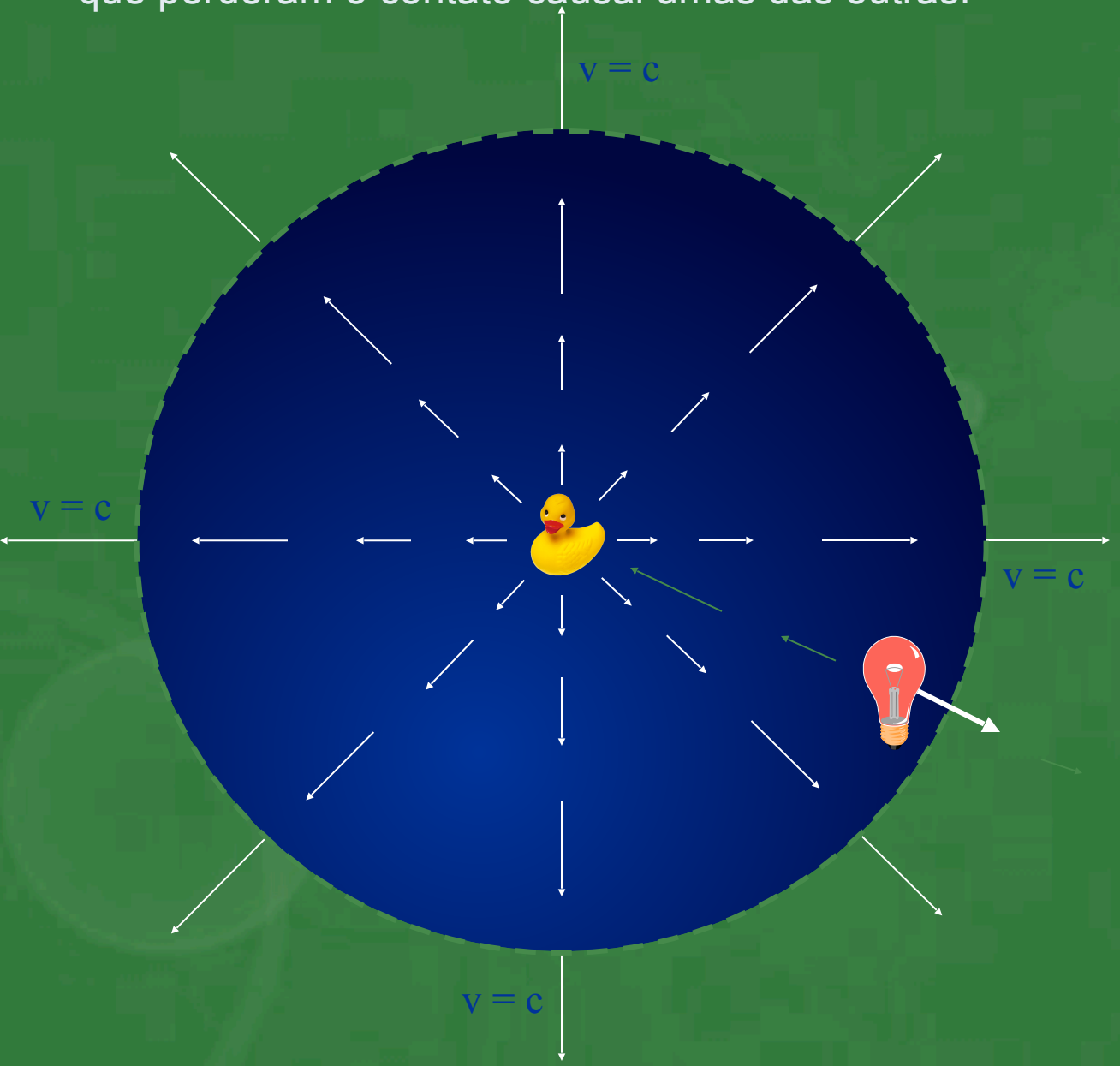
é uma distância arbitrariamente grande quando tomamos o limite inferior $t \to 0$ e portanto não existe horizonte de partículas se $p>1$.

Considere o que acontece ao tomar o limite $t \to \infty$, mantendo o limite inferior como t. Isso corresponde à seguinte pergunta: **qual a distância máxima de um objeto em relação a nós tal que, se emitirmos um sinal de luz num instante *t*, esse raio de luz ainda será capaz de chegar até o objeto?** Se essa distância máxima não for infinita, existe um novo tipo de horizonte, dado por:

$$d_{He}(t) = a(t) \int_t^\infty dt' \left(\frac{t'}{t_0} \right)^{-p} = \frac{1}{p-1} t$$

O horizonte $d_{He}(t)$ é um horizonte futuro. Ele indica que se um raio de luz for emitido num instante t, desde uma distância maior que $d_{He}(t)$, esse sinal **nunca nos atingirá** (em $r=0$). Ou seja, ***d_{He} é um horizonte de eventos***.

•O significado físico do horizonte de eventos é claro: ele separa regiões que perderam o contato causal umas das outras.



•Note que, ao contrário do que ocorre com buracos negros, o horizonte de eventos cosmológico não tem uma localização num certo local geométrico bem definido, independente do observador. Ele funciona como um arco-íris: sempre a uma certa distância do observador. Considere o caso ***p>>1***:

☛ Exercício: Mesmo quando ***p<1*** , há uma distância para a qual dois objetos estariam se separando com a velocidade da luz. Por que nesse caso não existe também um horizonte de eventos? Mostre que o critério para a existência de um horizonte de eventos é o sinal do número adimensional chamado **parâmetro de desaceleração**:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$$

Quando ***q*** é positivo (desaceleração), não há horizonte de eventos; quando ***q*** é negativo (aceleração), o horizonte aparece. No caso $a(t) \sim t^p$, o critério se torna simplesmente ***0<p<1*** (desaceleração) e ***p>1*** (aceleração).

2.6 Cosmologia de modelos Friedmann-Robertson-Walker: Matéria e geometria

• Até agora só estudamos as propriedades cinemáticas de objetos inerciais no espaço-tempo FRW. Agora vamos estudar de que modo esses espaços-tempo surgem como consequência das **equações de Einstein**.

Substituindo a métrica de FRW (expressa em coordenadas cartesianas t,x,y,z) nas expressões para o tensor de Einstein, temos o resultado de que apenas as componentes diagonais do tensor não se anulam:

$$G_{ab} = \begin{bmatrix} 3H^2 + \frac{K}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3H^2 - 2\dot{H} - \frac{K}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3H^2 - 2\dot{H} - \frac{K}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3H^2 - 2\dot{H} - \frac{K}{a^2} \end{bmatrix}$$

• No lado direito das equações de Einstein temos o tensor de energia e momento, contendo a informação sobre o conteúdo de matéria no universo. Num universo homogêneo e isotrópico, ele é dado em geral por:

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p\delta_{ab}$$

onde ***u*** é a 4-velocidade própria do fluido: u_a **= (-1,0,0,0)** . Portanto, temos:

densidade de energia

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(t) \end{bmatrix}$$

pressão

Note que isotropia e homogeneidade são manifestos tanto em G_{ab} quanto em T_{ab}. Em ambos os casos:

• os tensores são funções apenas do tempo (homogeneidade);

• as componentes espaciais (x,y,z) dos tensores são idênticas (sem direções preferidas).

• As equações de Einstein, $G_{ab} = 8\pi G\, T_{ab}$, portanto se reduzem a apenas **duas** equações diferenciais acopladas, as chamadas **Equações de Friedmann**:

$$3H^2 + \frac{K}{a^2} = 8\pi G\, \rho$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{K}{a^2} = -8\pi G\, p$$

Note que apenas a segunda equação de Friedmann é de **segunda ordem** no fator de escala (isto é, contém uma segunda derivada de ***a***) e portanto determina a dinâmica dos modelos FRW. A primeira equação, por ser de primeira ordem, expressa apenas um vínculo, ou seja, uma condição que deve ser obedecida pela solução explícita de a(t) (essa equação também é conhecida como **vínculo da energia**). Mesmo assim, muitas vezes conseguimos obter a solução cosmologicamente interessante para a(t) apenas inspecionando a primeira equação.

• O tensor de energia e momento da matéria obedece a uma lei de conservação, $\nabla_a T^a{}_b = 0$, que nesse caso se resume à **equação da continuidade**:

$$dE = -p\,dV$$

$$dE = d(\rho V) = V\,d\rho + \rho\,dV$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}(\rho + p) = 0$$

$$V \propto a^3(t)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

• Em geral, temos **várias formas de matéria** coexistindo e gravitando juntas. Na ausência de criação de um tipo de matéria às custas de outro tipo, cada forma de matéria obedece separadamente a uma equação de continuidade:

$$\dot{\rho}_X + 3H(\rho_X + p_X) = 0$$

• Diferentes formas de matéria têm diferentes relações entre a densidade de energia e pressão. É útil definir um parâmetro chamado **equação de estado**:

$$w_x = \frac{p_x}{\rho_x}$$

As formas mais simples de matéria no universo têm uma equação de estado **constante**. São elas:

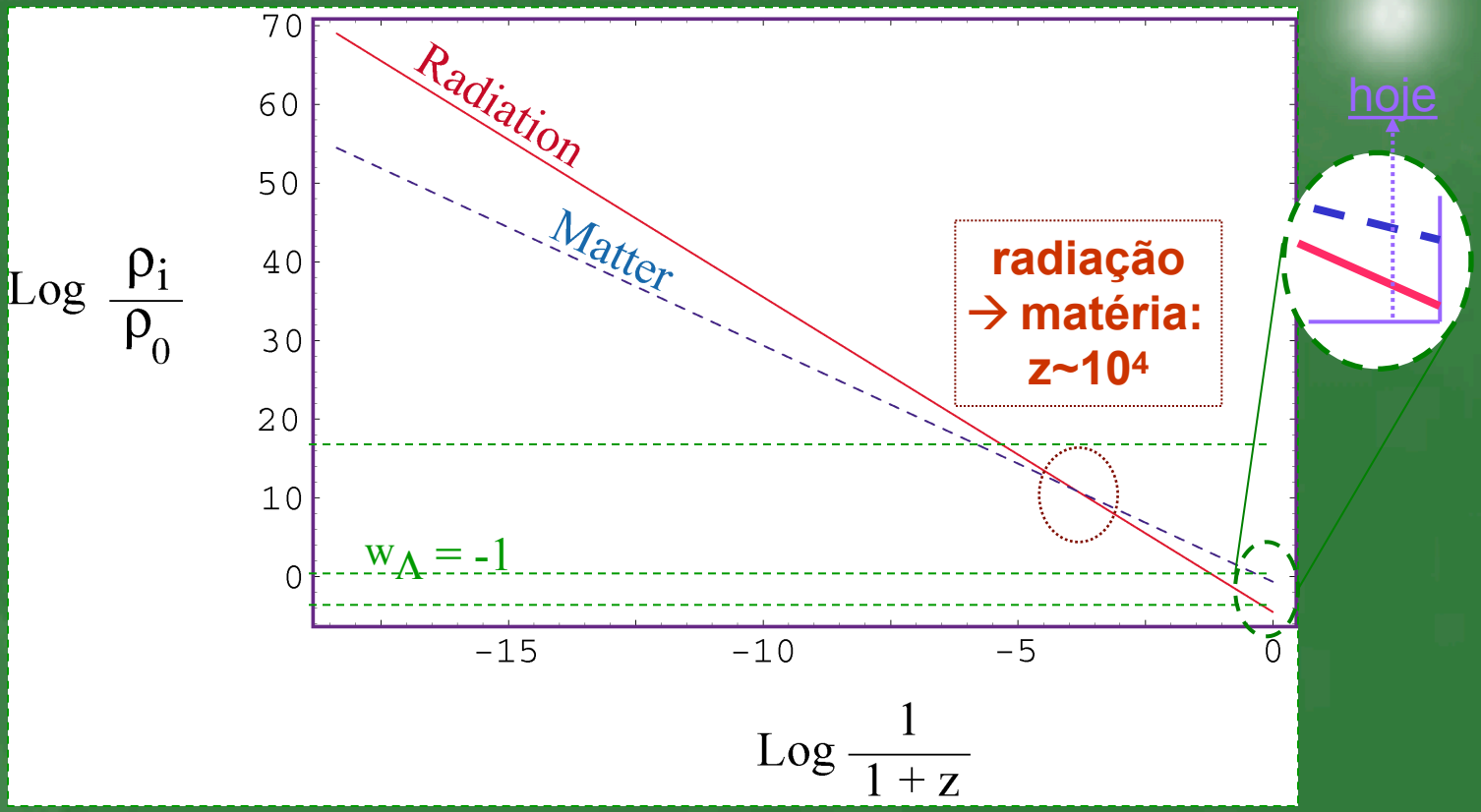
- **poeira** (ou matéria fria, ou somente matéria) $w_m=0$
- **radiação** (ou matéria ultra-relativística) $w_r=1/3$
- **energia de vácuo** (ou constante cosmológica) $w_\Lambda=-1$

Se w_X constante, podemos integrar a equação da continuidade diretamente:

$$\rho_X = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_X)}$$

$$\begin{cases} \rho_m \propto a^{-3} \\ \rho_r \propto a^{-4} \\ \rho_\Lambda \propto a^{0} \end{cases}$$

- Sabendo que hoje em dia a radiação responde por aproximadamente 2,5 x 10^{-6} da densidade de energia total, podemos reconstruir a história cósmica:



$1+z = a_0/a$