Gravitação e Cosmologia

Elcio Abdalla

Instituto de Física-Universidade de São Paulo

2011

Considero aqui os princípios que nortearam a formulação da Relatividade Geral, suas consequências, e posteriormente questões mais modernas sobre Cosmologia. Ao final, comentamos aspectos mais modernos sobre a formação do Universo.

Principais referencias originais: S. Weinberg, Misner, Thorne, Wheeler, trabalhos de pesquisa. D Inverno

Resumo

Introdução/ A Mecanica Classica

A mecânica clássica nasceu de algumas observações importantes legadas por Galileu e das Leis de Newton. Galileo observou que em uma linguagem transladadas para conceitos modernos que

1. Um corpo em movimento retilíneo e uniforme continuará, na ausência de "forças" (ou seja, caso estiver isolado) em seu estado de movimento, perpetuamente.
2. Sob a ação da gravidade corpos diferentes caem com a mesma aceleração.
3. O movimento dos corpos pode ser descrito por um sistema cartesiano. Dois sistemas que difiram por uma rotação fixa, ou por uma velocidade relativa constante são fisicamente equivalente.

Podemos dizer que o corpo é descrito por uma terna de números
$(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$ e pelo tempo t.

Sistemas equivalentes por rotação:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$

Transformações de Galileo

Sistemas que diferem por uma velocidade $\vec{v}$:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t$$
$$t' = t$$

Transformações de Galileo

Sistemas que diferem por uma velocidade $\vec{v}$:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t$$
$$t' = t$$

As últimas são ditas transformações de Galileo.

Transformações de Galileo

Sistemas que diferem por uma velocidade $\vec{v}$:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t$$
$$t' = t$$

As últimas são ditas transformações de Galileo.

Newton

A contribuição de Newton se dá ao postular que há um elemento chamado "força", $\vec{F}$; responsável pelo movimento. A força é proporcional à variação temporal da velocidade, ou seja, à aceleração. A constante de proporcionalidade é a massa inercial. Assim sendo,

$$\vec{F} = m_i \vec{a} = m_i \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2}$$

Há que se dar a força nos casos de interesse físico. O caso mais fundamental nos tempos de Newton era a força gravitacional. Newton postulou que

$$\vec{F} = -G\,\frac{Mm_g}{r^2}\,\hat{r} = \frac{-GMm_g\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\,,$$

onde $m_g \equiv m$ e M são as massas gravitacionais dos corpos, e G uma constante universal. Da segunda observação de Galileo anteriormente citada, a massa gravitacional é identificada com a massa inercial.

As Leis de Kepler

A verificação das Leis de Newton se dá através da constatação das Leis de Kepler, derivadas das observações de Tycho Brache:

1. As órbitas são elípticas.
2. As áreas varridas pelos planetas em seus movimentos são sempre as mesmas, em um determinado período de tempo.

As Leis de Kepler

A verificação das Leis de Newton se dá através da constatação das Leis de Kepler, derivadas das observações de Tycho Brache:

1. As órbitas são elípticas.
2. As áreas varridas pelos planetas em seus movimentos são sempre as mesmas, em um determinado período de tempo.
3. O quadrado do período é proporcional ao cubo do raio de revolução para todos os planetas em torno do sol.

As Leis de Kepler

A verificação das Leis de Newton se dá através da constatação das Leis de Kepler, derivadas das observações de Tycho Brache:

1. As órbitas são elípticas.
2. As áreas varridas pelos planetas em seus movimentos são sempre as mesmas, em um determinado período de tempo.
3. O quadrado do período é proporcional ao cubo do raio de revolução para todos os planetas em torno do sol.

Solução da Equação de Newton

$$-GMm\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Multiplicando-se a equação acima por $\frac{d\vec{x}}{dt}$ temos o resultado

$$m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} + GMm\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\dot{\vec{x}} = 0 \quad ,$$

de onde segue a conservação da energia,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{GMm}{|\vec{x}|}\right) = 0 \quad ,$$

Solução da Equação de Newton

$$-GMm\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Multiplicando-se a equação acima por $\frac{d\vec{x}}{dt}$ temos o resultado

$$m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} + GMm\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\dot{\vec{x}} = 0 \quad ,$$

de onde segue a conservação da energia,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{GMm}{|\vec{x}|}\right) = 0 \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{GMm}{|\vec{x}|} = E = \text{constante}$$

Temos ainda a equação

$$\frac{d}{dt}(m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}) = m\vec{x} \wedge \ddot{\vec{x}} = -GMm\frac{\vec{x} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 0$$

que decorre do fato da força ser central, ou seja, só depende da distância radial, e está na direção radial.

ou seja,

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{GMm}{|\vec{x}|} = E = \text{constante}$$

Temos ainda a equação

$$\frac{d}{dt}(m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}) = m\vec{x} \wedge \ddot{\vec{x}} = -GMm\frac{\vec{x} \wedge \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 0$$

que decorre do fato da força ser central, ou seja, só depende da distância radial, e está na direção radial.

A primeira é a lei de conservação de energia, a segunda, a lei de conservação do momento angular. Notemos que, para uma órbita qualquer,

$$|m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}\Delta t| = |m\vec{x} \wedge \Delta\vec{s}| = 2m\Delta A$$

onde ΔA é a área variada.

Portanto

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{constante},$$

que é a 1^a lei de Kepler (Lei das áreas).

A primeira é a lei de conservação de energia, a segunda, a lei de conservação do momento angular. Notemos que, para uma órbita qualquer,

$$|m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}\Delta t| = |m\vec{x} \wedge \Delta\vec{s}| = 2m\Delta A$$

onde ΔA é a área variada.

Portanto

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{constante},$$

que é a 1^a lei de Kepler (Lei das áreas).

Além disto, como $\vec{L}$ = constante (por exemplo na direção do eixo $x_3 = Z$) o movimento é planas (por exemplo no plano $(x_1, x_2) \equiv (x, y')$).

Assim, a velocidade ao quadrado é

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$L = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

A lei de conservação de energia fica sendo

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

ou seja:

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2\sqrt{\frac{2Em}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{rL^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\sqrt{\frac{2Em}{L^2} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2GM(\frac{1}{r})m^2}{L^2}}$$

Fazendo-se $x = 1/r$, temos:

$$\frac{d}{d\theta}x = -\sqrt{\frac{2Em}{L^2} - x^2 + 2GMx\frac{m^2}{L^2}} = -\sqrt{-(x - x_+)(x - x_-)}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{2GMm^2}{L^2}\right)^2 + \frac{8Em}{L^2} \\
x_\pm &= \frac{GMm^2}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right) + \frac{2Em}{L^2}} \\
&= \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\right)
\end{aligned}$$

Fazendo-se $x = 1/r$, temos:

$$\frac{d}{d\theta}x = -\sqrt{\frac{2Em}{L^2} - x^2 + 2GMx\frac{m^2}{L^2}} = -\sqrt{-(x - x_+)(x - x_-)}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{2GMm^2}{L^2}\right)^2 + \frac{8Em}{L^2} \\
x_\pm &= \frac{GMm^2}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right) + \frac{2Em}{L^2}} \\
&= \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\right)
\end{aligned}$$

Solução por Quadratura

$$\theta = -\int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_+)(x-x_-)}}$$

$$x = a + b\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-a}{b}$$

Solução por Quadratura

$$\theta = -\int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_+)(x-x_-)}}$$

$$x = a + b\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-a}{b}$$

$$\dot{x} = -b\sin\theta = -b\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} = -\sqrt{-x^2+2ax+b^2-}$$

$$b^2 - a^2 = \frac{2E}{L^2}$$

$$a = \frac{GMm^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{2Em}{L^2} + \frac{G^2M^2m^4}{L^4}$$

$$x = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 + \frac{2EL^2m}{(GMm^2)^2}\right)^{1/2} cos\theta$$

$$= \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 + \varepsilon cos\theta\right)$$

1. $E > 0, \varepsilon > 1 \Rightarrow$ hiperbole
2. $E = 0, \varepsilon = 1 \Rightarrow$ parábola
3. $E < 0, \varepsilon < 1 \Rightarrow$ elipse

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{GMm^2}{L^2}(1+\varepsilon)$$

$$r_+ + r_- = \frac{L^2}{GMm^2}\frac{2}{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{GMm^2}\frac{2G^2m^3M^2}{2EL^2}$$

Semi eixo maior:

$$R_> = \frac{GMm}{|E|}$$

Período

$$\int dt = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}}} =$$

$$= \int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{2E}{m} r^2 + 2GMr - \frac{L^2}{m^2}}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{rdr}{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)}} = t$$

Relação entre período e Energia

$$r^2-(r_+ + r_-)r + r + r_- = \left(r - \frac{r_+ + r_-}{2}\right)^2 - \frac{r_+^2}{4} - \frac{r_-^2}{4} + \frac{1}{2}r + \frac{r_-}{2}2$$

$$= \left(r - \frac{r_+ + r_-}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(r_+ - r_-)^2$$

$$\int_{r_-}^{r_+} \frac{rdr}{\sqrt{-(r-\xi_+)^2 + \frac{1}{4}\xi_-^2}} = \int_{r_- - \xi_+}^{r_+ - \xi_+} \frac{(\xi_+ + y)dy}{\sqrt{-y^2 + (\frac{\xi_-}{2})^2}} = \int (\xi_+ +$$

$$= 2\xi_+ \; arc \; cos \; \frac{2}{\xi_-}\xi_- = 2\pi\xi_+ = \pi(r_+ + r_-)$$

$$T = \pi(r_+ + r_-) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\pi\frac{GMm}{|E|}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = 2\frac{m^3\pi^2G^2M^2 \quad \not|E|^3}{\not|E|^3G^2M^3m^3} = \frac{2\pi^2}{GM}$$

que é a Outra Lei de Kepler

O Eletromagnetismo Clássico e a Relatividade.

As equações de Newton são tais que, dada a força, sabemos a equação de movimento resultado, através de uma equação diferencial do tipo

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{x}) = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

No caso do Eletromagnetismo tal equação dificilmente é de fato utilizada, já que o próprio deslocamento das cargas muda os campos, e como

$$\vec{\mathcal{F}}_{em} = e\left(\vec{E}(\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B}(\vec{x})\right)$$

o lado esquerdo também muda. É necessário então haver equações que definam $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B}(\vec{x}.t)$ como funcionais de $\vec{x}$ e t, através de equações diferenciais.

Equações de Maxwell

São estas as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} &= 4\pi\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Conservação da carga: $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

É essencial verificar a veracidade das Leis de Galileo/Newton para as equações acima. Como as equações estão escritas através de igualdade de vetores tridimensionais e de escalares (sob rotação) é obvio que as leis são covariantes sob rotações $x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$.

No entanto, parece claro que as transformações de Galileo

$$\begin{aligned} \vec{x'} &= \vec{x} + \vec{v}t \\ t' &= t \\ \frac{\partial}{\partial x_i'} &= \frac{\partial}{\partial x_i'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

não conservam a forma das equações acima.

É essencial verificar a veracidade das Leis de Galileo/Newton para as equações acima. Como as equações estão escritas através de igualdade de vetores tridimensionais e de escalares (sob rotação) é obvio que as leis são covariantes sob rotações $x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$.

No entanto, parece claro que as transformações de Galileo

$$\begin{aligned} \vec{x'} &= \vec{x} + \vec{v}t \\ t' &= t \\ \frac{\partial}{\partial x_i'} &= \frac{\partial}{\partial x_i'} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

não conservam a forma das equações acima.

Para se obter as leis de covariância consideramos a solução

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
\vec{B} &= \nabla \wedge \vec{A} \\
& \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

Leis de Transformação.

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \\
y' &= y \qquad z' = z \\
t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
A'_x &= \frac{A_x - v\varphi/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
A'_y &= A_y \qquad A'_z = A_z \\
\varphi' &= \frac{\varphi - vA_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned}
$$

Sendo $\eta_{\mu\nu}$ a matriz

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $u^\mu = (\vec{x}, ct)$

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu_\nu x^\nu \, , \sum_{\nu,\sigma}^{3} a^\mu_\nu a^\rho_\sigma \eta^{\nu\sigma} = \eta^{\mu\rho}$$

De um modo geral, a é uma rotação comum, ou seja

$$[a^{\mu}_{\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & [a_{ij}] & \end{bmatrix}$$

ou uma rotação que inclue o tempo, o que é uma transformação de Lorentz arbitrárias, isto é

$$[a^{\mu}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & 0 & 0 & \frac{v/c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{bmatrix}$$

Para $c \longrightarrow \infty$, recaimos nas transformações de Galileo.
$c = 3 \text{ x } 10^8 \ m/s$, grande demais para o mundo cotidiano.

A Teoria da Relatividade Especial

A observação fundamental é que as transformações de um observador a outro não podem depender da lei considerada. Portanto reformula-se a mecânica clássica. Os vetores passam a incluir o tempo:

$$x^{\mu} = (ct, \vec{x}) \quad .$$

Consequências:
Dilatação do tempo
Contração do espaço
Verificações experimentais

A Teoria da Relatividade Geral

A teoria da Gravitação de Newton é obviamente invariante pelas transformações de Galileo, já que não há mistura da variavel tempo em

$$-\nabla\left(-\frac{GMm}{|\vec{x}|}\right) = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

e não é invariante por transformações de Lorentz.

Tendo em vista a Relatividade Especial, onde o tempo comporta-se como o espaço, Einstein postulou que o espaço-tempo não é mais Euclidiano. Além disto, tendo em vista o fato experimental que a massa inercial e a massa gravitacional são iguais, uma partícula em queda livre em um campo gravitacional é localmente equivalente a um observador

A Teoria da Relatividade Geral

A teoria da Gravitação de Newton é obviamente invariante pelas transformações de Galileo, já que não há mistura da variavel tempo em

$$-\nabla\left(-\frac{GMm}{|\vec{x}|}\right) = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

e não é invariante por transformações de Lorentz.

Tendo em vista a Relatividade Especial, onde o tempo comporta-se como o espaço, Einstein postulou que o espaço-tempo não é mais Euclidiano. Além disto, tendo em vista o fato experimental que a massa inercial e a massa gravitacional são iguais, uma partícula em queda livre em um campo gravitacional é localmente equivalente a um observador

O Principio de Mach

Um último ponto de importância é o Princípio de Mach. Este refere-se fundamentalmente a sistemas em rotação. Newton considerava que sistemas em rotação apresentavam uma aceleração intrínseca, devido ao espaço absoluto. Ele demostrava a existência de uma "força centrífuga" através da rotação de um balde cheio de água, pendurado por uma corda.

Leibniz (1646 - 1716) e outros arguiram contra o espaço absoluto: Ernst Mach (1836 - 1916) argumenta que o balde está girando em relação às massas no infinito, e que em uma experiência impossível de ser realizada onde o mundo estivesse vazio o balde não mostraria qualquer sinal de aceleração ao ser girado.

É claro que esta discussão era bastante mais filosófica que física. Note-se ainda, que entre os debatedores (Euler, Kant, Berkeley, Mach) há filósofos e matemáticos.

No entanto ela é útil ao mostrar que o conceito de aceleração absoluta pode carecer de sentido, não sendo tão óbvio como parece.

Forças

A inclusão de forças gravitacionais na Relatividade se dá com uma equação que leva em conta estas idéias, dizendo que há um sistemas de coordenadas ξ^α onde a partícula esta livre de forças, ou seja não está acelerada, em relação a seu tempo próprio τ, definida como

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

portanto

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad .$$

Como $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$, onde x^θ é o sistema onde se mede a aceleração (sistemas de laboratório) temos

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,\end{aligned}$$

onde supomos válida a notação de Einstein, onde indices repetidos são somados, ou seja

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$$

Como

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu,$$

temos

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

onde

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho}$$

Reescrevemos ainda o tempo próprio como

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

Relação entre $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ e $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}\eta_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\, g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = 2 g_{\kappa\nu} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta} \left\{ \partial_\nu g_{\rho\delta} + \partial_\rho g_{\nu\delta} - \partial_\delta g_{\nu\rho} \right\}$$

No limite Newtoniano $\tau \approx ct, x^0 \simeq ct, \frac{dt}{d\tau} \approx 1$

$$\frac{d^2\vec{x}^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}c^2$$

$$\left(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad |h| \ll | \right) \Rightarrow h_{00} \simeq -2\frac{\phi}{c^2}$$

Portanto $g_{00} \simeq -1 - \frac{2\phi}{c^2}$.

Dilatação do Tempo

$$\Delta t_{prop} = \left(-\eta_{\alpha\mu} d\xi^{\alpha} dg^{\beta} \right)^{1/2}$$

$$= \left(-g_{\mu\nu} dx^{\lambda} dx^{\nu} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dt}{\Delta t} = \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt} \right)^{-1/2} = \left(-g_{00} \right)^{-1/2}$$

$$dt_2 = \Delta t \left(-g_{00}(x_2) \right)^{-1/2}$$

$$dt_1 = \Delta t \left(-g_{00}(x_1) \right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_1}{\nu_2} = \left(\frac{g_{00}(x_1)}{g_{00}(x_2)} \right)^{1/2}$$

Para

$$g_{00} \simeq -1 - \frac{2}{c^2}\varphi, \frac{\varphi}{c^2} \ll 1$$

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{c^2}$$

$$\phi_{sol} = -\frac{GM_{sol}}{c^2 R_{sol}} \Rightarrow \frac{\phi_{sol}}{c^2} = -2 \cdot 12 \times 10^{-6}$$

Equações de Einstein

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\delta}\Gamma^{\delta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\rho\delta}\Gamma^{\delta}_{\nu\sigma}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

Soluções das Equações de Einstein.

Um grande número de soluções das equações de Einstein é conhecido. Vamos considerar algumas das mais importantes.

Soluções esfericamente simétricas.

Soluções esfericamente simétricas descrevam a curvatura do espaço tal como provocada por uma distribuição restrita de materia.

A métrica $g_{\mu\nu}$ não é um conjunto de funções univocamente definidas. Há uma arbitrariedade relacionada à redefinição das coordenadas (invariância por transformações gerais de coordenadas).

Para $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$

Pode-se usar a invariância por transformações gerais de coordenadas para colocar $g_{\mu\nu}$ sob uma forma mais simples. Para uma solução das equações de Einstein esfericamente simétrica, usamos a métrica

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 &= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\
&= B\left(r,t\right) dt^2 - A\left(r,t\right) dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2 \right)
\end{aligned}
$$

Calculamos as conexões afim:

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{A'}{2A} \equiv \frac{1}{2} g^{rr} \left\{ \partial_r g_{rr} \right\}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}$$

$$\Gamma^r_{00} = \frac{B'}{2A}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{0}_{rr} = \frac{\dot{A}}{2B}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{r\ sin^2\ \theta}{A}$$

$$\Gamma^{r}_{r0} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\ sin\ \theta\ cos\ \theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = -cot\theta$$

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$\Gamma^{0}_{0r} = \frac{B'}{2B}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} \\
&- \frac{\ddot{A}}{2B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4B^2} + \frac{\dot{A}^2}{4AB}
\end{aligned}
$$

$$
R_{\theta\theta} = -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB}
$$

$$R_{tr} = -\frac{\dot{A}}{Ar}$$

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar}$$

$$+ \frac{B'^2}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4AB}$$

Fora de uma distribuição de matéria: $R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \dot{A} = 0$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{r}\frac{A'}{A}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{A}$$

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{r}\frac{B'}{A}$$

$$\frac{R_{rr}}{A}+\frac{R_{00}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right) =$$
$$= -\frac{1}{rA}\frac{d}{dr}\left(\ln AB\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(AB\right)' = 0 \Rightarrow AB = cte$$

$$r \rightarrow 00: \quad A \approx 1 \approx B \quad \Rightarrow \quad AB = 1$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'r + B = -1 + \frac{d}{dr}\left(Br\right) = 0$$

$$B = 1 + \frac{C}{r}$$

Potencial Newtoniano: $C = -\frac{GM}{c^2}$

Portanto

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Esta é a solução de Schwarzschild.

Outras soluções analogas: buracos negros com carga (Q) e na presença de uma constante cosmológica (Λ)

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2\right) dt^2 \\
&- \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2
\end{aligned}
$$

Estrelas.

Para uma distribuição que diremos "normal" de matéria, esta é a solução FORA da distribuição. Por exemplo, a métrica fora da terra, ou de uma estrela. O potencial de Newton sai diretamente, assim como correções relativísticas.

Dentro da estrela: é necessário saber a equação de estado da estrela para definir o lado direito da equação de Einstein,

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

e $p(\xi)$ define uma equação de estado. Por exemplo (estrelas politrópicas) ϕ

$$p = a\rho^{\gamma}$$

onde p é a pressão e ρ a densidade de energia.

Buracos Negros.

Para massas demasiadamente concentradas, isto é, em um raio

$$r_c < \frac{2GM}{c^2}$$

Temos um comportamento bastante atípico.

$$d\tau^2 = \left(\frac{2GM}{r} - 1\right)^{-1} dr^2 - \left(\frac{2GM}{r} - 1\right) dt^2 - r^2 d\Omega^2$$

O tempo de fato passa a ser medida pela variável r, de modo que, passando do horizonte de eventos r_c, o sujeito cai inexoravelmente para $r = 0$.

Diagrama de queda no Buraco Negro.

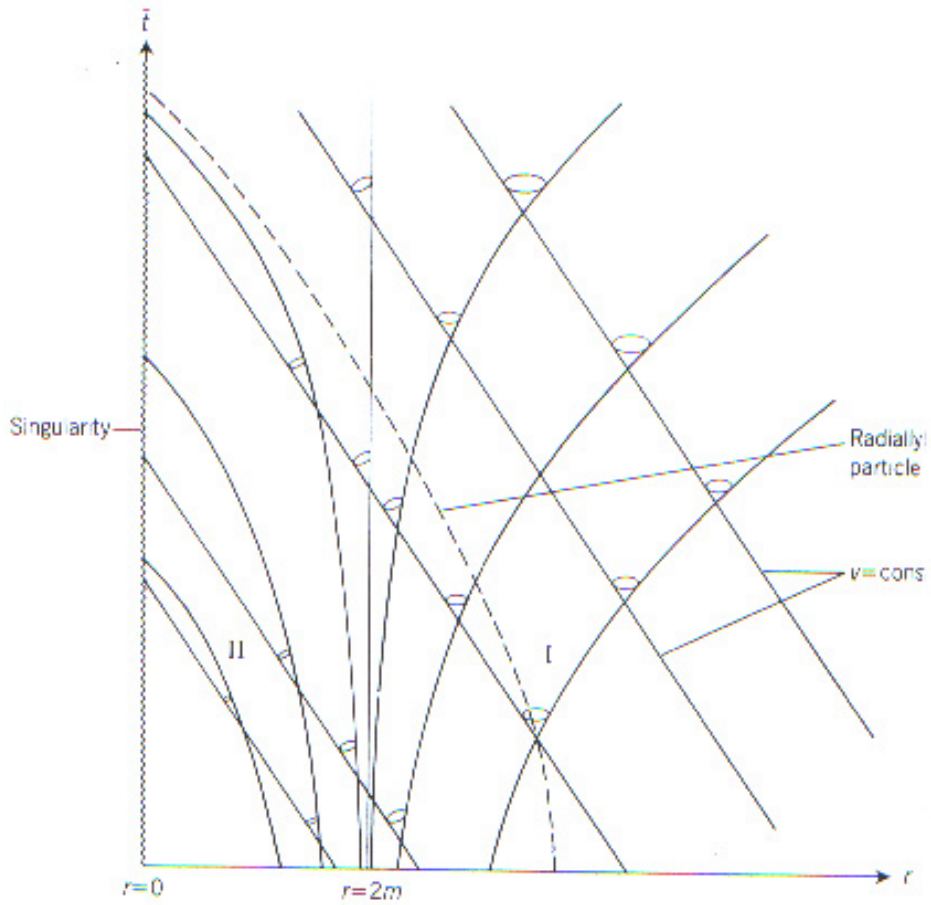


Diagrama de queda no Buraco Negro.

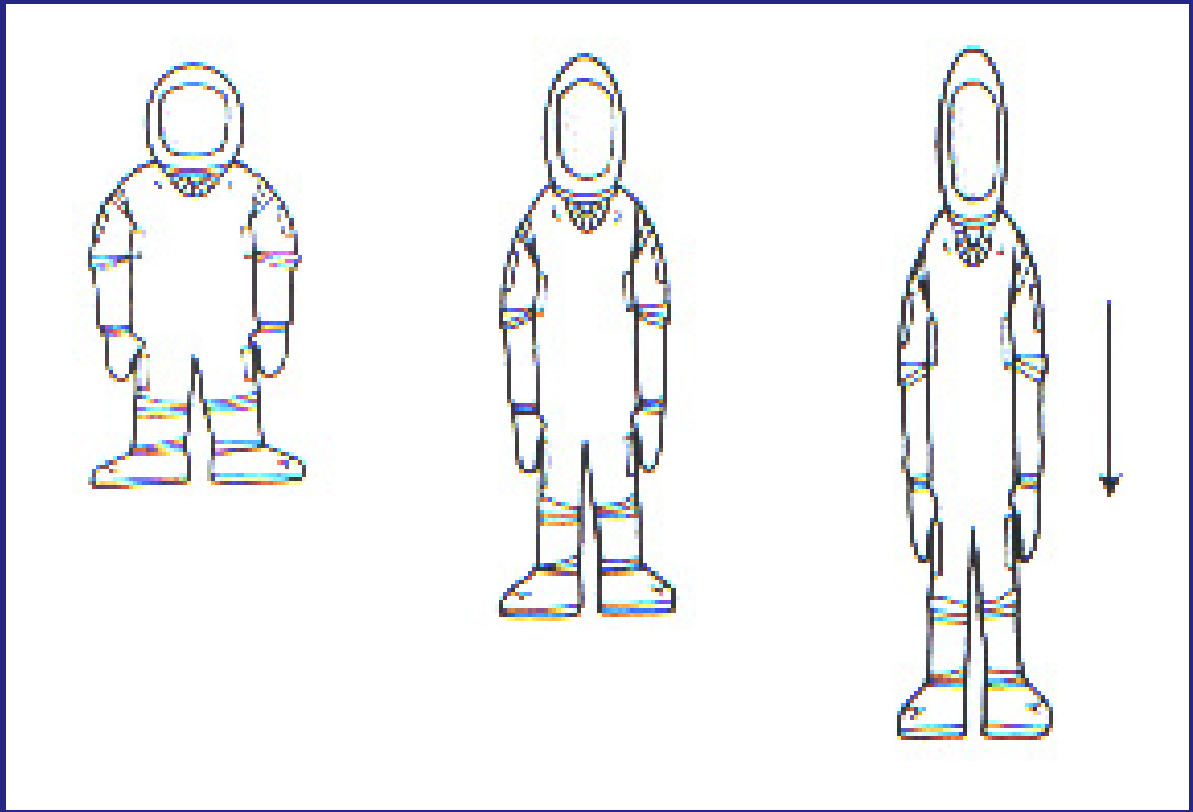


Diagrama de Penrose do Buraco Negro.

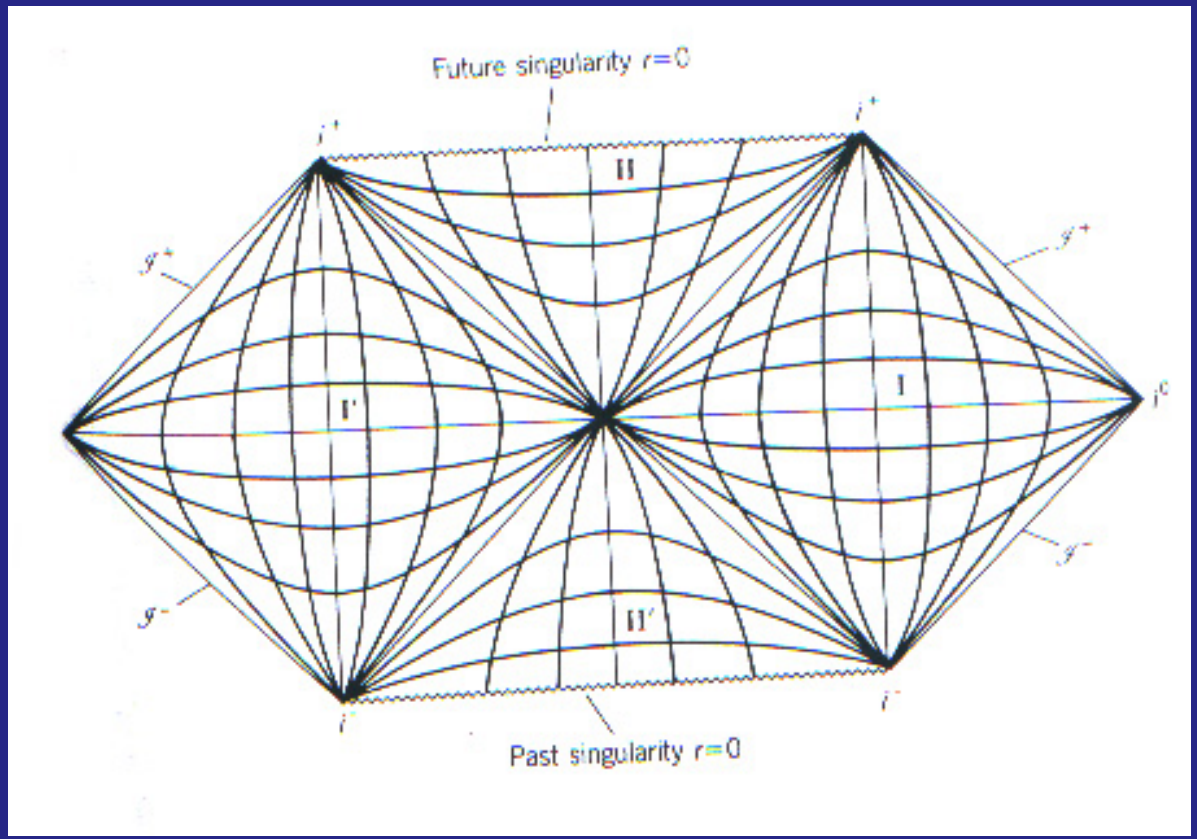
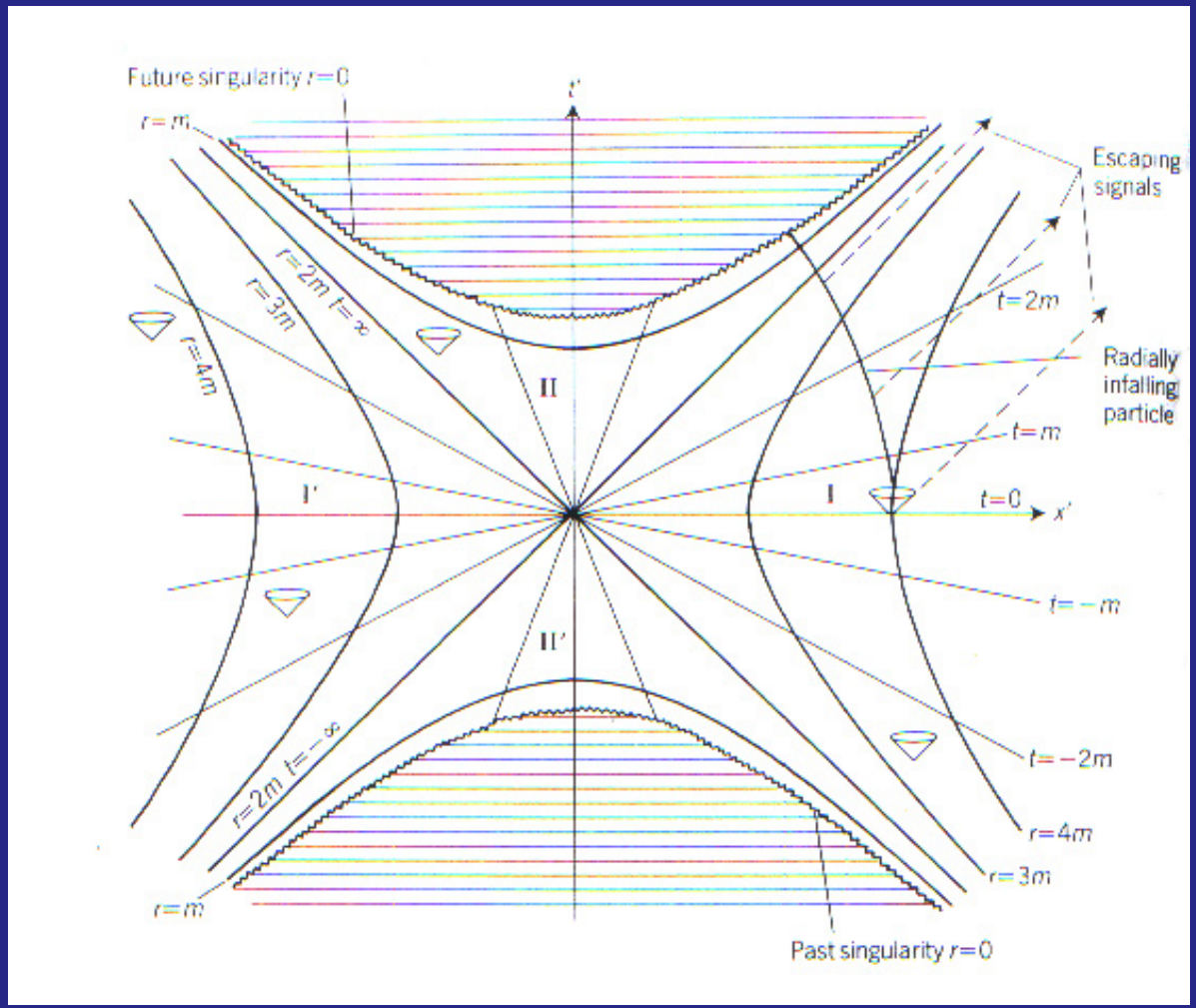
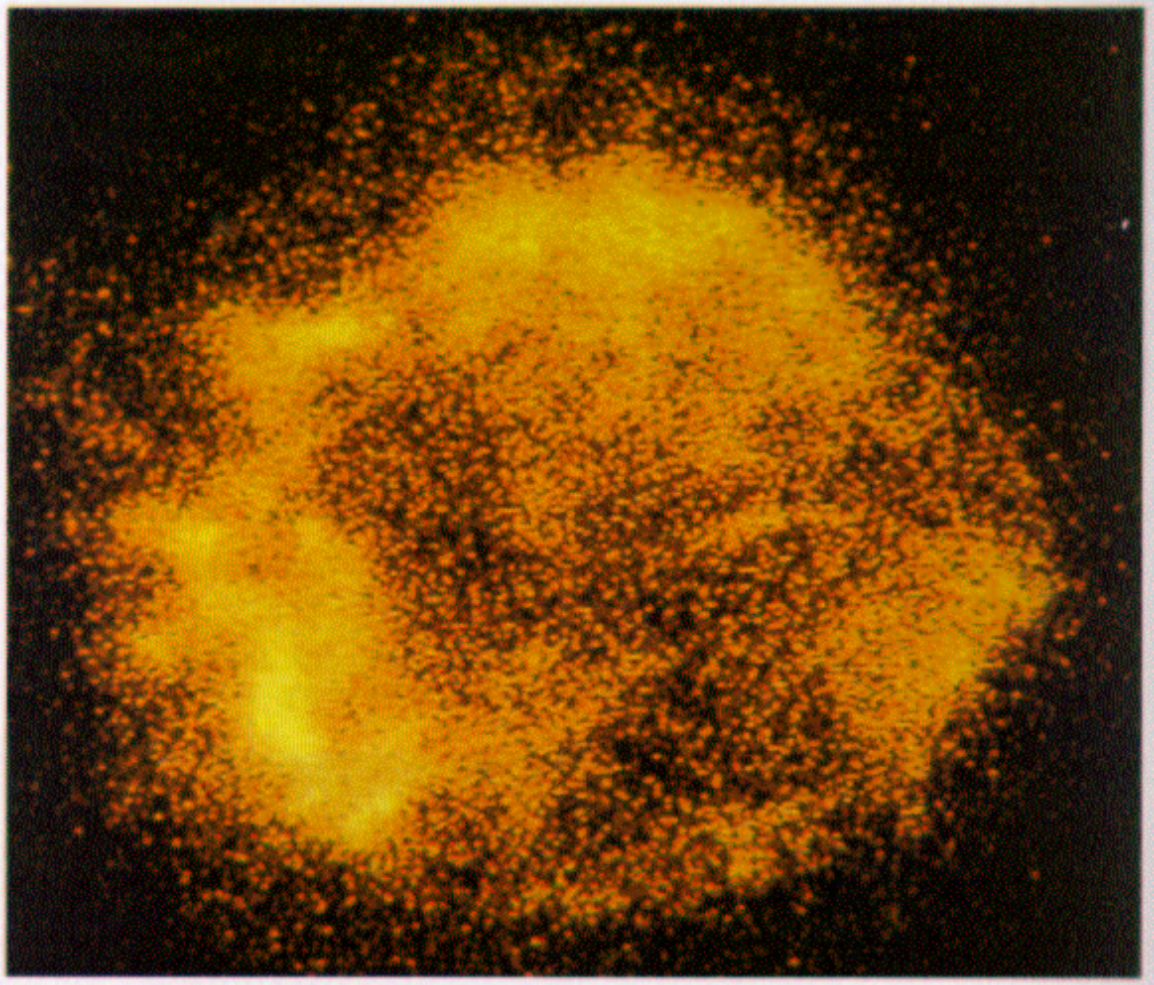


Diagrama do Buraco Negro.



Cassiopéia.



Cassiopeia A. The supernova remnant Cassiopeia A (Cas A; 3C 461) is very young. The explosion, which went unnoticed at the time, took place 300 years ago. This object emits gamma rays, X-rays, radio waves and visible light.

Cassiopeia A is, after the Sun, the strongest radio source in the sky. The top figure shows a map of its radio emission at a frequency of 5 gigahertz (GHz), produced by the very hot gas in the nebula. One can see that the strongest emission comes from the

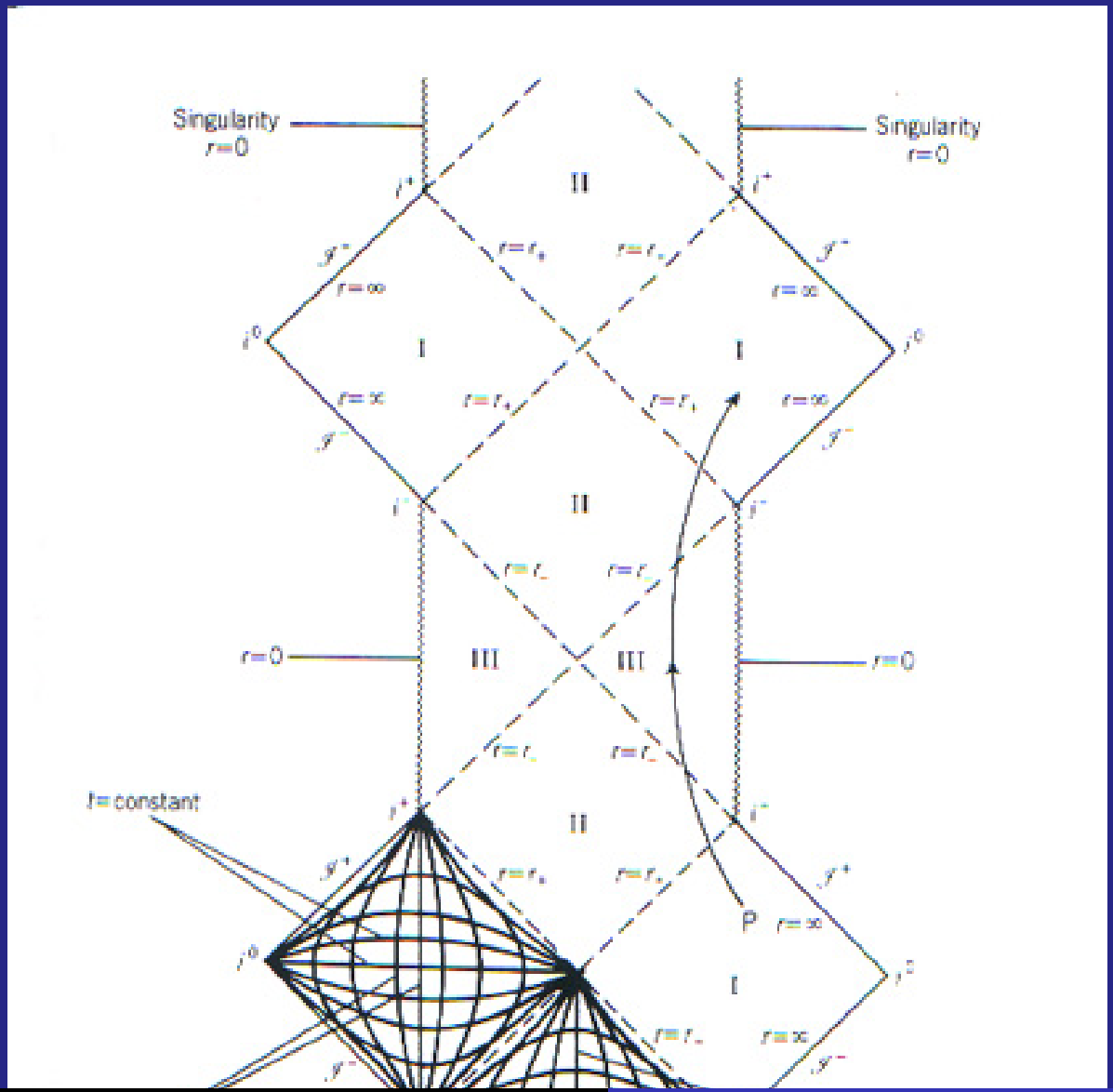
Soluções de Kerr e de Kerr-Newman

$$ds^2 = -(1 - \frac{2Mr}{\Sigma})dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2$$
$$+ \left(r^2 + a^2 + 2Ma^2 r\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\phi^2,$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2\,,$$
$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta\,,$$

M e $0 \leq a \leq M$ são a massa e o momento angular específicos do buraco negro. Os horizontes são $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$.

Buraco Negro em rotação



Cosmologia.

Problemas com a cosmologia Newtoniana.

É necessário que achemos uma descrição adequada do Universo. A descrição Newtoniana não o é por várias razões:

- Não explica a evolução do universo. Estrelas não podem ser eternas, pois deve terminar sua energia.
- O paradoxo de Olbers.

Cosmologia.

Problemas com a cosmologia Newtoniana.

É necessário que achemos uma descrição adequada do Universo. A descrição Newtoniana não o é por várias razões:

- Não explica a evolução do universo. Estrelas não podem ser eternas, pois deve terminar sua energia.
- O paradoxo de Olbers.
- Universo infinito e atração Gravitacional.

Cosmologia.

Problemas com a cosmologia Newtoniana.

É necessário que achemos uma descrição adequada do Universo. A descrição Newtoniana não o é por várias razões:

- Não explica a evolução do universo. Estrelas não podem ser eternas, pois deve terminar sua energia.
- O paradoxo de Olbers.
- Universo infinito e atração Gravitacional.

No caso de um "Universo de Einstein", ou seja, na Relatividade Geral, podemos calcular a métrica, desde que conheçamos algo sobre o conteúdo material.

Cosmologia.

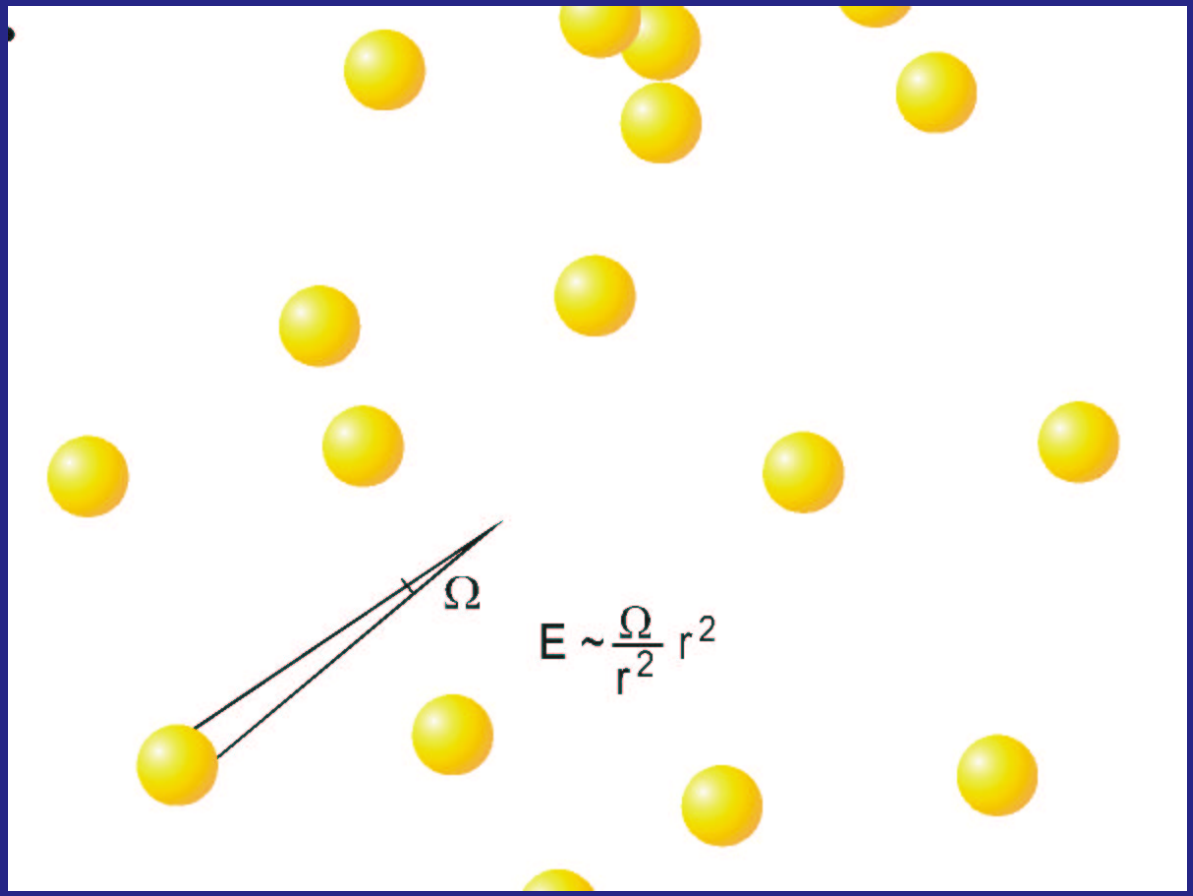
Problemas com a cosmologia Newtoniana.

É necessário que achemos uma descrição adequada do Universo. A descrição Newtoniana não o é por várias razões:

- Não explica a evolução do universo. Estrelas não podem ser eternas, pois deve terminar sua energia.
- O paradoxo de Olbers.
- Universo infinito e atração Gravitacional.

No caso de um "Universo de Einstein", ou seja, na Relatividade Geral, podemos calcular a métrica, desde que conheçamos algo sobre o conteúdo material.

Paradoxo de Olbers



O Princípio Cosmológico

Todos os pontos do Universo são equivalentes, de um ponto de vista macroscópico. Portanto há um fluído Cósmico Universal, caracterizado por uma densidade de energia ρ e por uma pressão p. Suporemos que haja uma equação de estado $p = w\rho$.

Para materia não relativística (galáxias) temos $w = 0$. Para radiação $w = 1/3$.

Um Universo esfericamente simétrico em torno de qualquer ponto e homogêneo, escrito em termos das variáveis t, r, ∂, φ, não pode ter dependências não triviais em n, θ, φ, de modo que é possível escrever um Ansatz do tipo

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left\{ f(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\}$$

O Princípio Cosmológico

Todos os pontos do Universo são equivalentes, de um ponto de vista macroscópico. Portanto há um fluído Cósmico Universal, caracterizado por uma densidade de energia ρ e por uma pressão p. Suporemos que haja uma equação de estado $p = w\rho$.

Para materia não relativística (galáxias) temos $w = 0$. Para radiação $w = 1/3$.
Um Universo esfericamente simétrico em torno de qualquer ponto e homogêneo, escrito em termos das variáveis t, r, ∂, φ, não pode ter dependências não triviais em n, θ, φ, de modo que é possível escrever um Ansatz do tipo

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left\{ f(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\}$$

ou seja,

$$g_{00} = -1 \qquad g_{0i} = 0$$

$$g_{kj} = r(t)^2 \quad \tilde{g}_{ij}$$

$$\tilde{g}_{rr} = f(r), \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = r^2 \quad \tilde{g}_{\varphi\varphi} = r^2 \, sin^2 \, \theta$$

Elementos não nulos da conexão afim

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= R\dot{R}\tilde{g}_{ij} \\
\Gamma^i_{0j} &= \frac{\dot{R}}{R}\delta^i_j \\
\Gamma^r_{rr} &= r\frac{1}{2}f\left\{\frac{d}{dr}f\right\} = \frac{f'}{2f} \\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= -\frac{1}{2r^2}\left\{\partial_\tau g_{\theta\theta}\right\} = +\frac{1}{r} \\
\Gamma^\varphi_{r\varphi} &= 1/r \\
\Gamma^r_{r\theta} &= \frac{1}{2f}\partial_\theta g_{rr} = 0 = \Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^\varphi_{rr}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{r}_{\theta\theta} &= \pm\frac{1}{2r}\partial_\tau r^2 = -1/r \\
\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} &= -(1/r)sin^2\theta \\
\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} &= -sin\theta \;\; cos\theta \\
\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} &= cot\theta
\end{aligned}
$$

$$\tilde{R}_{rr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{2}{r}+\frac{f'}{2f}\right) -$$

$$+ \quad \Gamma^{k}_{re}\ \Gamma^{e}_{rk} - \Gamma^{k}_{rr}\ \Gamma^{e}_{ke}$$

$$+\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta r} - \Gamma^{r}_{rr}\left(\Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{rr} &= -\frac{2}{r^2} + 2\frac{1}{r^2} - \frac{f'}{2f}\frac{2}{r} \\
&\equiv -\frac{f'}{fr} \\
R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - \left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 \right) \tilde{g}_{ij}
\end{aligned}
$$

Portanto a eq. de Einstein deve ser satisfeita só se

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{ij} &= \lambda \tilde{g}_{ij} \\
\Rightarrow -\frac{f'}{fr} &= \lambda f \\
\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{f}\right) &= \lambda r \\
\Rightarrow \frac{1}{f} &= \frac{\lambda r^2}{2} + b
\end{aligned}$$

É possível escolher $b = 1$, $\lambda = 0, \pm 2$, escolhendo-se apropriadamente a unidade da variável r.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= -8\pi G\left(\Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho}\right) \\
&= -8\pi G \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\rho + 3p\right) & \mu = \nu = 0 \\ 0 & \mu = i, \nu = 0 \\ \frac{1}{2}\left(\rho - p\right) R^2 \tilde{g}_{ij} & \mu = i, \nu = j \end{cases} \\
R_{00} &= -\frac{3\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{2}8\pi G\left(\rho + 3p\right) \\
\Rightarrow 3\ddot{R} &= -4\pi G\left(\rho + 3p\right) R
\end{aligned}
$$

Componente espacial

$$-\left(R\ddot{R}\theta + 2\dot{R}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij} = -8\pi G\frac{1}{2}\left(\rho - p\right)R^2\tilde{g}_{ij}$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G\left(\rho - p\right)R^2$$

Escrevemos a métrica na forma

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right\}$$

com $k = 0, \pm 1$.

Esta é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Tomaremos o tensor de energia-momento como sendo o de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + \Big(p + \rho \Big) U_\mu U_\nu$$

onde U_μ é a quadrivelocidade, e pode ser tomada como $U^\mu = (1, \vec{0})$.

Escrevemos a métrica na forma

$$d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right\}$$

com $k = 0, \pm 1$.

Esta é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Tomaremos o tensor de energia-momento como sendo o de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + \Big(p + \rho \Big) U_\mu U_\nu$$

onde U_μ é a quadrivelocidade, e pode ser tomada como $U^\mu = (1, \vec{0})$.

Estamos preparados para escrever as equações de Einstein de forma completa, e integrá-las.

Utilizando a primeira equação para eliminar $\ddot{R}$ ficamos com

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$$

Estamos preparados para escrever as equações de Einstein de forma completa, e integrá-las.

Utilizando a primeira equação para eliminar $\ddot{R}$ ficamos com

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$$

Tomemos agora a conservação de energia, isto é

$$D^\nu T_{\mu\nu} = 0$$

$$D_\nu \left(p g^{\mu\nu} + \left(p + \rho \right) U^T U^\nu \right) =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g^{1/2} \left(p + \rho \right) U^\mu U^\nu \right]$$

$$+ \Gamma^\mu_{\nu\rho} \left(p + \rho \right) U^\nu U^\rho = 0$$

$$\mu = 0 : -\frac{dp}{dt} + \frac{1}{R^3}\frac{d}{dt}\left[R^3\left(p+\rho\right)\right] + 0 = 0$$

$$-R^3\frac{dp}{dt} + \frac{d}{dt}\left[R^3\left(p+\rho\right)\right] = 0$$

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}gdu^{\nu} = dt^2 - R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)$$

$$g^{00} = 1 \qquad g = \frac{R^6}{1-kr^2}r^4\ sen^2\ \theta$$

Ou ainda, fazendo $\frac{d}{dt} = R\frac{d}{dR}$

$$3R^2\left(p+\rho\right) + R^3\frac{d\rho}{dR} = 0$$

$$3R^2 p = -\frac{d}{dR}\left(\rho R^3\right)$$

A solução desta equação depende da equação de estado. Tomando $p = w\rho$ temos

$$
\begin{aligned}
3w\frac{R^3\rho}{R} &= -\frac{d\left(\rho R^3\right)}{dR} \\
\Rightarrow \quad ln\ \rho R^3 &= -3w\ ln\ R \\
\rho R^3 &= AR^{-3w} \\
\rho &= AR^{-3(w+1)}
\end{aligned}
$$

Para $w = 0, \rho = \frac{A}{R^3} = \frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$.

Para $w = 1/3 \quad \rho = \frac{A}{R^4}$

Voltando à equação de Einstein temos

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \frac{A}{R^{3w+1}}$$

A solução geral pode ser obtida por quadratura. No entanto é mais útil olhar para certas propriedades particulares que nos vão definir a física. Há dois casos de interesse:

- Universo hoje: domínio de matéria, $w = 0$.
- Universo primordial: domínio da radiação, $w = \frac{1}{3}$.

A solução geral pode ser obtida por quadratura. No entanto é mais útil olhar para certas propriedades particulares que nos vão definir a física. Há dois casos de interesse:

- Universo hoje: domínio de matéria, $w = 0$.
- Universo primordial: domínio da radiação, $w = \frac{1}{3}$.

Em qualquer dos casos há 3 possilidades:
1) $k = +1$
Conforme R cresce, o lado direito diminue, até que $\dot{R}^2 + 1 \simeq 1$. Neste caso, $\frac{8\pi G}{3} \frac{A}{R^{3w+1}}, \simeq 1$, e R não pode crescer mais, passando a diminuir. O Universo é dito fechado.

2) $k = 0$

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} A} \quad R^{-\frac{3w+1}{2}}$$

$$R^{\frac{3(w+1)}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \; A} \quad t$$

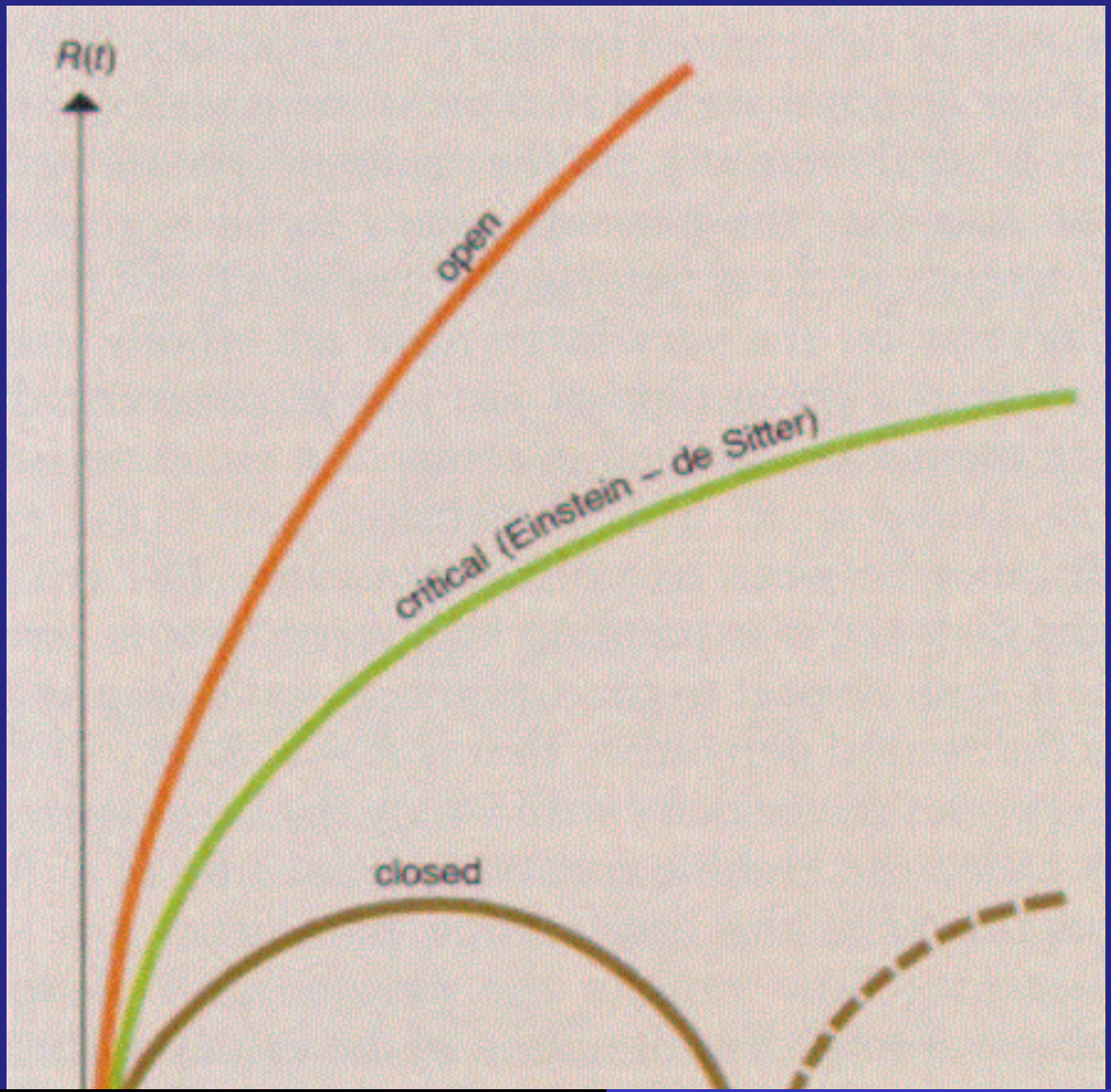
$$R = C \quad t^{\frac{2}{3(w+1)}}$$

R cresce indefinidamente.

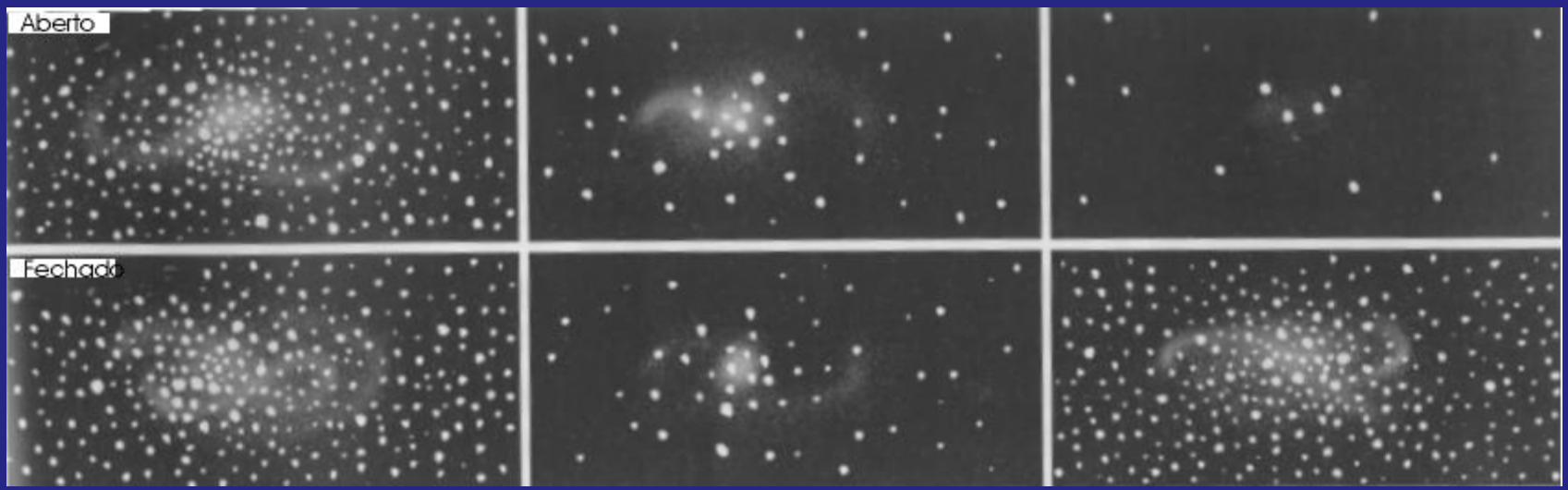
3) $k = -1$

Não há limite para o crescimento.

Evolução do Universo.



Evolução do Universo.



Hoje, a densidade é dada por

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{K}{R_0^2} + H_0^2\right)$$

onde $H = \dot{R}/r, H_0 = \dot{R}_0/R_0 =$ valor de hoje $R_0 = R/.$

Definimos a densidade crítica por

$$\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G}$$

$$\begin{aligned} k = -1 &: \rho < \rho_c \\ k = 0 &: \rho = \rho_c \\ k = +1 &: \rho > \rho_c \end{aligned}$$

Solução para a era dominada por matéria.

Agora, $p = 0$, ou seja, $w = 0$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3,$$

onde o índice ϕ se refere ao valor de hoje.
Definimos ainda a constante de Hubble hoje, $H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}$, e o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}.$$

O nome desaceleração já denota o fato que sempre se esperou $q > 0$, ou seja, o universo está decelerando. Dados mais modernos dão o resultado inverso, o que ser a comentado mais tarde. Aqui teremos $q_0 > 0$.

Das equações de Einstein temos

$$\frac{K}{R_0^2} = \left(2q_0 - 1\right) H_0^2$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_0 = 2q_0 \; H_0^2$$

$\Big($ ou seja, $q_0 > 0$, e para $K = 1 \Rightarrow q_0 > 1/2$, para $K = 0 \Rightarrow q_0 = 1/2$ e se $K = -1 \Rightarrow 0 < q_0 < 1/2$.

Temos ainda: $\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi}{3} G\rho R^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0^3}{R} = 2q_0 \frac{H_0 R_0^3}{R}$

Portanto

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2\left(1 - 2q_0 + 2q_0\frac{R_0}{R}\right)$$

De onde:

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx$$

Soluções

$k = +1$

$$1 - cos\,\theta = \frac{2q_0 - 1}{q_0}\frac{R}{R_0}$$

Neste caso,

$$H_0 t = q_0\left(2q_0 - 1\right)^{-3/2}\left(\theta - sin\theta\right)$$

$$t = 0 \longrightarrow \theta = 0$$

$$\theta - 2\pi \Rightarrow R = 0$$

Idade do Universo

A idade do universo é, neste caso,

$$t_0 = \frac{1}{H_\nu}\int_0^1 \left[1 - 2q_o + \frac{2q_o}{x}\right]^{-1/2} dx$$

$$= H_\nu^{-1} q_0 \left(2q_0 - 1\right)^{-3/2} \left[arc\ \ cos\left(\frac{1}{q_0} - 1\right) - \frac{1}{q_0}\left(2q_0 - 1\right)^{1/}\right.$$

Idade do Universo

A idade do universo é, neste caso,

$$t_0 = \frac{1}{H_\nu}\int_0^1 \left[1 - 2q_o + \frac{2q_o}{x}\right]^{-1/2} dx$$

$$= H_\nu^{-1} q_0 \left(2q_0 - 1\right)^{-3/2} \left[arc\ \ cos\left(\frac{1}{q_0} - 1\right) - \frac{1}{q_0}\left(2q_0 -\right.\right.$$

Para $q_0 \approx 1$, $H_0^{-1} \approx 13\text{x}10^9$ anos.
$t_0 \approx 7.5\text{x}10^9$ anos.

$t_{max} \approx 40\text{x}10^9$ anos.

$2t_{max} \approx 80\text{x}10^9$ anos.

1. $q_0 = 1/2$, no caso de $K = 0$, $\rho = \rho_c$. Neste caso, a solução é simples,

$$\frac{R(t)}{Ro} = \left(\frac{3H_o}{2}\right)^{2/3}$$

2. $q_0 < \frac{1}{2}, K = -1, \rho_0 < \rho_c$

Neste caso a solução pode ser obtida formalmente fazendo-se $\theta = i\Psi$, em cujo caso temos

$$H_0 t = q_0 \left(1 - 2q_0\right)^{-3/2} \left[sinh\Psi - \Psi\right]$$

$$R(t) = R_0 \frac{q_0}{1 - 2q_0} \left(cosh\Psi - 1\right)$$

Para tempos grandes

$$H_0 t \simeq \frac{1}{2} q_0 \left(1 - 2q_0\right)^{-3/2} e^{\Psi}$$

$$R(t) = \frac{1}{2} R_0 \frac{q_0}{1 - 2q_0} e^{\Psi}$$

$$\Rightarrow R(t) = R_0 \left(1 - 2q_0\right)^{1/2} H_0 t$$

Neste caso a idade do universo é

$$t_0 = H_0^{-1} \left(1 - 2q_0\right)^{-3/2} \left\{ \sqrt{1 - 2q_0} - q_0 cosh^{-1} \left(\frac{1}{q_>} - 1 \right) \right\}$$

Escalas de Distância.

A noção de distância passa a ser diferente para a Relatividade Geral, principalmente para grandes escalas. Não podemos mais usar um metro padrão, o que seria impraticável nos céus.

Uma distância com um metro padrão seria medida com uma régua fixa em um tempo dado fixo $t = t$. Neste caso, para o observador em $r = 0, e\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$, temos

$$
\begin{aligned}
-d\vec{x}^2 &= dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\theta^2\right)\right] \\
&= 0 - R^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} - r^2 \cdot 0 \\
\Rightarrow \quad |dx| &= \frac{R}{\sqrt{1-kr^2}}dr
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
d_{Prop}^{(r_1)} &= \int_0^{r_1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-Kr^2}} dr = R(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \\
&= R(t) f(r_1) \\
f(r_1) &= \begin{cases} arcsin r_1 & R = +1 \\ r_1 & R = 0 \\ arcsinh r_1 & R = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

O que observamos de fato é a radiação eletromagnética. Neste caso, olhamos para a equação da geodésia seguida pela luz vinda de $\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0$,

$$\theta = d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \equiv \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

O que observamos de fato é a radiação eletromagnética. Neste caso, olhamos para a equação da geodésia seguida pela luz vinda de $\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0,$

$$\theta = d\tau^2 = dt^2 - R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \equiv \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

Olhando para uma onda subsequente da mesma fonte, que saiu em $t_1 + \delta t$ e chegou em $t_0 + \delta t_0$ temos

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)}$$

ou seja, temos a relação de frequência

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

Definimos o parâmetro de deslocamento para o vermelho (red-shift parameter) como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \equiv \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1$$

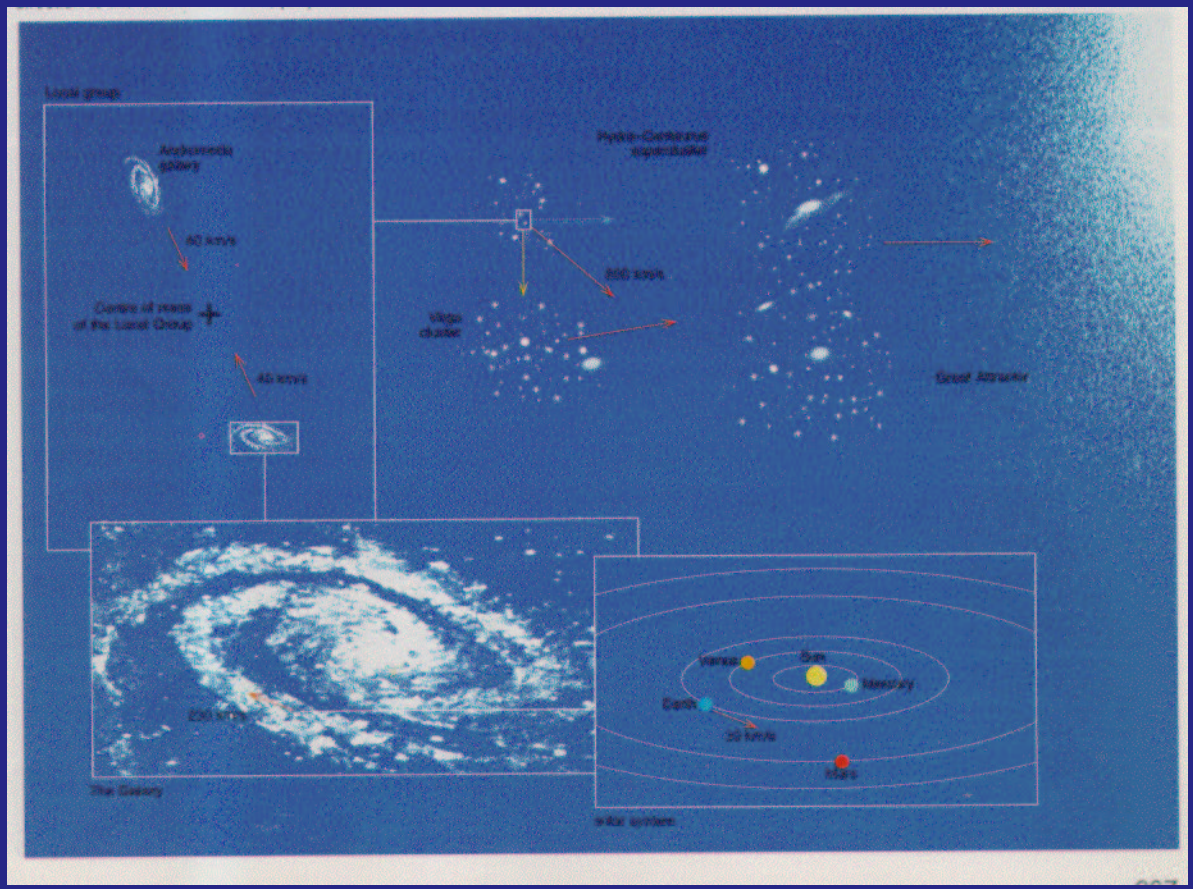
Para r, pequeno

$$d_{prop} \simeq R(t) r_1$$

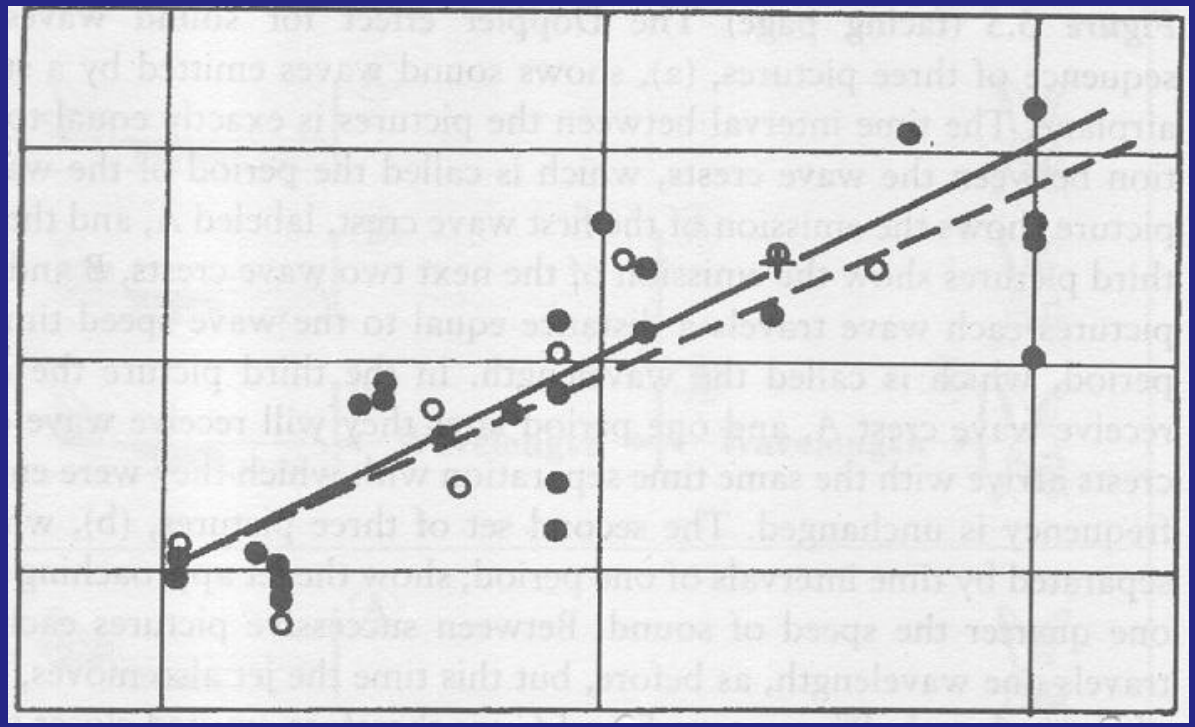
$$v_r \equiv \dot{d}_{prop} \simeq \frac{\dot{R}}{R} R r_1 \simeq z$$

Esta é a Lei de Hubble, definindo o primeiro apoio observacional do modelo standard.

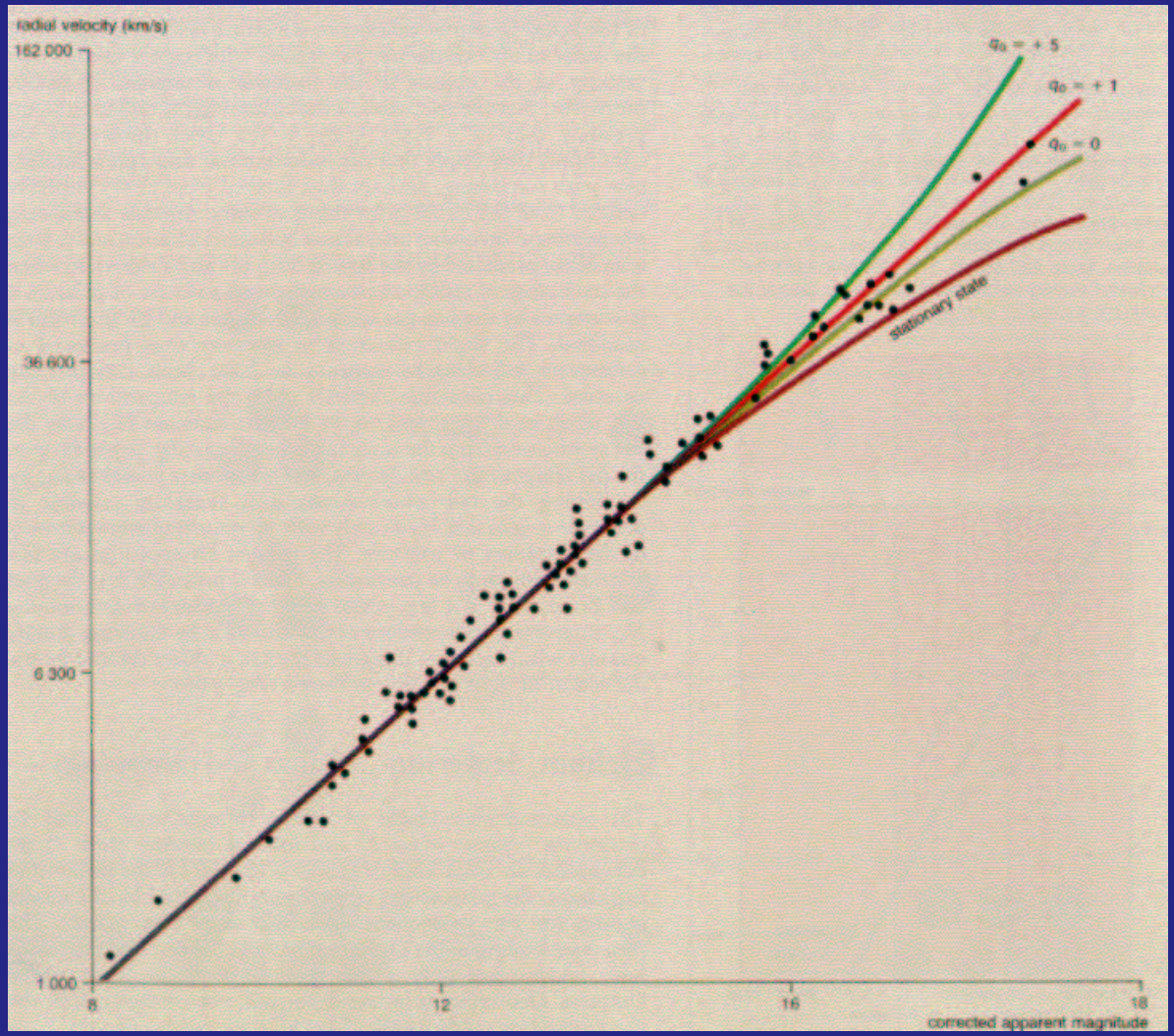
Distâncias no Universo



A lei de Hubble: dados originais



A lei de Hubble: dez anos atrás



Como Medir Distâncias

- Através da Paralaxe. "Seguindo" o raio luminoso,

$$d_{par} = R(t_0)\frac{r_1}{(1 - Kr_1^2)}1/2$$

- Distância - luminosidade. Compara-se a luminosidade real do objeto, com sua luminosidade aparente.

$$\pi\varepsilon^2 = \frac{\pi b^2}{R(t_0)^2 r_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon^2}{4} = \frac{A}{4\pi R^2(t_0)} r_1^2$$

$$A = \pi b^2$$

Um fóton emitido com frequência ν, energia $h\nu$, chega com energia $h\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$.

Emitidos no intervalo δt, chegarão a intervalos $\delta t, \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$.

Assim, a potência recebida P compara-se com a luminosidade absoluta L através de um fator $\frac{R(t_1)^2}{R(t_0)^2}$, e temos

$$P = L\left(\frac{R(t_1)}{R(t_0)}\right)^2 \frac{A}{4\pi R(t_0)^2 r_1^2}$$

Um fóton emitido com frequência ν, energia $h\nu$, chega com energia $h\nu_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$.

Emitidos no intervalo δt, chegarão a intervalos $\delta t, \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$.

Assim, a potência recebida P compara-se com a luminosidade absoluta L através de um fator $\frac{R(t_1)^2}{R(t_0)^2}$, e temos

$$P = L\left(\frac{R(t_1)}{R(t_0)}\right)^2 \frac{A}{4\pi R(t_0)^2 r_1^2}$$

A luminosidade aparente é $I = \frac{P}{A}$. Definimos a distância de luminosidade como

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi I}\right)^{1/2}$$

$$d_L = \frac{R(t_0)^2}{R(t_1)} r_1$$

- Distância - área: Compara-se área aparente, e área real.

$$d_A = R(t_1) r_1$$

- Analisando o movimento próprio:

$$d_\mu = R(t_0) r_1$$

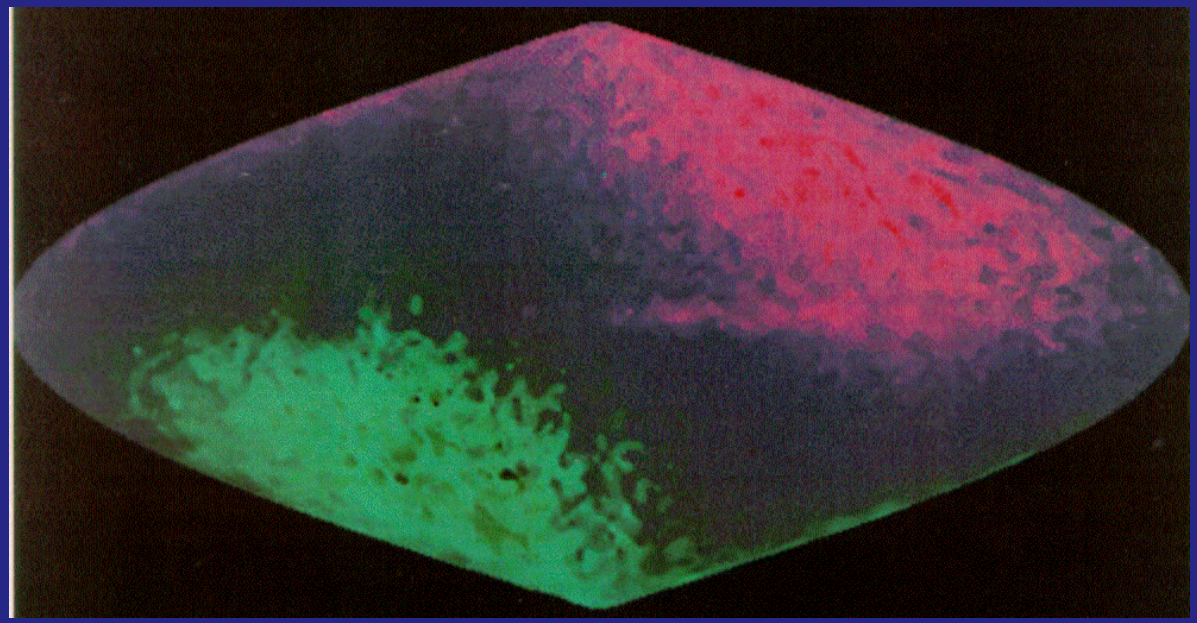
A Radiação Cósmica de Fundo

O Universo já foi bem menos e mais denso, portanto bem mais quente. Em uma época primordial a matéria e a radiação estavam em equilíbrio térmico. Acima de $T \approx 4000K$ elétrons não estavam ligados aos átomos e podia haver forte interação, fazendo o universo opaco. Depois do desacoplamento matéria/radiação, esta última ficou apenas separada sob a forma de uma radiação de fundo a temperatura fixa, a Radiação Cósmica de Fundo, como em um forno de microondas:

$$\rho_\gamma(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT_\gamma}} - 1}$$

$$T_\gamma = \frac{T(t)R(t)}{R(t_0}$$

Radiação tipo forno de microondas



A Síntese do Hélio

A abundância relativa dos elementos é um dado observacional fundamental para se estabelecer a veracidade do modelo standard. No início havia protons e neutros. Devemos olhar como e quanto dos outros elementos puderam ser formados ao longo da história cósmica.

No início, antes da formação das estrelas, havia muitos neutros livres e se pode formar elementos por captura de netrons, $n + p \longrightarrow d + \gamma$.

A abundância dos elementos estaria então ligada à secção de choque de captura de neutrons.

Temos as reações

$$
\begin{aligned}
n + \nu &\leftrightarrow p + e^- \\
n + e^+ &\leftrightarrow p + \bar{\nu} \\
n &\leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}
\end{aligned}
$$

No equilíbrio, com a distribuição de Fermi temos

$$n_e^{(p)}dp = n_e + dp = 8\pi h^{-3} p^2 dp \frac{1}{1 + e^{\frac{E_e(p)}{KT}}}$$

$$n_\nu dp = n\bar{v}dp = 4\pi h^{-3} p^2 dp \frac{1}{e^{\frac{Ev}{KT}} + 1}$$

O princípio de Pauli dá fatores de exclusão para as reações de

$$1-\frac{1}{1+e^{\frac{E}{KT}}}=\frac{1}{1+e^{-\frac{E}{KT}}}$$

Temos portanto, para os processos descritos, as razões de probabilidade por nucleon para os processos, de

$$\lambda(n+u\rightarrow p+e^{-})=A\int\frac{v_e E_e^2 p_\nu^2 dp_\nu}{\left(e^{\frac{E_\nu}{KT}}+1\right)\left(1+e^{-E_{e/KT}}\right)}$$

etc., onde $A=\frac{g_\nu T^3 g_A^2}{2\pi^3 h^q}$

$$
\begin{aligned}
g_\nu &\simeq 1 \cdot 42 \times 10^{-49} ug \;\; cm^3 \\
g_A &\simeq 1 \cdot 2 g_\nu \\
E_e - E_\nu = Q &= m_n - m_p = 1 \cdot 293 \;\; \text{Mev, etc.}
\end{aligned}
$$

Assim, pode-se calcular a fração de neutros, dada por

$$X_n \simeq \frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(p \to n) + \lambda(n \to p)}$$

como função de temperatura.
Para $T_\nu \simeq T > 10^{10} K$,

$$\frac{\lambda(p \to n)}{\lambda(n \to q)} = e^{-Q/KT}, \quad \text{portanto}$$

$$X_n \simeq (1 + e^{q/KT})^{-1}.$$

No início $X_n \simeq 1/2$, e $X_u \simeq 0.38$ para $T = 3 \text{ x } 10^{10}$. O tempo médio da reação $n \longrightarrow p + e^- + \nu$ é
$\lambda^{-1}(n \longrightarrow p + e^- + u) = 1013$ seg, portanto

$$X_n(t) = \mathcal{N} e^{-\frac{t\ (seg)}{1013}} \quad \text{ou ainda}$$

$$X_n(t) \simeq X_n^{(0}(t) e^{-\frac{t}{1013}}$$

$$X_n^{(0)}(t) \longrightarrow 0 \cdot 164 \ \text{ Peebles}$$

Como estes dados podem-se calcular as abundâncias $\rho_N = 10^{-30} g/cm^3$

H^1	74%
H^2	2×10^{-5}
He^3	2×10^{-5}
He^4	26%
Li^7	$\times 10^{-9}$

Reações:

$$
\begin{aligned}
p + u &\longrightarrow d + \delta \\
d + d &\longrightarrow He^3 + 4 \longrightarrow H^3 + p \\
H^3 + d &\longrightarrow He^4 + 4
\end{aligned}
$$

Não é fácil produzir núcleos mais pesados que Helio. De fato, não há nuclídeos estáveis com A=5 ou A=8, de modo que $n + \alpha$, $p + \alpha$ ou $\alpha + \alpha$ não podem ser usados de modo eficiente. Além disto, $He^4 + H^3 \rightarrow Li^7 + \gamma$ e $He^4 + He^3 \rightarrow Be^7 + \gamma$ não são competitivos, devido à barreira Coulombiana com $P + H^3 \rightarrow He^4 + \gamma$ ou $n + He^3 \rightarrow He^4 + \gamma$.

- 10^{-44} seg ..... gravitação quântica ..... 10^{19} Gev
- 10^{-34} seg .....orígem da matéria ..... 10^{15} Gev
- 10^{-12} seg .....transição eletrofraca ..... 10^{2} Gev
- 10^{-6} seg .....transição quark hadron ..... 1 Gev
- 10^{-6} seg .....matéria nuclear ..... 1 Gev
- 1 seg ..... nucleosíntese ..... 1 Mev
- 10^{12} seg .....matéria atômica ..... 10 ev
- 10^{13} seg .....desacoplamento matéria energia ..... 1 ev
- 10^{16} seg .....formação galática ..... 10^{-2} ev
- 10^{17} seg .....formação do sistema solar ..... 10^{-3} ev

Note-se que 1 ano $= 3.15 \times 10^{7} seg$, e que $1 ev = 5 \times 10^{3} K$

Comparação entre as interações

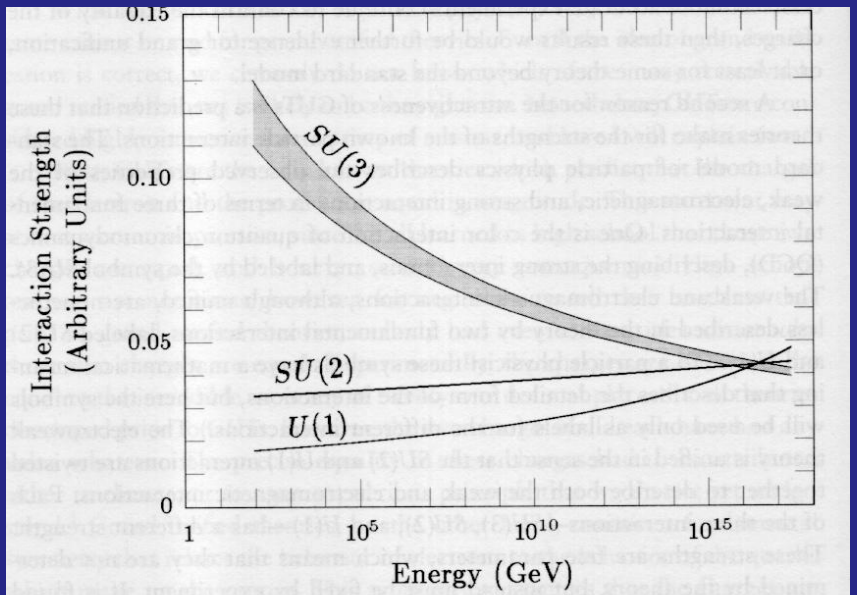


Figure 8.1 **Dependence of interaction strengths on energy.** The strengths of the three types of fundamental interactions of the standard model of particle physics—$SU(3)$, $SU(2)$, and $U(1)$—are measured at energies near 100 GeV. The curves show the calculated strengths of these interactions at higher energies. The thickness of the $SU(3)$ curve indicates the experimental uncertainty, which is negligible for the $SU(2)$ and $U(1)$ curves. The meeting of all three curves at an energy of about 2×10^{16} GeV suggests that at this energy all three interactions meld into a single grand unified interaction.

Evolução das interações

TABLE 27-1 *Major Epochs in the History of the Universe*

ERA	EPOCH	TIME (after Big Bang)	DENSITY (kg/m^3)	TEMPERATURE (K)	MAIN EVENTS
Radiation Era					
	Planck	0 s	∞	∞	Unknown physics; quantum gravity
	GUT	10^{-43} s	10^{95}	10^{32}	Strong, weak, and electromagnetic forces unified
	Hadron	10^{-35} s	10^{75}	10^{27}	Heavy and light particles all in thermal equilibrium
	Lepton	10^{-4} s	10^{16}	10^{12}	Only light particles still in thermal equilibrium. Neutrinos decouple.
	Nuclear	10^{2} s	10^{4}	10^{9}	Deuterium and helium formed by fusion protons and neutrons during first 1000 s.
		10^{3} yr ($\approx 3 \times 10^{10}$ s)	10^{-13}	6×10^{4}	
Matter Era					
	Atomic	10^{3} yr ($\approx 3 \times 10^{10}$ s)	10^{-13}	6×10^{4}	Matter begins to dominate. Atoms form. Electromagnetic radiation decouples.
	Galactic	10^{6} yr ($\approx 3 \times 10^{13}$ s)	10^{-19}	10^{3}	Galaxies and larger-scale structure form.
	Stellar	10^{9} yr ($\approx 3 \times 10^{16}$ s)	3×10^{-25}	10	All galaxies have formed. Stars continue to form.
		$>10^{10}$ yr ($\approx 3 \times 10^{17}$ s)	10^{-26}	3	

Note-se ainda, que nos primeiros instantes a evolução temporal, medida através de nosso presente parâmetro tempo tem uma evolução cada vez mais rápida, quanto mais nos aproximamos do instante inicial. Devido a invariância por transformação de coordenadas isto é irrelevante.

Os primeiros segundos são incógnitos, correspondendo a época de gravitação quântica, onde presumivelmente haveria supercordas como elementos físicos relevantes, e a dimensão do espaço-tempo deveria ser 10 (9 de espaço e uma tempo) para que fossem descritas corretamente as supercordas, ou eventualmente 11 no caso de uma teoria mãe. A matéria passou a existir aos 10^{-34}s segundos, quando a teoria unificada se dividiu em interação forte e interação eletrofraca. Antes disto os bárions podiam decair o que seria o equivalente a se dizer que os protons ou a matéria normal não são estáveis. Sinais experimentais de tal decaimento estão sendo

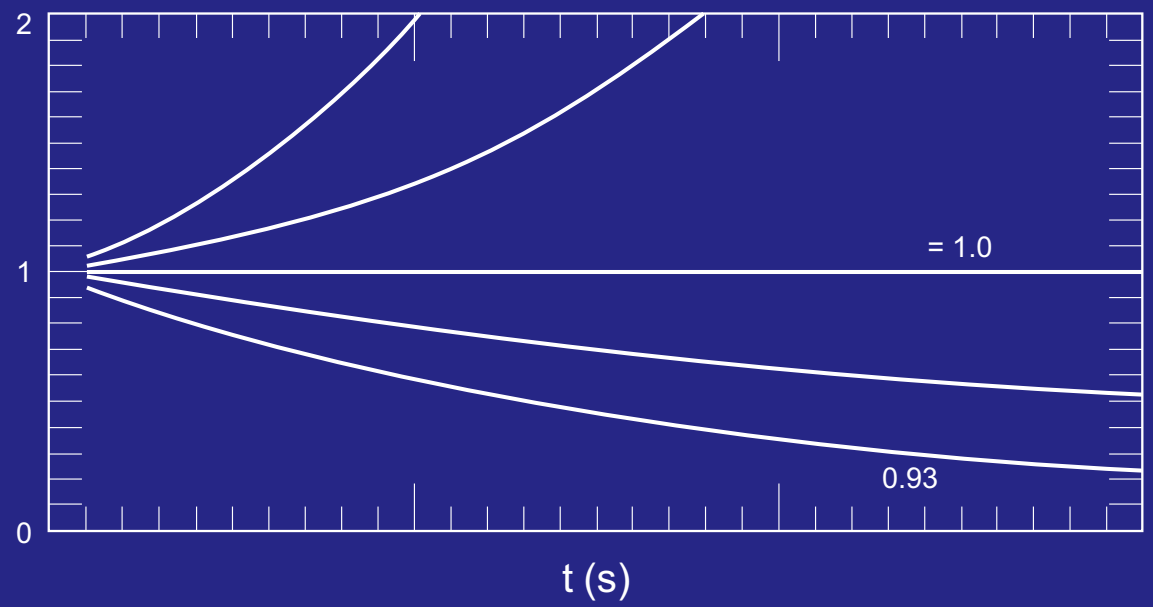
A matéria atômica, tal como a conhecemos hoje, só se formou segundos após o início (cerca de 30 mil anos após o big bang) mas a matéria desacoplou da energia radiante apenas 300 mil anos após o big bang. Foi só então que a luz passou a poder viajar longas distâncias sem espalhar pela matéria, e o universo ficou transparente. De fato, antes disto o universo era opaco. Deste modo, só podemos observar o universo posteriormente ao tempo em que os fótons passarm a se mover livremente. Antes disto, eles eram *capturados* antes de chegarem aos nossos olhos, de modo que não podemos enchergar nada antes do tempo $t_l \approx 10^{13}$s$\approx$ 300.000 anos, o tempo de *liberação* dos fótons.

Do ponto de vista observacional, a melhor confirmação do modelo, após a radiação cósmica de fundo, é a abundância de Helio observada no universo. Tal abundância é prevista como consequência de sucessivas reações de captura de neutrons, comecando por

$$n + p \longrightarrow d + \gamma \quad .$$

Como resultado, obtém-se a previsão de que a quantidade de Hélio como fração da matéria bariônica no universo deve ser de aproximadamente 25%, o que é plenamente confirmado pelos dados observacionais.
Alguns problemas ainda permanecem todavia sem solução. O primeiro é o problema da extrema isotropia observada no universo. Conforme mencionado, retirando-se o efeito do movimento da Terra em relação à radiação cósmica de fundo, a isotropia no valor da temperatura observada é tal que a diferença relativa nas temperaturas é da ordem de 10^{-5}. Isto é dado pela figura (13). Naquele mapa as duas grandes manchas na temperatura correspondem ao termo de dipolo, gerado pelo movimento da terra em relação à radiação de fundo.

O segundo problema correponde ao fato do valor da densidade de matéria no universo ser tão próxima da densidade crítica. Em geral, definimos $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$. O valor $\Omega = 1$ é muito instável. Se olharmos para o diagrama (16) vemos que o valor de Ω perto de 1 hoje deve corresponder, no início dos tempos, a um valor enormemente mais próximo de 1. Seria como manter uma esfera equilibrada sobre um dedo por muito tempo sem se tocar na mesma. Tal fato dificilmente ocorreria por mero acaso.



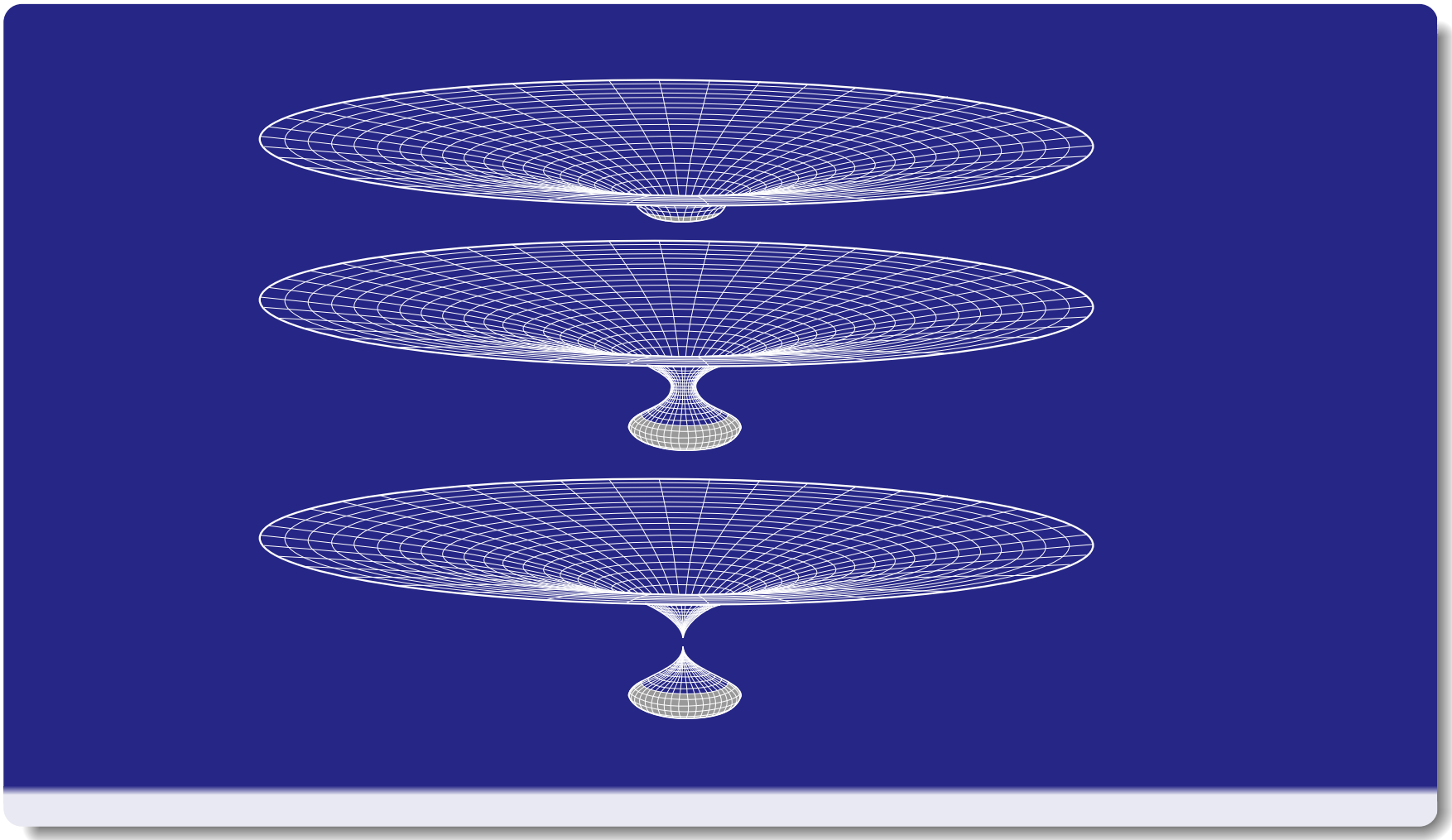
Comparação entre o valor de Ω hoje e aquele do início do universo; qualquer diferença extremamente pequena naquela época, se configura hoje como gigantesca. Assim, para que se tenha Ω próximo de 1 hoje, esta constante deve ser escolhida infinitesimalmente próxima de 1 no início.

Um terceiro problema é o fato de não haver monopolos magnéticos no universo. A teoria os prevê, mas eles nunca foram encontrados.

Estes e alguns outros problemas são resolvidos pelo processo chamado de inflação. Segundo tal processo, teria havido no princípio uma expansão exponencial do fator de escala do universo. De modo geral, este crescimento exponencial deveu-se ao fato do universo estar em um falso vácuo - um máximo relativo de energia.

Um terceiro problema é o fato de não haver monopolos magnéticos no universo. A teoria os prevê, mas eles nunca foram encontrados.
Estes e alguns outros problemas são resolvidos pelo processo chamado de inflação. Segundo tal processo, teria havido no princípio uma expansão exponencial do fator de escala do universo. De modo geral, este crescimento exponencial deveu-se ao fato do universo estar em um falso vácuo - um máximo relativo de energia.

Com o crescimento alucinante do universo ficamos em um espaço relativamente homogêneo, que estava em conexão causal no início dos tempos. A densidade de matéria deve-se manter igual a densidade crítica, e outros monopolos estariam fora do horizonte conhecido. Resolve-se portanto os maiores problemas do modelo padrão. Abrem-se ao mesmo tempo outras possibilidades, como por exemplo a criação de novos universos.

O último degrau nesta sequência será a compreensão de uma teoria quântica da gravitação, que lance luz na estrutura última do espaço-tempo.

A Criação de novos universos