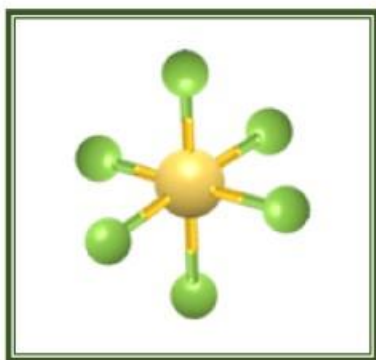




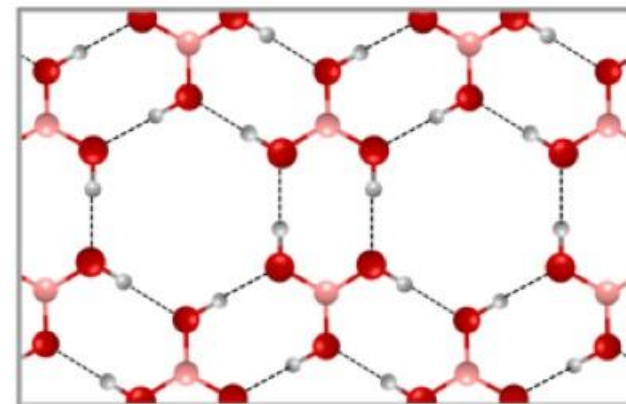
Teoria de grupos aplicada a moléculas e sólidos - PGF5261

Grupos e tensores aplicados à ciência dos materiais - 4300409



Lucy V. C. Assafí

Instituto de Física
Universidade de São Paulo





Representações de Produto Direto



Produto direto de dois grupos $\mathbb{G}_a$ e $\mathbb{G}_b$: definido em termos do produto direto de duas matrizes.

Produto direto de duas representações irreduzíveis dos grupos $\mathbb{G}_a$ e $\mathbb{G}_b$: produz uma representação irreduzível do grupo de produto direto $\Rightarrow$ todas as representações irreduzíveis do grupo de produto direto podem ser geradas a partir das representações irreduzíveis dos grupos componentes.

Produto direto entre duas representações do mesmo grupo: é também uma representação desse grupo e, em geral, redutível. Se $\Gamma^\alpha(R)$ e $\Gamma^\beta(R)$ são duas representações irreduzíveis do mesmo grupo, então o caracter da representação de produto direto $\Gamma(R) = \Gamma^\alpha(R) \otimes \Gamma^\beta(R)$ é

$$\chi^\Gamma(R) = \chi^{\Gamma^\alpha}(R) \chi^{\Gamma^\beta}(R)$$

Se $\Gamma(R)$ for redutível, o caracter da representação de produto direto pode ser escrito como uma combinação linear dos caracteres das representações irreduzíveis do grupo:

$$\chi^\Gamma(R) = \chi^{\Gamma^\alpha}(R) \chi^{\Gamma^\beta}(R) = \sum_{\kappa} a_{\alpha\beta\kappa} \chi^{\Gamma^\kappa}(R)$$

$$a_{\alpha\beta\kappa} = \frac{1}{h} \sum_R \chi^{\Gamma^\alpha}(R) \chi^{\Gamma^\beta}(R) [\chi^{\Gamma^\kappa}(R)]^* = \frac{1}{h} \sum_{\mu} N_{\mu} \chi^{\Gamma^\alpha}(C_{\mu}) \chi^{\Gamma^\beta}(C_{\mu}) [\chi^{\Gamma^\kappa}(C_{\mu})]^*$$

Esta maneira de decompor uma representação de produto direto será aplicada na determinação de regras de seleção.



Construção das Tabelas de Caracteres

1. O número de representações irredutíveis é igual ao número de classes do grupo.
2. Se h e p são, respectivamente, a ordem e o número de classes de um grupo, e d_α as dimensões das representações irredutíveis: $\sum_\alpha d_\alpha^2 = h \Rightarrow$ classe E é representada pela matriz **I**, então sua coluna é determinada por $\chi^\alpha(E) = d_\alpha$.

D_3	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

$$\Longrightarrow d_{A_1}^2 + d_{A_2}^2 + d_E^2 = 6 \Longrightarrow$$

Somente os valores 1,1,2 satisfazem a equação para a classe E, definindo a dimensionalidade das representações irredutíveis do grupo

3. Sempre existe uma representação irredutível unidimensional, dita totalmente simétrica, onde todos os caracteres são iguais a 1 $\Rightarrow$ a primeira linha $\Rightarrow \chi^1(C_\mu) = 1, \mu = 1, \dots, p$.



Construção das Tabelas de Caracteres

D_3	E	$2C_3$	$3C_2$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

4. Ortogonalidade entre linhas da tabela de caracteres: $\Rightarrow \sum_{\mu} \chi^{*\alpha}(C_{\mu}) \chi^{\beta}(C_{\mu}) N_{\mu} = h \delta_{\alpha\beta}$

$$\sum_{\mu} \chi^{A_1}(C_{\mu}) \chi^{A_1}(C_{\mu}) N_{\mu} = \sum_{\mu} \chi^{A_2}(C_{\mu}) \chi^{A_2}(C_{\mu}) N_{\mu} = 1^2(1) + 1^2(2) + (\pm 1)^2(3) = 6$$

$$\sum_{\mu} \chi^E(C_{\mu}) \chi^E(C_{\mu}) N_{\mu} = 2^2(1) + (-1)^2(2) + 0(3) = 6$$

$$\sum_{\mu} \chi^{A_1}(C_{\mu}) \chi^{A_2}(C_{\mu}) N_{\mu} = (1)(1)1 + (1)(1)2 + (1)(-1)3 = 0$$

$$\sum_{\mu} \chi^{A_1}(C_{\mu}) \chi^E(C_{\mu}) N_{\mu} = \sum_{\mu} \chi^{A_2}(C_{\mu}) \chi^E(C_{\mu}) N_{\mu} = (1)(2)1 + (1)(-1)2 + (\pm 1)(0)3 = 0$$

5. Ortogonalidade entre colunas da tabela de caracteres: $\Rightarrow \sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(C_{\mu}) \chi^{\alpha}(C_{\nu}) = \frac{h}{N_{\mu}} \delta_{\mu\nu}$

$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(E) \chi^{\alpha}(E) = 1 + 1 + 4 = 6 = \frac{6}{1}$$

$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(E) \chi^{\alpha}(C_2) = 1 - 1 + 0 = 0$$

$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(C_3) \chi^{\alpha}(C_3) = 1 + 1 + 1 = 3 = \frac{6}{2}$$

$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(E) \chi^{\alpha}(C_3) = 1 + 1 - 2 = 0$$

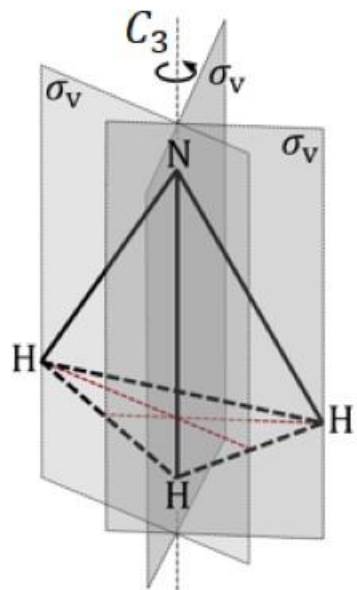
$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(C_2) \chi^{\alpha}(C_2) = 1 + 1 + 0 = 2 = \frac{6}{3}$$

$$\sum_{\alpha} \chi^{*\alpha}(C_2) \chi^{\alpha}(C_3) = 1 - 1 + 0 = 0$$



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



Não é linear e nem de alta simetria. Não pertence aos grupos de baixa simetria e não possui eixos impróprios. O único eixo de rotação é o C_3 . Existem três planos verticais passando pelos vértices (átomos de H), que se interceptam no eixo C_3 . Portanto, a molécula de amônia pertence ao grupo C_{3v} . As operações são $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$.

$C_{3v} \Rightarrow 6$ operações de simetria $\Rightarrow$ grupo de ordem $h = 6$
3 classes: $E, \{C_3, C_3^2\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

grupo	elementos do grupo reunidos em classes				
C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

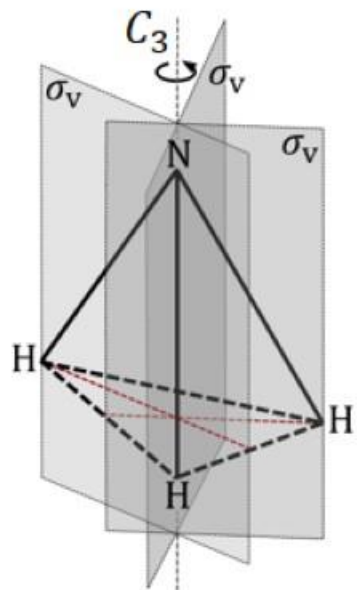
símbolos que designam as diversas representações irreduzíveis Γ^α

caracteres das representações irreduzíveis do grupo $\Rightarrow$ representam os traços das matrizes das representações irreduzíveis



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



Não é linear e nem de alta simetria. Não pertence aos grupos de baixa simetria e não possui eixos impróprios. O único eixo de rotação é o C_3 . Existem três planos verticais passando pelos vértices (átomos de H), que se interceptam no eixo C_3 . Portanto, a molécula de amônia pertence ao grupo C_{3v} . As operações são $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$.

$C_{3v} \Rightarrow 6$ operações de simetria $\Rightarrow$ grupo de ordem $h = 6$
3 classes: $E, \{C_3, C_3^2\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

- **RI** $\Rightarrow$ unidimensionais designadas como A ou B , bidimensionais como E e tridimensionais como T .
- $A \Rightarrow$ são RI simétricas com relação ao eixo principal $C_n \Rightarrow \chi(C_n) = 1$. $B \Rightarrow$ são RI antissimétricas $\Rightarrow \chi(C_n) = -1$.



Construção das Tabelas de Caracteres



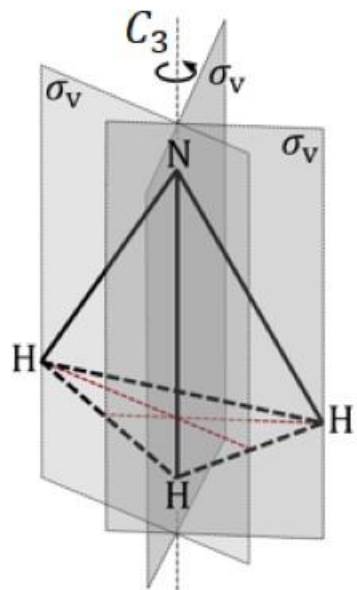
C_{4v}	E	$2C_4$	C_2	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

- $A \Rightarrow$ são RI simétricas com relação ao eixo principal $C_n \Rightarrow \chi(C_n) = 1$. $B \Rightarrow$ são RI antissimétricas $\Rightarrow \chi(C_n) = -1$.



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



Não é linear e nem de alta simetria. Não pertence aos grupos de baixa simetria e não possui eixos impróprios. O único eixo de rotação é o C_3 . Existem três planos verticais passando pelos vértices (átomos de H), que se interceptam no eixo C_3 . Portanto, a molécula de amônia pertence ao grupo C_{3v} . As operações são $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$.

$C_{3v} \Rightarrow 6$ operações de simetria $\Rightarrow$ grupo de ordem $h = 6$
3 classes: $E, \{C_3, C_3^2\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

- RI $\Rightarrow$ unidimensionais designadas como A ou B , bidimensionais como E e tridimensionais como T .
- $A \Rightarrow$ são RI simétricas com relação ao eixo principal $C_n \Rightarrow \chi(C_n) = 1$. $B \Rightarrow$ são RI antissimétricas $\Rightarrow \chi(C_n) = -1$.
- Subíndices 1 e 2 (A_1, A_2, B_1, B_2) designam as RI simétricas e antissimétricas com relação à $C_2 \perp C_n$ ou com relação à σ_v .



Construção das Tabelas de Caracteres



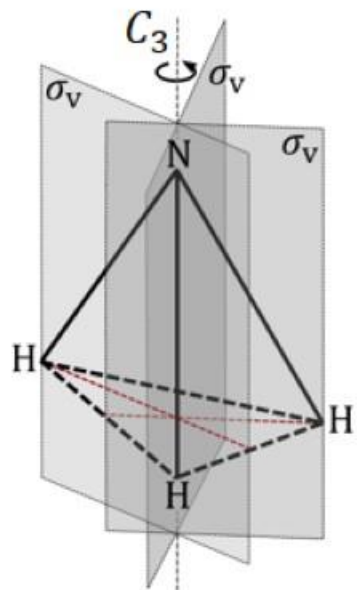
C_{4v}	E	$2C_4$	C_2	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

- Subíndices 1 e 2 (A_1, A_2, B_1, B_2) designam as RI simétricas e antissimétricas com relação à $C_2 \perp C_n$ ou com relação à σ_v .



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



Não é linear e nem de alta simetria. Não pertence aos grupos de baixa simetria e não possui eixos impróprios. O único eixo de rotação é o C_3 . Existem três planos verticais passando pelos vértices (átomos de H), que se interceptam no eixo C_3 . Portanto, a molécula de amônia pertence ao grupo C_{3v} . As operações são $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$.

$C_{3v} \Rightarrow 6$ operações de simetria $\Rightarrow$ grupo de ordem $h = 6$
3 classes: $E, \{C_3, C_3^2\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

- **RI** $\Rightarrow$ unidimensionais designadas como A ou B , bidimensionais como E e tridimensionais como T .
- $A \Rightarrow$ são RI simétricas com relação ao eixo principal $C_n \Rightarrow \chi(C_n) = 1$. $B \Rightarrow$ são RI antissimétricas $\Rightarrow \chi(C_n) = -1$.
- Subíndices 1 e 2 (A_1, A_2, B_1, B_2) designam as RI simétricas e antissimétricas com relação à $C_2 \perp C_n$ ou com relação à σ_v .
- Sobre-índices ' e '' são RI simétricas e antissimétricas com relação à σ_h .



Construção das Tabelas de Caracteres

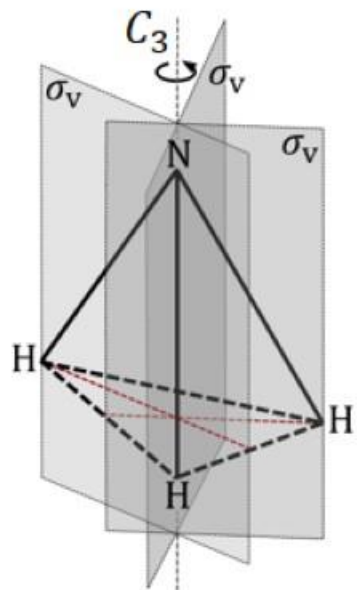
D_{3h}	E	$2C_3$	$3C_2$	σ_h	$2S_3$	$2\sigma_v$
A'_1	1	1	1	1	1	1
A'_2	1	1	-1	1	1	-1
E'	2	-1	0	2	-1	0
A''_1	1	1	1	-1	-1	-1
A''_2	1	1	-1	-1	-1	1
E''	2	-1	0	-2	1	0

- Sobre-índices ' e '' são RI simétricas e antissimétricas com relação à σ_h .



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



Não é linear e nem de alta simetria. Não pertence aos grupos de baixa simetria e não possui eixos impróprios. O único eixo de rotação é o C_3 . Existem três planos verticais passando pelos vértices (átomos de H), que se interceptam no eixo C_3 . Portanto, a molécula de amônia pertence ao grupo C_{3v} . As operações são $\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$.

$C_{3v} \Rightarrow 6$ operações de simetria $\Rightarrow$ grupo de ordem $h = 6$
3 classes: $E, \{C_3, C_3^2\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

- **RI** $\Rightarrow$ unidimensionais designadas como A ou B , bidimensionais como E e tridimensionais como T .
- $A \Rightarrow$ são RI simétricas com relação ao eixo principal $C_n \Rightarrow \chi(C_n) = 1$. $B \Rightarrow$ são RI antissimétricas $\Rightarrow \chi(C_n) = -1$.
- Subíndices 1 e 2 (A_1, A_2, B_1, B_2) designam as RI simétricas e antissimétricas com relação à $C_2 \perp C_n$ ou com relação à σ_v .
- Sobre-índices ' e '' são RI simétricas e antissimétricas com relação à σ_h .
- **Grupo com centro de inversão**: índices g (*gerade* = par) ou u (*ungerade* = ímpar) indicam se as RI são simétricas ou antissimétricas com relação à inversão.



Construção das Tabelas de Caracteres



C_{2h}	E	C_2	i	σ_h
A_g	1	1	1	1
B_g	1	-1	1	-1
A_u	1	1	-1	-1
B_u	1	-1	-1	1

- Grupo com centro de inversão: índices g (*gerade* = par) ou u (*ungerade* = ímpar) indicam se as RI são simétricas ou antisimétricas com relação à inversão.



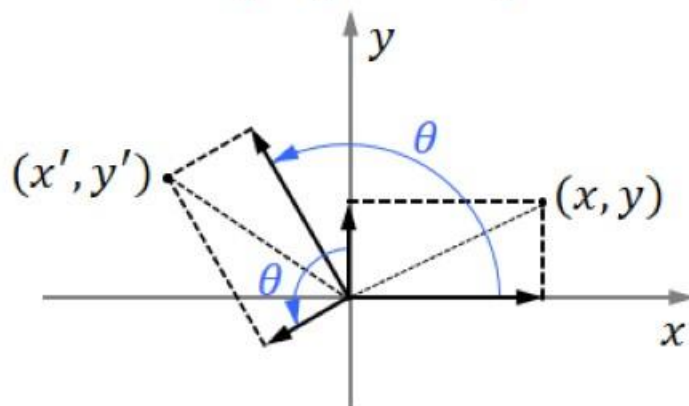
Construção das Tabelas de Caracteres

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

Esta região da tabela apresenta funções ou vetores que constituem uma base para uma dada RI $\Rightarrow$ Qualquer conjunto de vetores ou de funções algébricas pode servir como base para uma representação $\Rightarrow$ determinação das matrizes que mostram como se transformam segundo as operações de simetria do grupo.

Matriz de transformação para rotações de θ° em torno do eixo z :



eixo de rotação em torno do eixo z

Caso geral:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Construção das Tabelas de Caracteres



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

Esta região da tabela apresenta funções ou vetores que constituem uma base para uma dada RI $\Rightarrow$ Qualquer conjunto de vetores ou de funções algébricas pode servir como base para uma representação $\Rightarrow$ determinação das matrizes que mostram como se transformam segundo as operações de simetria do grupo.

Matriz de transformação para rotações $C_3: \theta = (2\pi)/3$

$$x' = x \cos(2\pi/3) - y \sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$y' = x \sin(2\pi/3) + y \cos(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$$

$$\longrightarrow \Gamma(C_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Construção das Tabelas de Caracteres

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

$$\Gamma(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(C_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\sigma_{v(xz)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrizes de transformação, quando aplicadas ao vetor de componentes x, y e z , nunca misturam a coordenada z com as x e y :

	$\Gamma(E)$	$\Gamma(C_3)$	$\Gamma(\sigma_v)$
Γ^{xy}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Γ^z	1	1	1



Construção das Tabelas de Caracteres

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

	$\Gamma(E)$	$\Gamma(C_3)$	$\Gamma(\sigma_v)$
Γ^{xy}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Γ^z	1	1	1

	$\chi(E)$	$\chi(C_3)$	$\chi(\sigma_v)$
Γ^{xy}	2	-1	0
Γ^z	1	1	1



Construção das Tabelas de Caracteres

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

	$\Gamma(E)$	$\Gamma(C_3)$	$\Gamma(\sigma_v)$
Γ^{xy}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Γ^z	1	1	1

	$\chi(E)$	$\chi(C_3)$	$\chi(\sigma_v)$
Γ^{xy}	2	-1	0
Γ^z	1	1	1

Γ^z é a representação irredutível $A_1 \Rightarrow$ a coordenada z constitui uma base da representação $A_1 \Rightarrow z$ transforma-se de acordo com a representação A_1



Construção das Tabelas de Caracteres

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$x, y, (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

	$\Gamma(E)$	$\Gamma(C_3)$	$\Gamma(\sigma_v)$
Γ^{xy}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Γ^z	1	1	1

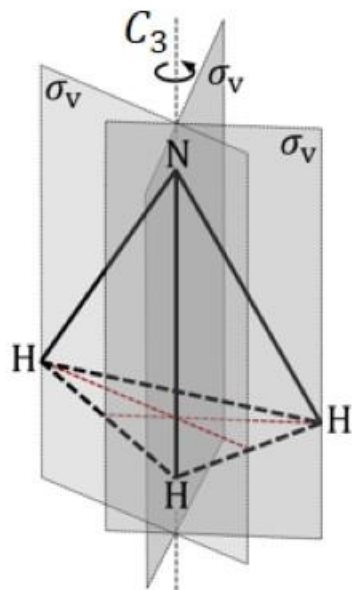
	$\chi(E)$	$\chi(C_3)$	$\chi(\sigma_v)$
Γ^{xy}	2	-1	0
Γ^z	1	1	1

Γ^{xy} é a representação irredutível $E \Rightarrow$ as coordenadas x e y constituem uma base da representação $E \Rightarrow x$ e y transformam-se de acordo com a representação E



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

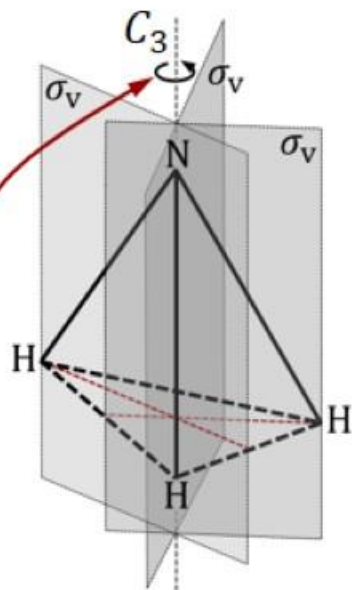
Para descobrir como R_x, R_y e R_z se transformam segundo as diversas representações irreduzíveis do grupo, devemos considerar um vetor axial. Utilizando como protótipo o produto vetorial podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy')\hat{i} + (zx' - xz')\hat{j} + (xy' - yx')\hat{k} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &\rightarrow yz' - zy' \\ R_y &\rightarrow zx' - xz' \\ R_z &\rightarrow xy' - yx' \end{aligned}$$



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

Aplicando-se as operações do grupo C_{3v} em $R_z (\rightarrow xy' - yx')$, obtemos:

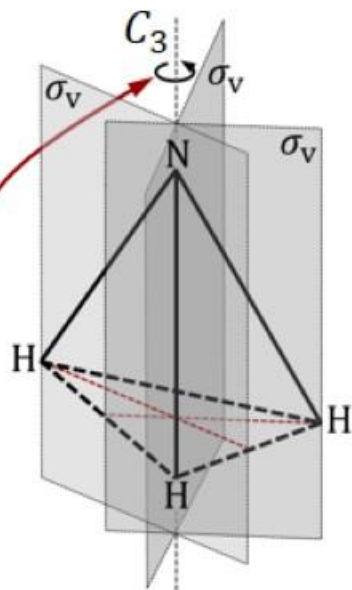
$$E(xy' - yx') = xy' - yx' \Rightarrow \chi(E) = 1$$

Esta flecha se mantém inalterada se aplicarmos a operação E



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

Aplicando-se as operações do grupo C_{3v} em $R_z (\rightarrow xy' - yx')$, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} E(xy' - yx') &= xy' - yx' \Rightarrow \chi(E) = 1 \\ C_3(xy' - yx') &= xy' - yx' \Rightarrow \chi(C_3) = 1 \\ \sigma_v(xy' - yx') &= -(xy' - yx') \Rightarrow \chi(\sigma_v) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_z \text{ constitui uma base para uma representação com caracteres } 1, 1, -1 \Rightarrow$$

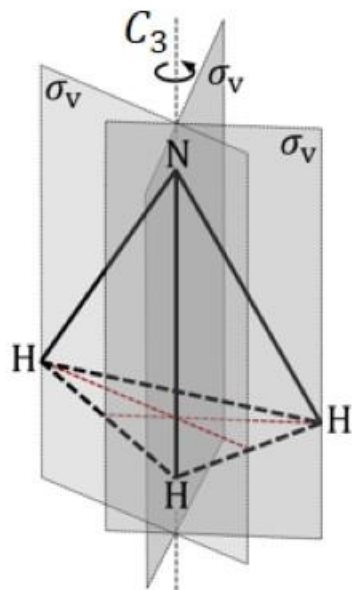
Esta flecha se mantém inalterada se aplicarmos as operações E e C_3 e inverte de sentido se aplicarmos σ_v

Uma rotação em torno do eixo z se transforma de acordo com a representação irreduzível A_2 .



Construção das Tabelas de Caracteres

Molécula de amônia



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

$x, y, z \Rightarrow$ são coordenadas; $R_x, R_y, R_z \Rightarrow$ rotações em torno dos eixos x, y, z

Aplicando-se a operação C_3 em $R_x (\rightarrow yz' - zy')$ e em $R_y (\rightarrow zx' - xz')$, obtemos:

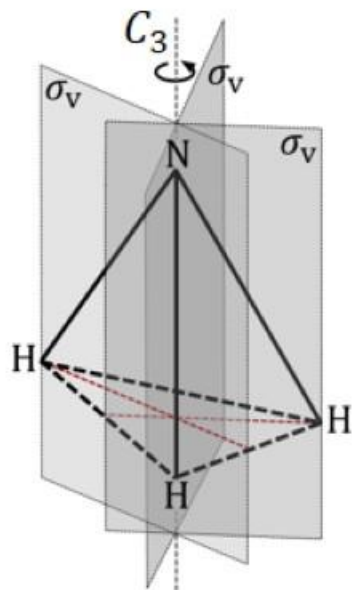
$$\left. \begin{aligned} C_3(yz' - zy') &= -(yz' - zy')/2 - \underbrace{[(zx' - xz')\sqrt{3}]/2}_{R_y} \\ C_3(zx' - xz') &= \underbrace{[(yz' - zy')\sqrt{3}]/2}_{R_x} - (zx' - xz')/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_x \text{ e } R_y \text{ não podem ser consideradas separadamente e, por aplicação das operações do grupo, encontramos que elas se transformam, conjuntamente, de acordo com a representação irreduzível } E, \text{ formando uma base para esta representação.}$$



Construção das Tabelas de Caracteres



Molécula de amônia



C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy), (xz, yz)$

São combinações dos quadrados e dos produtos cruzados de coordenadas, de acordo com as suas propriedades de transformações, tais como $x^2 + y^2$ e z^2 em A_1 e os pares de funções $(x^2 - y^2, xy)$ e (xz, yz) em E . Essas propriedades de transformações podem ser determinadas do mesmo modo que foi feito para as x, y e z .

Em concordância com os orbitais atômicos $s, p, d, f, \dots$ (veremos mais adiante)



32 grupos pontuais cristalográficos

Número	Símbolo de Schoenflies	Símbolo Internacional	Sistema Cristalino
1	C_1	1	Triclínico
2	$C_i (S_2)$	$\bar{1}$	
3	$C_s (C_{1h})$	m	Monoclínico
4	C_2	2	
5	C_{2h}	$2/m$	
6	C_{2v}	mm	Ortorômbico
7	D_2	222	
8	D_{2h}	mmm	
9	C_4	4	Tetragonal
10	S_4	$\bar{4}$	
11	C_{4h}	$4/m$	
12	C_{4v}	$4mm$	
13	D_{2d}	$\bar{4}2m$	
14	D_4	422	
15	D_{4h}	$4/mmm$	Romboédrico
16	C_3	3	
17	S_6	$\bar{3}$	
18	C_{3v}	$3m$	
19	D_3	32	
20	D_{3d}	$\bar{3}m$	Hexagonal
21	C_{3h}	$\bar{6}$	
22	C_6	6	
23	C_{6h}	$6/m$	
24	D_{3h}	$\bar{6}m2$	
25	C_{6v}	$6mm$	
26	D_6	622	
27	D_{6h}	$6/mmm$	Cúbico
28	T	23	
29	T_h	$m\bar{3}$	
30	T_d	$\bar{4}3m$	
31	O	432	
32	O_h	$m\bar{3}m$	

→ Redes de Bravais



7 sistemas cristalinos e 14 tipos de redes de Bravais em três dimensões

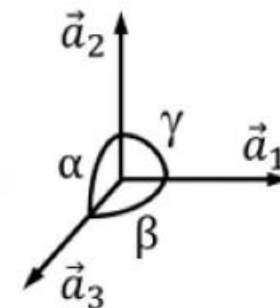


Sistema Cristalino	Número de redes	Símbolo da rede	Relação Axial	Ângulos Interaxiais	Grupo Pontual (classe do cristal)
Triclínico	1	P	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	$C_i (C_1)$
Monoclínico	2	P, C	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	$C_{2h} (C_2, C_s)$
Ortorrômbico	4	P, C, I, F	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$D_{2h} (D_2, C_{2v})$
Tetragonal	2	P, I	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$D_{4h} (D_4, C_{4v}, C_{4h}, C_4, D_{2d}, S_4)$
Trigonal (Romboedral)	1	R	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ, \neq 90^\circ$	$D_{3d} (D_3, C_{3v}, S_6, C_3)$
Hexagonal	1	P	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	$D_{6h} (D_6, C_{6v}, C_{6h}, C_6, D_{3h}, C_{3h})$
Cúbico	3	P, I, F	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	$O_h (O, T_d, T_h, T)$

$$|\vec{a}_1| = a, |\vec{a}_2| = b \text{ e } |\vec{a}_3| = c$$

As relações entre os vetores primitivos $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ e os ângulos α, β e γ são:

$$\angle a, b = \gamma, \angle a, c = \beta \text{ e } \angle b, c = \alpha$$





Sistema triclinico (P)

Tabelas de Caracteres



Grupos espaciais: 2
(1 e 2)

$$C_1 \equiv 1$$

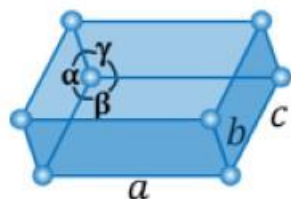
$$C_i \equiv S_2 \equiv \bar{1}$$

Relação axial: $a \neq b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$$

Geometria da Célula:



C_1	E
A	1

C_i	E	i		
A_g	1	1	R_x, R_y, R_z	$x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$
A_u	1	-1	x, y, z	



Tabelas de Caracteres



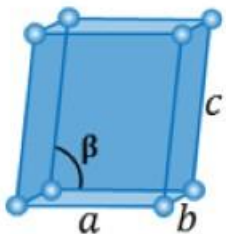
Sistema monoclínico (P, C)

Relação axial: $a \neq b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 13
(3 ao 15)

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv 2 \\ C_s &\equiv m \\ C_{2h} &\equiv 2/m \end{aligned}$$

$$C_s \equiv C_{1h}$$

C_2	E	C_2	(3 grupos: 3-5)	
A	1	1	z, R_z	x^2, y^2, z^2, xy
B	1	-1	x, y, R_x, R_y	xz, yz

C_s	E	σ_h	(4 grupos: 6-9)	
A'	1	1	x, y, R_z	x^2, y^2, z^2, xy
A''	1	-1	z, R_x, R_y	xz, yz

C_{2h}	E	C_2	i	σ_h	(6 grupos: 10-15)	
A_g	1	1	1	1	R_z	x^2, y^2, z^2, xy
B_g	1	-1	1	-1	R_x, R_y	xz, yz
A_u	1	1	-1	-1	z	
B_u	1	-1	-1	1	x, y	



Tabelas de Caracteres



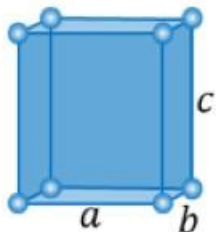
Sistema ortorrômbico (P, C, I, F)

Relação axial: $a \neq b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



D_2	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	(9 grupos: 16-24)	
A	1	1	1	1		x^2, y^2, z^2
B_1	1	1	-1	-1	z, R_z	xy
B_2	1	-1	1	-1	y, R_y	xz
B_3	1	-1	-1	1	x, R_x	yz
C_{2v}	E	C_2	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$	(22 grupos: 25-46)	
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x	yz

D_{2h}	E	$C_2(z)$	$C_2(y)$	$C_2(x)$	i	$\sigma(xy)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$	(28 grupos: 47-74)	
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1		x^2, y^2, z^2
B_{1g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_{2g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	R_y	xz
B_{3g}	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	R_x	yz
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
B_{1u}	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	z	
B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	y	
B_{3u}	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	x	

Grupos espaciais: 59
(16 ao 74)

$$D_2 \equiv 222$$

$$C_{2v} \equiv mm2$$

$$D_{2h} \equiv mmm$$



Tabelas de Caracteres



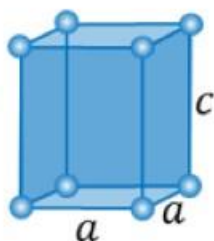
Sistema tetragonal (P,I)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



C_{4h}	E	C_4	C_2	C_4^3	i	S_4^3	σ_h	S_4	(6 grupos: 83-88)	
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
B_g	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		$x^2 - y^2, xy$
E_g	$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \end{array} \right\}$								(R_x, R_y)	(xz, yz)
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	z	
B_u	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1		
E_u	$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & i & -1 & -i & -1 & -i & 1 & i \\ 1 & -i & -1 & i & -1 & i & 1 & -i \end{array} \right\}$								(x, y)	

C_4	E	C_4	C_2	C_4^3	(6 grupos: 75-80)	
A	1	1	1	1	z, R_z	$x^2 + y^2, z^2$
B	1	-1	1	-1		$x^2 - y^2, xy$
E	$\begin{Bmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{Bmatrix}$				$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)

S_4	E	S_4	C_2	S_4^3	(2 grupos: 81 e 82)	
A	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
B	1	-1	1	-1		$x^2 - y^2, xy$
E	$\begin{Bmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{Bmatrix}$				$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)

Grupos espaciais: 68
(75 ao 142)

$$C_4 \equiv 4$$

$$S_4 \equiv \bar{4}$$

$$C_{4h} \equiv 4/m$$

$$D_4 \equiv 422$$

$$C_{4v} \equiv 4mm$$

$$D_{2d} \equiv \bar{4}2m$$

$$D_{4h} \equiv 4/mmm$$



Lucy V. C. Assali



Tabelas de Caracteres

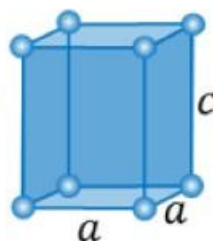
Sistema tetragonal (P,I)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



D_4	E	$2C_4$	$C_2(=C_4^2)$	$2C_2'$	$2C_2''$	(10 grupos: 89-98)	
A_1	1	1	1	1	1	z, R_z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
B_1	1	-1	1	1	-1		$x^2 - y^2$
B_2	1	-1	1	-1	1		xy
E	2	0	-2	0	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)

C_{4v}	E	$2C_4$	C_2	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$	(12 grupos: 99-110)	
A_1	1	1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1	R_z	
B_1	1	-1	1	1	-1		$x^2 - y^2$
B_2	1	-1	1	-1	1		xy
E	2	0	-2	0	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)

Grupos espaciais: 68
(75 ao 142)

$\uparrow$
 $C_4 \equiv 4$
 $S_4 \equiv \bar{4}$
 $C_{4h} \equiv 4/m$

$D_4 \equiv 422$
 $C_{4v} \equiv 4mm$
 $D_{2d} \equiv \bar{4}2m$
 $D_{4h} \equiv 4/mmm$



Tabelas de Caracteres



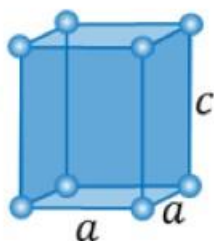
Sistema tetragonal (P,I)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



D_{2d}	E	$2S_4$	C_2	$2C'_2$	$2\sigma_d$	(12 grupos: 111-122)	
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1	R_z	
B_1	1	-1	1	1	-1		$x^2 - y^2$
B_2	1	-1	1	-1	1	z	xy
E	2	0	-2	0	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)

D_{4h}	E	$2C_4$	C_2	$2C'_2$	$2C''_2$	i	$2S_4$	σ_h	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$	(20 grupos: 123-142)	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2, z^2$
A_{2g}	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	R_z	
B_{1g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		$x^2 - y^2$
B_{2g}	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1		xy
E_g	2	0	-2	0	0	2	0	-2	0	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	z	
B_{1u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
B_{2u}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		
E_u	2	0	-2	0	0	-2	0	2	0	0	(x, y)	

$C_4 \equiv 4$
 $S_4 \equiv \bar{4}$
 $C_{4h} \equiv 4/m$

Grupos espaciais: 68
(75 ao 142)

$D_4 \equiv 422$
 $C_{4v} \equiv 4mm$
 $D_{2d} \equiv \bar{4}2m$
 $D_{4h} \equiv 4/mmm$



Tabelas de Caracteres

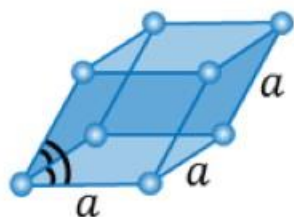
Sistema romboédrico ou trigonal (R ou P)

Relação axial: $a = b = c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ \neq 90^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 25
(143 ao 167)

$$S_6 \equiv C_{3i}$$

$$C_3 \equiv 3$$

$$S_6 \equiv \bar{3}$$

$$D_3 \equiv 32$$

$$C_{3v} \equiv 3m$$

$$D_{3d} \equiv \bar{3}m$$



C_3	E	C_3	C_3^2	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/3}$ (4 grupos: 143-146)	
A	1	1	1	z, R_z	$x^2 + y^2, z^2$
E	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon \end{Bmatrix}$			$(x, y); (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$

S_6	E	C_3	C_3^2	i	S_6^5	S_6	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/3}$ (2 grupos: 147 e 148)	
A_g	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
E_g	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & 1 & \varepsilon & \varepsilon^* \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & 1 & \varepsilon^* & \varepsilon \end{Bmatrix}$						(R_x, R_y)	$(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$
A_u	1	1	1	-1	-1	-1	z	
E_u	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & -1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & -1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon \end{Bmatrix}$						(x, y)	

D_3	E	$2 C_3$	$3 C_2$	(7 grupos: 149-155)	
A_1	1	1	1		$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	z, R_z	
E	2	-1	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$



Tabelas de Caracteres

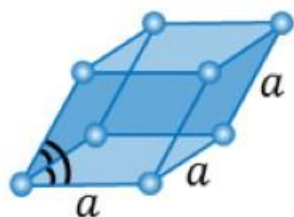
Sistema romboédrico ou trigonal (R ou P)

Relação axial: $a = b = c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma < 120^\circ \neq 90^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 25
(143 ao 167)



$$C_3 \equiv 3$$

$$S_6 \equiv \bar{3}$$

$$D_3 \equiv 32$$

$$C_{3v} \equiv 3m$$

$$D_{3d} \equiv \bar{3}m$$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	(6 grupos: 156-161)	
A_1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	$(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$

D_{3d}	E	$2C_3$	$3C_2$	i	$2S_6$	$3\sigma_d$	(6 grupos: 162-167)	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2, z^2$
A_{2g}	1	1	-1	1	1	-1	R_z	
E_g	2	-1	0	2	-1	0	(R_x, R_y)	$(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$
A_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	-1	-1	-1	1	z	
E_u	2	-1	0	-2	1	0	(x, y)	



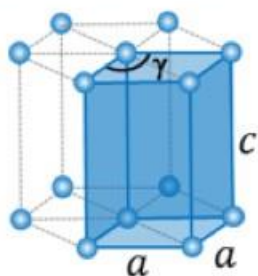
Sistema hexagonal (P)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 27
(168 ao 194)

Tabelas de Caracteres

C_6	E	C_6	C_3	C_2	C_3^2	C_6^5	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/6}$ (6 grupos: 168-173)	
A	1	1	1	1	1	1	z, R_z	$x^2 + y^2, z^2$
B	1	-1	1	-1	1	-1		
E_1	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \varepsilon \quad -\varepsilon^* \quad -1 \quad -\varepsilon \quad \varepsilon^* \\ 1 \quad \varepsilon^* \quad -\varepsilon \quad -1 \quad -\varepsilon^* \quad \varepsilon \end{array} \right\}$						$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)
E_2	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad -\varepsilon^* \quad -\varepsilon \quad 1 \quad -\varepsilon^* \quad -\varepsilon \\ 1 \quad -\varepsilon \quad -\varepsilon^* \quad 1 \quad -\varepsilon \quad -\varepsilon^* \end{array} \right\}$							$(x^2 - y^2, xy)$

C_{3h}	E	C_3	C_3^2	σ_h	S_3	S_3^5	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/3}$ (1 grupo: 174)	
A'	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
E'	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon^* \quad 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon^* \\ 1 \quad \varepsilon^* \quad \varepsilon \quad 1 \quad \varepsilon^* \quad \varepsilon \end{array} \right\}$						(x, y)	$(x^2 - y^2, xy)$
A''	1	1	1	-1	-1	-1	z	
E''	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \varepsilon \quad \varepsilon^* \quad -1 \quad -\varepsilon \quad -\varepsilon^* \\ 1 \quad \varepsilon^* \quad \varepsilon \quad -1 \quad -\varepsilon^* \quad -\varepsilon \end{array} \right\}$						(R_x, R_y)	(xz, yz)

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_6 \equiv 6 & C_{6h} \equiv 6/m & D_6 \equiv 622 & D_{3h} \equiv \bar{6}m2 & D_{6h} \equiv 6/mmm & & \\
 C_{3h} \equiv \bar{6} & \downarrow & C_{6v} \equiv 6mm & \downarrow & \downarrow & &
 \end{array}$$



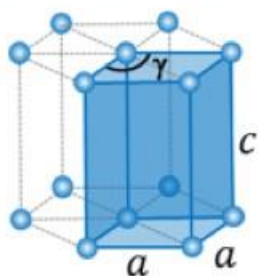
Sistema hexagonal (P)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Geometria da Célula:

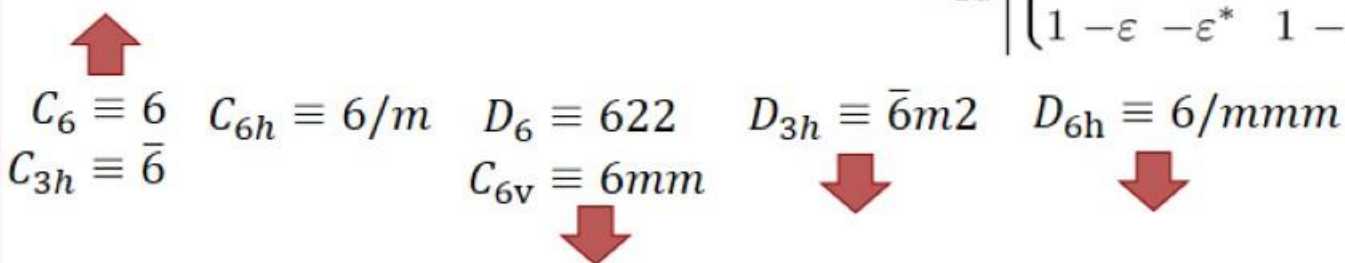


Grupos espaciais: 27
(168 ao 194)

Tabelas de Caracteres

(2 grupos: 175 e 176)

C_{6h}	E	C_6	C_3	C_2	C_3^2	C_6^5	i	S_3^5	S_6^5	σ_h	S_6	S_3	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/6}$	
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
B_g	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		
E_{1g}	$\begin{cases} 1 & \varepsilon & -\varepsilon^* & -1 & -\varepsilon & \varepsilon^* & 1 & \varepsilon & -\varepsilon^* & -1 & -\varepsilon & \varepsilon^* \\ 1 & \varepsilon^* & -\varepsilon & -1 & -\varepsilon^* & \varepsilon & 1 & \varepsilon^* & -\varepsilon & -1 & -\varepsilon^* & \varepsilon \end{cases}$												(R_x, R_y)	(xz, yz)
E_{2g}	$\begin{cases} 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon \\ 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* \end{cases}$													$(x^2 - y^2, xy)$
A_u	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	z	
B_u	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1		
E_{1u}	$\begin{cases} 1 & \varepsilon & -\varepsilon^* & -1 & -\varepsilon & \varepsilon^* & -1 & -\varepsilon & \varepsilon^* & 1 & \varepsilon & -\varepsilon^* \\ 1 & \varepsilon^* & -\varepsilon & -1 & -\varepsilon^* & \varepsilon & -1 & -\varepsilon^* & \varepsilon & 1 & \varepsilon^* & -\varepsilon \end{cases}$												(x, y)	
E_{2u}	$\begin{cases} 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & 1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & -1 & \varepsilon^* & \varepsilon & -1 & \varepsilon^* & \varepsilon \\ 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & 1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & -1 & \varepsilon & \varepsilon^* & -1 & \varepsilon & \varepsilon^* \end{cases}$													





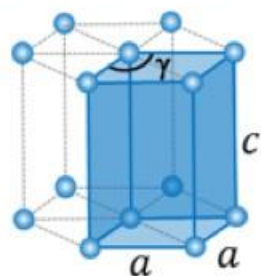
Sistema hexagonal (P)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 27
(168 ao 194)

Tabelas de Caracteres

D_6	E	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C'_2$	$3C''_2$	(6 grupos: 177-182)	
A_1	1	1	1	1	1	1	z, R_z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	1	1	-1	-1		
B_1	1	-1	1	-1	1	-1		
B_2	1	-1	1	-1	-1	1		
E_1	2	1	-1	-2	0	0	$(x, y); (R_x, R_y)$	(xz, yz)
E_2	2	-1	-1	2	0	0		$(x^2 - y^2, xy)$

C_{6v}	E	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3\sigma_v$	$3\sigma_d$	(4 grupos: 183-186)	
A_1	1	1	1	1	1	1	z	$x^2 + y^2, z^2$
A_2	1	1	1	1	-1	-1	R_z	
B_1	1	-1	1	-1	1	-1	$(x, y); (R_x, R_y)$	
B_2	1	-1	1	-1	-1	1		
E_1	2	1	-1	-2	0	0		(xz, yz)
E_2	2	-1	-1	2	0	0		$(x^2 - y^2, xy)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \uparrow & \uparrow & & & & & \\
 C_6 \equiv 6 & C_{6h} \equiv 6/m & D_6 \equiv 622 & D_{3h} \equiv \bar{6}m2 & D_{6h} \equiv 6/mmm \\
 C_{3h} \equiv \bar{6} & & C_{6v} \equiv 6mm & \downarrow & \downarrow & &
 \end{array}$$



Tabelas de Caracteres



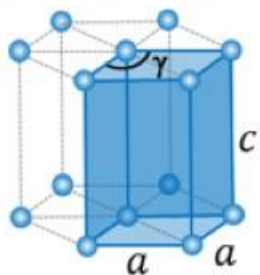
Sistema hexagonal (P)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 27
(168 ao 194)

D_{3h}	E	$2C_3$	$3C_2$	σ_h	$2S_3$	$3\sigma_v$	(4 grupos: 187-190)	
A'_1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2, z^2$
A'_2	1	1	-1	1	1	-1	R_z	
E'	2	-1	0	2	-1	0	(x, y)	$(x^2 - y^2, xy)$
A''_1	1	1	1	-1	-1	-1		
A''_2	1	1	-1	-1	-1	1	z	
E''	2	-1	0	-2	1	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \\
 C_6 \equiv 6 & C_{6h} \equiv 6/m & D_6 \equiv 622 & D_{3h} \equiv \bar{6}m2 & D_{6h} \equiv 6/mmm & & \\
 C_{3h} \equiv \bar{6} & & C_{6v} \equiv 6mm & & \downarrow & &
 \end{array}$$



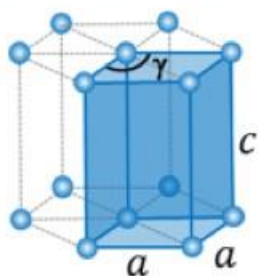
Sistema hexagonal (P)

Relação axial: $a = b \neq c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 27
(168 ao 194)

Tabelas de Caracteres

D_{6h}	E	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C'_2$	$3C''_2$	i	$2S_3$	$2S_6$	σ_h	$3\sigma_d$	$3\sigma_v$	(4 grupos: 191-194)	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
A_{2g}	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1		
B_{1g}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		
B_{2g}	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1		
E_{1g}	2	1	-1	-2	0	0	2	1	-1	-2	0	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)
E_{2g}	2	-1	-1	2	0	0	2	-1	-1	2	0	0		$(x^2 - y^2, xy)$
A_{1u}	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	z	
A_{2u}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1		
B_{1u}	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1		
B_{2u}	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E_{1u}	2	1	-1	-2	0	0	-2	-1	1	2	0	0	(x, y)	
E_{2u}	2	-1	-1	2	0	0	-2	1	1	-2	0	0		

$$\begin{array}{ccccccc}
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\
 C_6 \equiv 6 & C_{6h} \equiv 6/m & D_6 \equiv 622 & D_{3h} \equiv \bar{6}m2 & D_{6h} \equiv 6/mmm & & \\
 C_{3h} \equiv \bar{6} & & C_{6v} \equiv 6mm & & & &
 \end{array}$$



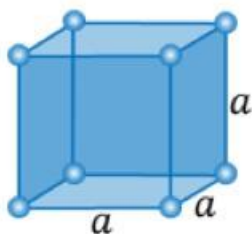
Sistema cúbico (P,I,F)

Relação axial: $a = b = c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 36
(195 ao 230)

$$T \equiv 23 \quad O \equiv 432$$

$$T_h \equiv m\bar{3} \quad T_d \equiv \bar{4}3m \quad O_h \equiv m\bar{3}m$$



Tabelas de Caracteres

T	E	$4C_3$	$4C_3^2$	$3C_2$	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/3}$	(5 grupos: 195-199)
A	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
E	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & 1 \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & 1 \end{Bmatrix}$					$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T	3	0	0	-1	$(R_x, R_y, R_z); (x, y, z)$	(xy, xz, yz)

T_h	E	$4C_3$	$4C_3^2$	$3C_2$	i	$4S_6$	$4S_6^5$	$3\sigma_h$	$\varepsilon = e^{(i2\pi)/3}$	(7 grupos: 200-206)
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
E_g	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & 1 \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & 1 & 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & 1 \end{Bmatrix}$									$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_g	3	0	0	-1	3	0	0	-1	(R_x, R_y, R_z)	(xy, xz, yz)
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1		
E_u	$\begin{Bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^* & 1 & -1 & -\varepsilon & -\varepsilon^* & -1 \\ 1 & \varepsilon^* & \varepsilon & 1 & -1 & -\varepsilon^* & -\varepsilon & -1 \end{Bmatrix}$									
T_u	3	0	0	-1	-3	0	0	1	(x, y, z)	



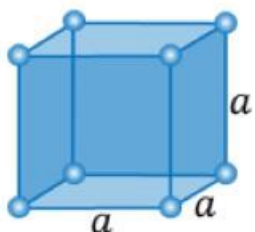
Sistema cúbico (P,I,F)

Relação axial: $a = b = c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 36
(195 ao 230)

Tabelas de Caracteres

O	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	(8 grupos: 207-214)	
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	-1	1	1	-1		
E	2	0	2	-1	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	1	-1	0	-1	$(x, y, z); (R_x, R_y, R_z)$	
T_2	3	-1	-1	0	1		(xy, xz, yz)

T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$	(6 grupos: 215-220)	
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

$\uparrow$
 $T \equiv 23$ $O \equiv 432$
 $T_h \equiv m\bar{3}$ $T_d \equiv \bar{4}3m$ $O_h \equiv m\bar{3}m$





Tabelas de Caracteres

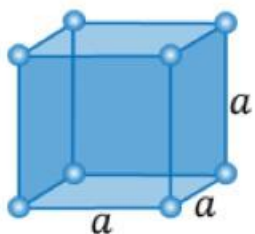
Sistema cúbico (P,I,F)

Relação axial: $a = b = c$

Ângulos interaxiais:

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

Geometria da Célula:



Grupos espaciais: 36
(195 ao 230)

O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$	(10 grupos: 221-230)	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	(R_x, R_y, R_z)	$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0		(xy, xz, yz)
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1		
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1		
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	(x, y, z)	
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0		
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1		
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1		

$$\begin{array}{ll}
 \uparrow & \uparrow \\
 T \equiv 23 & O \equiv 432 \\
 T_h \equiv m\bar{3} & T_d \equiv \bar{4}3m \quad O_h \equiv m\bar{3}m
 \end{array}$$



32 grupos pontuais cristalográficos tridimensionais arrumados de acordo com o sistema cristalino

(Hermann-Mauguin símbolos à esquerda e Schoenflies símbolos à direita)

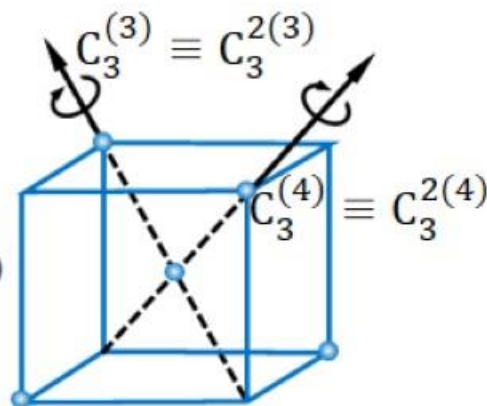
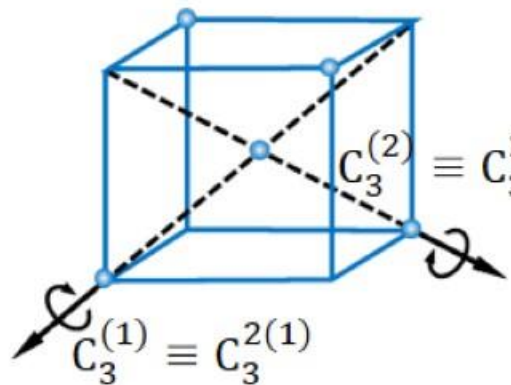
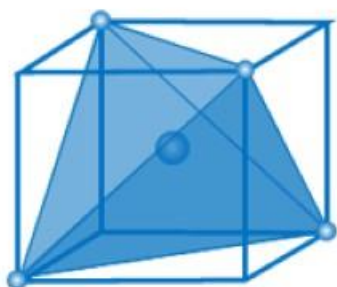
Símbolo Geral	Sistema cristalino											
	Triclínico		monoclínico (cima) ortorrômbico (baixo)		Tetragonal		Trigonal		Hexagonal		Cúbico	
n	1	C_1	2	C_2	4	C_4	3	C_3	6	C_6	23	T
$\bar{n}$	$\bar{1}$	C_i	$\bar{2} \equiv m$	C_s	$\bar{4}$	S_4	$\bar{3}$	C_{3i}	$\bar{6} \equiv 3/m$	C_{3h}	—	—
n/m			$2/m$	C_{2h}	$4/m$	C_{4h}	—	—	$6/m$	C_{6h}	$2/m\bar{3}$	T_h
$n22$			222	D_2	422	D_4	32	D_3	622	D_6	432	O
nmm			2mm	C_{2v}	4mm	C_{4v}	3m	C_{3v}	6mm	C_{6v}	—	—
$\bar{n}2m$			—	—	$\bar{4}2m$	D_{2d}	$\bar{3}2/m$	D_{3d}	$\bar{6}2m$	D_{3h}	$\bar{4}3m$	T_d
$n/m\ 2/m\ 2/m$			$2/m\ 2/m\ 2/m$	D_{2h}	$4/m\ 2/m\ 2/m$	D_{4h}	—	—	$6/m\ 2/m\ 2/m$	D_{6h}	$4/m\ \bar{3}\ 2/m$	O_h



Tabelas de Caracteres: Grupo T_d



T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

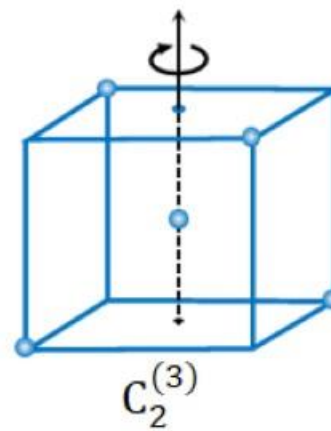
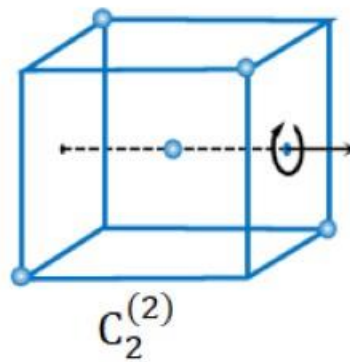
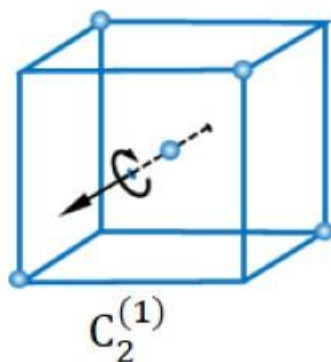
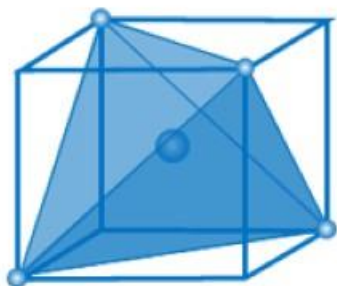




Tabelas de Caracteres: Grupo T_d



T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

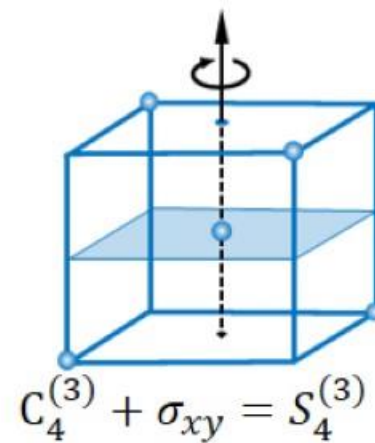
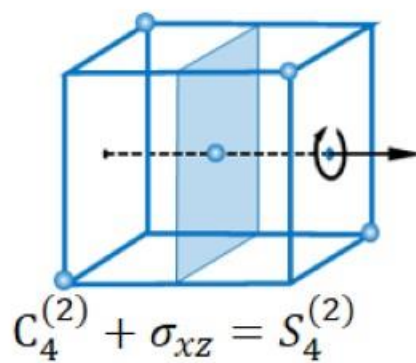
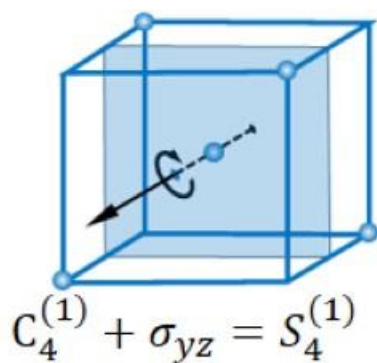
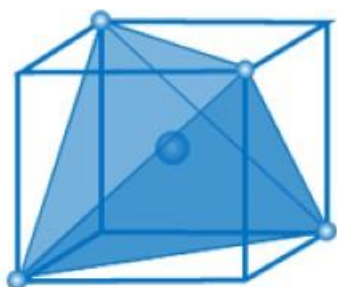




Tabelas de Caracteres: Grupo T_d



T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

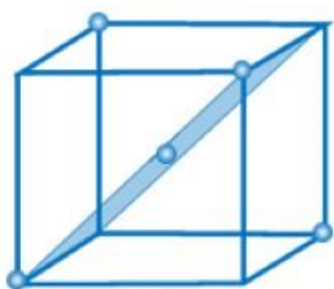




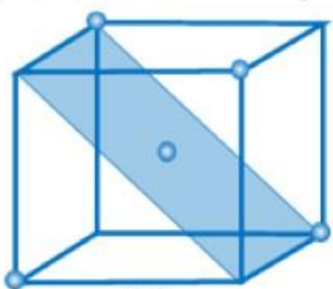
Tabelas de Caracteres: Grupo T_d



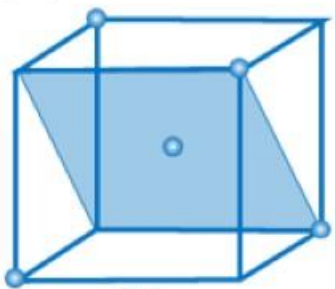
T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	-1	2	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	0	-1	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	0	-1	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)



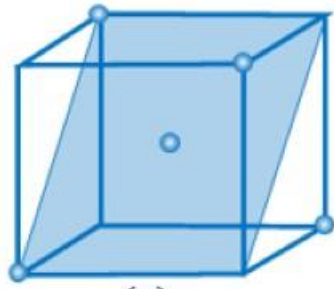
$\sigma_d^{(1)}$



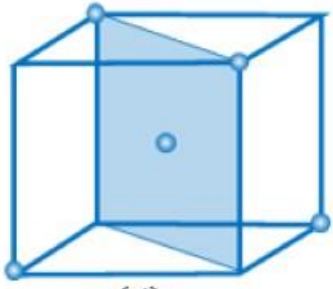
$\sigma_d^{(2)}$



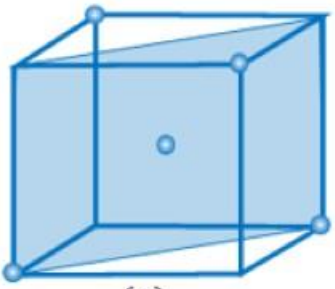
$\sigma_d^{(3)}$



$\sigma_d^{(4)}$



$\sigma_d^{(5)}$



$\sigma_d^{(6)}$



Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1

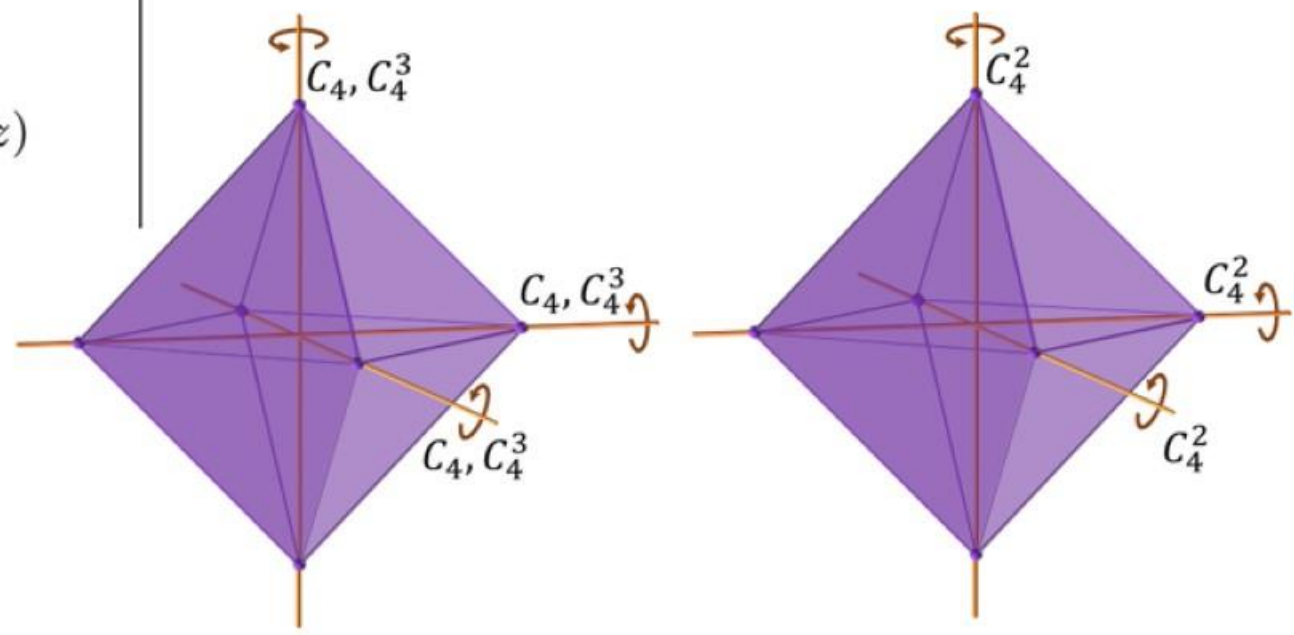
(R_x, R_y, R_z)

(x, y, z)

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$$

$$(xy, xz, yz)$$

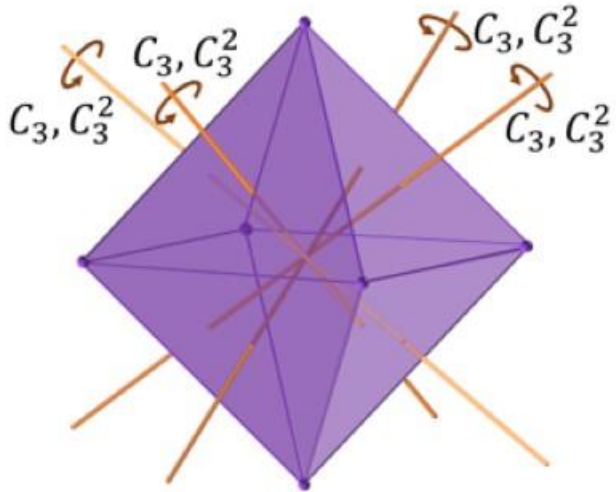




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1		(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0		
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1		

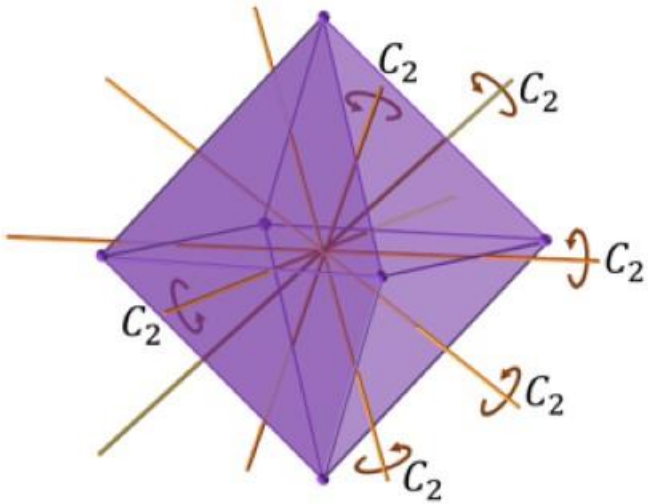




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	6C₂	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1		(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0		
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1		

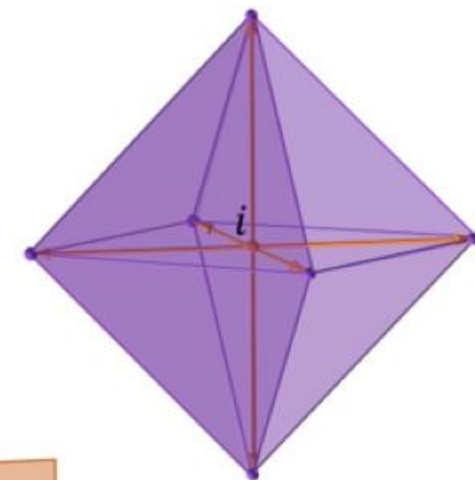
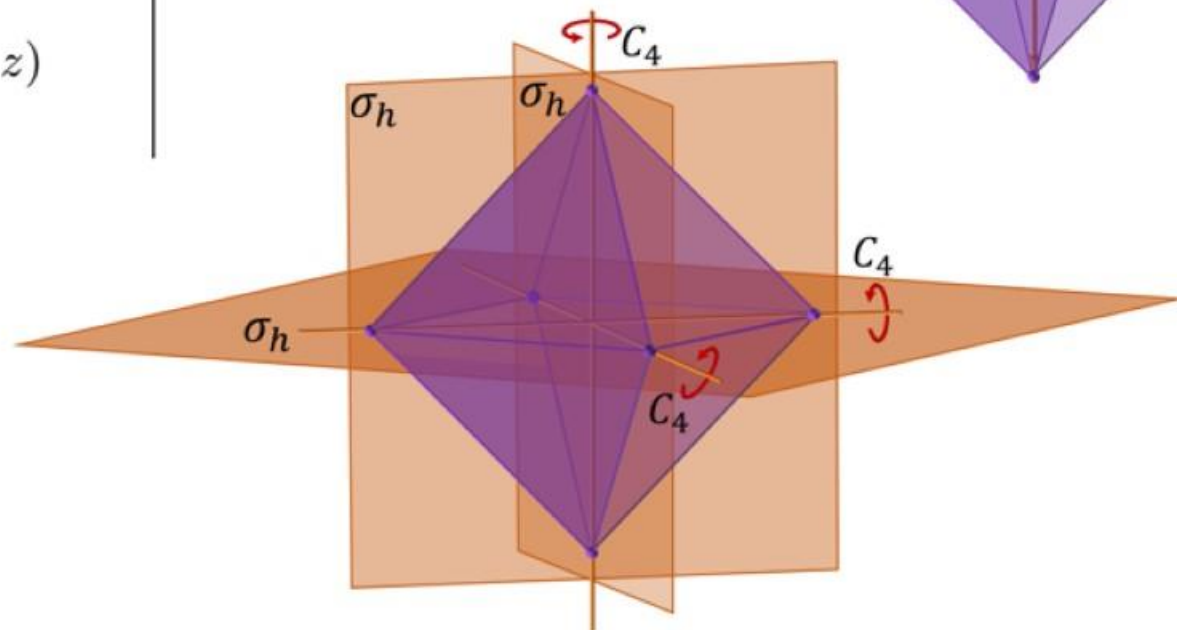




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0	$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1	(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0	
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1	

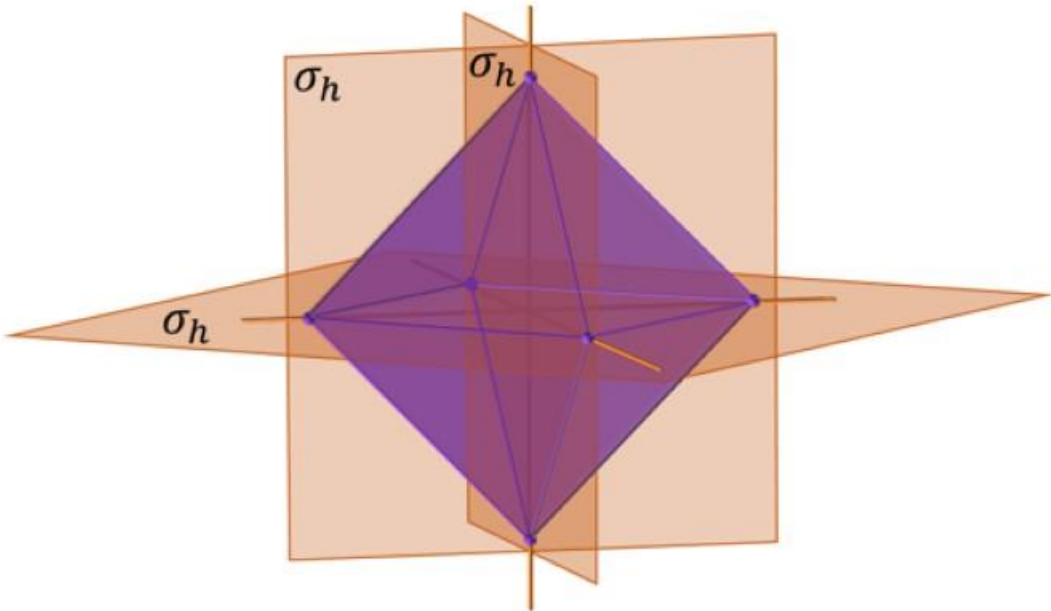




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	3σ_h	$8S_6$	$6\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1		(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0		
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1		

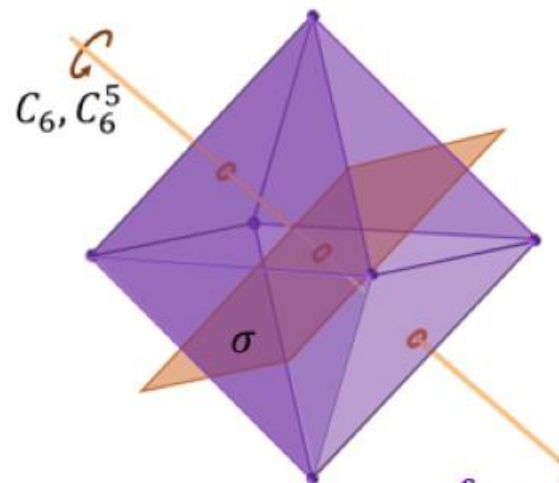
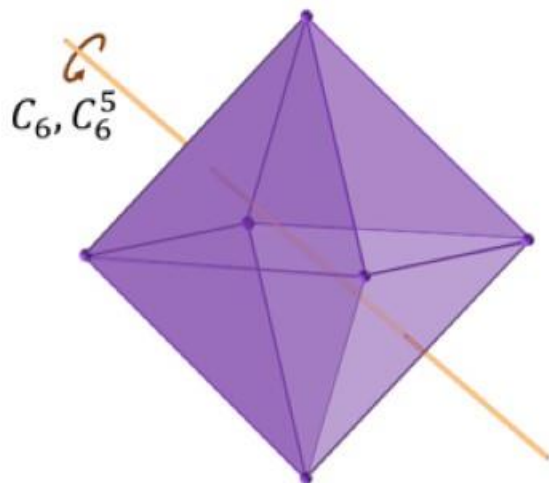
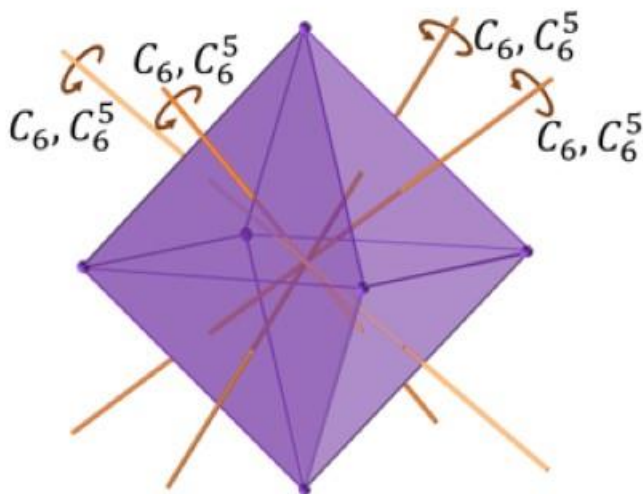




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1		
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1		(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1		
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0		
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1		

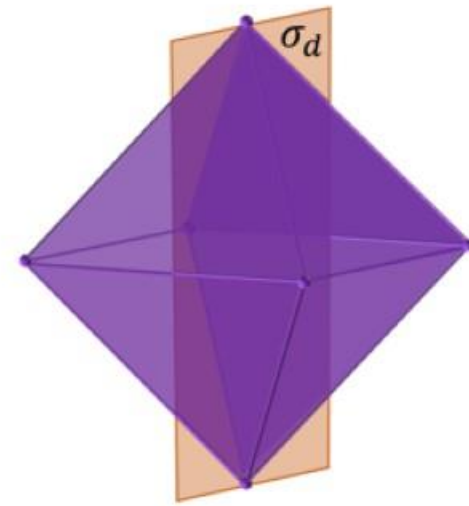
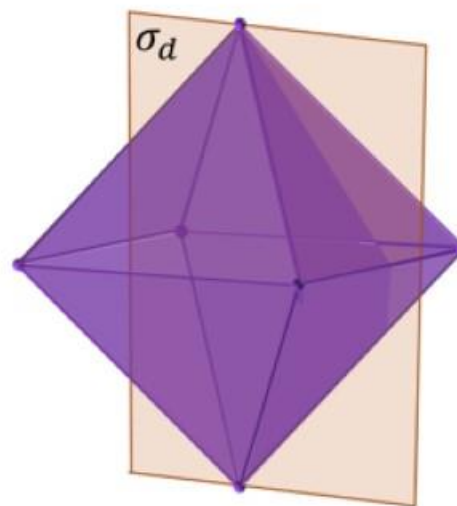




Tabelas de Caracteres: Grupo O_h



O_h	E	$6C_4$	$3C_4^2$	$8C_3$	$6C_2$	i	$6S_4$	$3\sigma_h$	$8S_6$	$6\sigma_d$	
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	
E_g	2	0	2	-1	0	2	0	2	-1	0	$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_{1g}	3	1	-1	0	-1	3	1	-1	0	-1	(R_x, R_y, R_z)
T_{2g}	3	-1	-1	0	1	3	-1	-1	0	1	(xy, xz, yz)
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	
A_{2u}	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	
E_u	2	0	2	-1	0	-2	0	-2	1	0	
T_{1u}	3	1	-1	0	-1	-3	-1	1	0	1	(x, y, z)
T_{2u}	3	-1	-1	0	1	-3	1	1	0	-1	



2 dos 6 planos de reflexão σ_d